

Matemática

BASADO EN LOS NUEVOS PROGRAMAS DEL MER.

9

M. Sc. Gilberto Chavarría Arroyo



Autor:

M. Sc. Gilberto Chavarría Arroyo

3 Ediciones
Lab. 2mb. 0

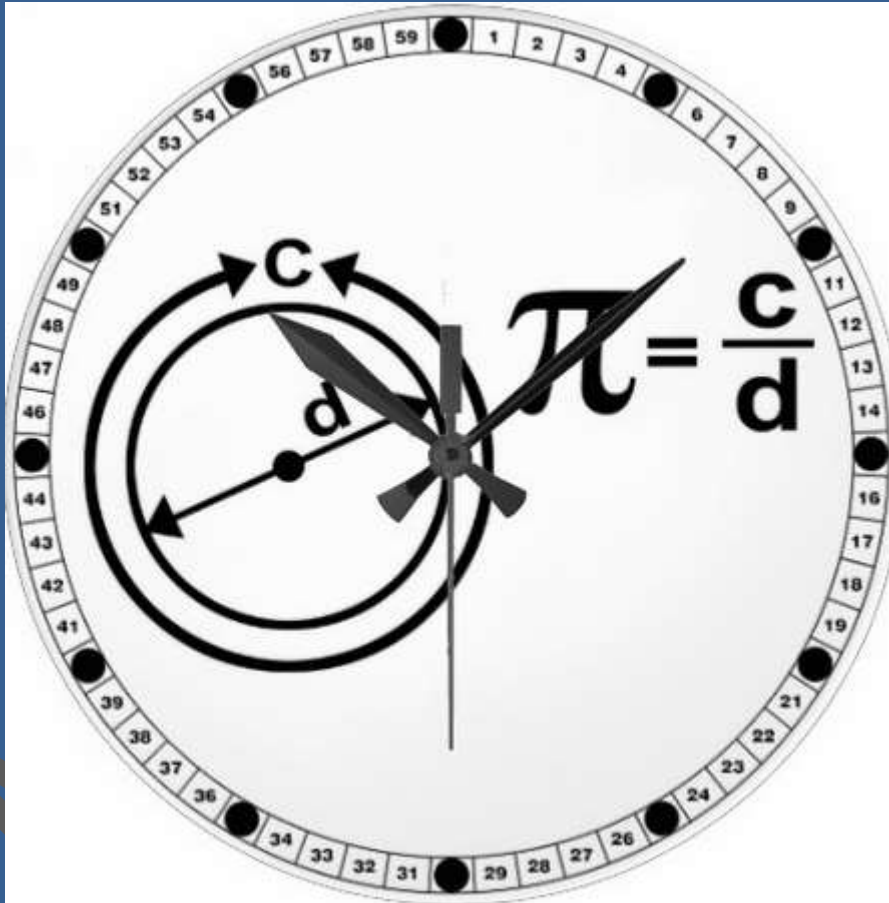


MUESTRA

Tabla de contenidos

NÚMEROS		4
Números irracionales		5
Relaciones de orden		11
Recta numérica		11
Operaciones con números irracionales		12
Cantidades muy grandes y cantidades muy pequeñas		19
Autoevaluación		23
GEOMETRÍA		27
Teorema de Pitágoras		28
Distancias entre puntos		31
Ángulos en grados y radianes		41
Razones trigonométricas		44
Identidad pitagórica		48
Cálculo de medidas de lados y ángulos de triángulos		49
Ángulos de elevación y depresión		50
Ley de Senos		62
Visualización espacial: Prisma		67
Visualización espacial: Pirámide		71
Autoevaluación		85
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD		93
Variables cuantitativas: discretas y continuas		94
Representación tabular y gráfica de datos cuantitativos continuos		97
Valores aleatorios: muestreo		109
Concepto clásico de probabilidad		113
Ley de los grandes números		114
Frecuencia relativa de una probabilidad		117
ÁLGEBRA Y RELACIONES		123
Factorización		124
Completar cuadrados		137
Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias		145
Multiplicación y división de expresiones algebraicas fraccionarias		146
Suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias		147
División de polinomios		151
Racionalización		156
Función cuadrática		160
Gráficas de funciones cuadráticas		166
Ecuaciones de segundo grado con una incógnita		178
RESPUESTAS		191

nÚMEROS



**Conocimiento:
Números
irracionales****Habilidades específicas.**

1. Identificar números irracionales en diversos contextos.
2. Identificar números decimales con expansión decimal infinita no periódica.
3. Realizar aproximaciones decimales de números irracionales.
4. Reconocer números irracionales en notación decimal, en notación radical y otras notaciones particulares.
5. Comparar y ordenar números irracionales representados en notación decimal y radical.
6. Identificar números reales (rationales e irracionales) y no reales en cualquiera de sus representaciones y en diversos contextos.
7. Representar números reales en la recta numérica, con aproximaciones apropiadas.
8. Estimar el valor de la raíz de un número entero.
9. Determinar números irracionales con representación radical entre dos números enteros consecutivos.
10. Utilizar la calculadora para resolver operaciones con radicales.

Escenario de aprendizaje**¿Cuánto material necesito?**

En un colegio se tienen que hacer unas invitaciones cuadradas para el Día de la Madre, pero por recursos económicos solo pueden usar un área de 110cm^2 para cada una.

¿Cuánto debe medir el lado de ese cuadrado?

Conocimientos previos y sugerencias:

- # El área de un cuadrado está dada por $A = \ell^2$
- # Se necesita encontrar un número que multiplicado por sí mismo dé 110. En efecto, esto es determinar el valor de $\sqrt{110}$.

Clausura

$\sqrt{110}$ es un número con expansión decimal **infinita no periódica**, y no se puede representar de la forma $\frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{Z}$. Se clasifica como **número irracional**, cuyo **símbolo es Π** .

Si una expresión tiene expansión decimal finita, o infinita periódica, el **número es racional ($\mathbb{Q}$)**.

Si el número tiene expansión decimal infinita NO periódica, este se clasifica **como irracional (Π)**.

$\sqrt{110} \in \Pi$	$\sqrt{2} \in \Pi$	$\sqrt[3]{5} \in \Pi$	$\sqrt{8} \notin \mathbb{Q}$
$\sqrt{25} \in \mathbb{Q}$	$\sqrt[3]{8} \in \mathbb{Q}$	$\sqrt[5]{1} \notin \Pi$	$\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$
$5,6565... \in \mathbb{Q}$	$\frac{-1}{3} \notin \Pi$	$8,\bar{7} \in \mathbb{Q}$	$2,75 \in \mathbb{Q}$

Comente esta ilustración.



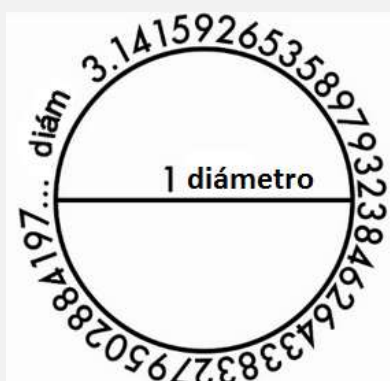
Escenario de aprendizaje

Número entre círculos

Busque algún objeto circular y con ayuda de una cinta métrica o una cuerda, mida su borde (perímetro). Mida también el diámetro de ese círculo (cuerda que pasa por el centro)

Por último, divida esos valores, esto es: $\frac{\text{medida de la circunferencia}}{\text{medida del diámetro}}$

Compare los resultados con sus compañeros.



Clausura

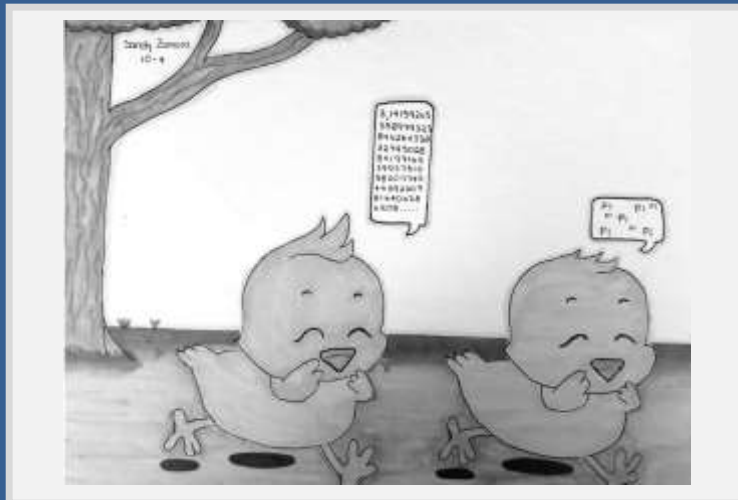
El cociente de $\frac{\text{medida de la circunferencia}}{\text{medida del diámetro}}$ no es un número con expansión decimal finita ni infinita periódica, sino un número con expansión decimal infinita no periódica, conocido como “**Pi**”.

El número Pi (π) es utilizado en diversas áreas del saber, como geometría, probabilidad y física. Actualmente se conocen millones de decimales de este número irracional. Una aproximación con 100 dígitos es:

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164 062862089986280348253421170679.

Dato curioso:

El japonés Akira Haraguchi tiene el récord mundial al memorizar 100 000 decimales de Pi, Para recitarlo tardó 16 horas.



$$\pi \in \mathbb{I} \quad 3,14 \notin \mathbb{I}$$

$$\frac{3\pi}{\pi} \in \mathbb{Q} \quad -4\pi \notin \mathbb{Q}$$

Dibujo realizado por la estudiante de décimo nivel Sandy Zamora, del CTP Mercedes Norte

Escenario de aprendizaje**El número de Euler**

Con ayuda de la calculadora o Excel, complete la siguiente tabla, para determinar el valor numérico en cada caso.

Analice los resultados.

x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
10	
100	
1000	
10 000	
100 000	
1 000 000	
10 000 000	

Note que a pesar de que el valor de “x” aumenta, el resultado de la segunda columna cada vez varía menos. El número al que se aproxima se llama **número de Euler**, debido al matemático que ideó esta fórmula.

Este número también es irracional y se simboliza con **e**. Es un valor que se usa en diversas áreas, tales como economía, probabilidad y biología.

Un aproximado de este número es

2,71828182845904523536028747135266249775724709369995...

$$e \in \mathbb{I} \quad 2,7182 \in \mathbb{Q}$$

$$-6e + 6e \in \mathbb{Q} \quad 7e \notin \mathbb{Q}$$

$$\Phi \in \mathbb{I} \quad 1,61 \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{-5\Phi}{3\Phi} \in \mathbb{Q} \quad \Phi - 3\Phi \notin \mathbb{Q}$$

Escenario de aprendizaje

¿Dónde he visto este número?

1. Construya la sucesión de Fibonacci. Recuerde que para construirla, se inicia con 1 y 1 y a partir de estos números, cada término es la suma de los dos anteriores. (Use 15 términos)

Obtenga el cociente entre cada número y su antecesor. Anote el resultado.

2. Mida la longitud del largo y del ancho de la tarjeta de identificación de menores. Obtenga el cociente de: $\frac{\text{medida del largo}}{\text{medida del ancho}}$. Anote el resultado.

3. Se presenta la obra de Leonardo Da Vinci. "El hombre de Vitruvio". Mida la longitud de los pies al ombligo y la estatura total del hombre que ahí se muestra. Realice: $\frac{\text{estatura total}}{\text{estatura hasta el ombligo}}$. Anote el resultado.

4. Analice los resultados.



En cada una de las actividades de este escenario podemos determinar un valor aproximado del número Phi (Φ), el cual, desde la antigüedad, ha cautivado a la humanidad y está presente en obras de arte y en diversas propiedades de la naturaleza. Una aproximación de Phi es

1,618033 9887498 9484820 4586834 3656381 1772030 9179805 7628621 3544862

y su notación radical es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Este número es también **irracional**.

A este número se le conoce como el **número divino** y se relaciona con la belleza presente en la naturaleza.

Expansión decimal finita

Se da cuando las cifras decimales de un número tienen fin, es decir, su período es cero. Ejemplos:

- (a) 1,25 (b) 23,7393 (c) - 6 (d) $\frac{-1}{5}$ (e) 76

Expansión decimal infinita periódica

Los números con expansión decimal infinita periódica son aquellos que tienen cifras decimales que se repiten infinitamente. Ejemplos:

- (a) 1,222... (b) 23,4777... (c) $2,\overline{7}$ (d) $-32,4\overline{21}$ (e) $\frac{2}{3}$

Los números racionales tienen expansión decimal finita o infinita periódica.

Expansión decimal infinita no periódica

Son aquellas expresiones en las que los decimales de un número son infinitos, pero sin repetirse un patrón, de ahí que sea no periódica. Ejemplos:

- (a) $\sqrt[3]{12} \approx 2,28942848.....$ (b) $\frac{2\pi}{3} \approx 2,094395102....$

Conocimiento: Relaciones de orden

Escenario de aprendizaje

¡Corra más!

Anacleto y Pancracia corren por deporte. Anacleto cruza la diagonal de un terreno rectangular que mide $15\sqrt{3}$ m, mientras que Pancracia recorre una pista circular de 9π m de circunferencia. ¿Quién corre más?

Ejemplos.

$$5e > 4\pi$$

$$-\sqrt{7} < -\Phi$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3} < \sqrt{\frac{8}{5}}$$

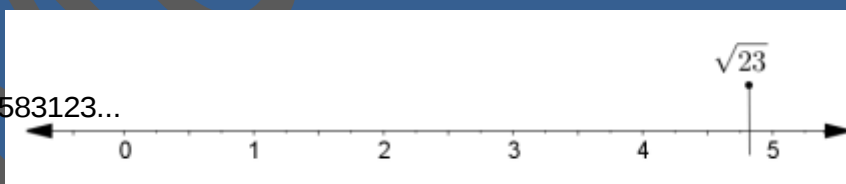
$$\frac{6e}{e} = \sqrt{36}$$

Representación en la recta numérica

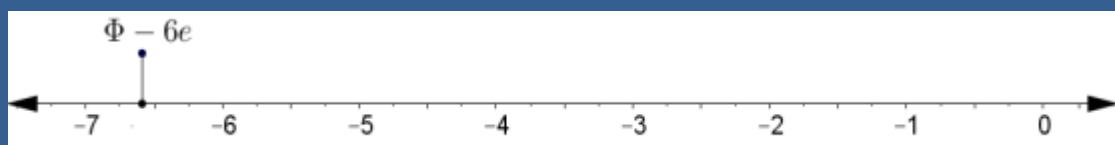
Existen números irracionales que pueden ser representados con exactitud en la recta numérica, con la ayuda de regla y compás, a pesar de que tienen expansión decimal infinita no periódica. Otros números como Pi y e son **trascendentales**, es decir, no pueden ser ubicados de manera exacta en la recta numérica. Aún así podemos hacer aproximaciones:

Ejemplos:

(a) $\sqrt{23} \approx 4,79583123\dots$

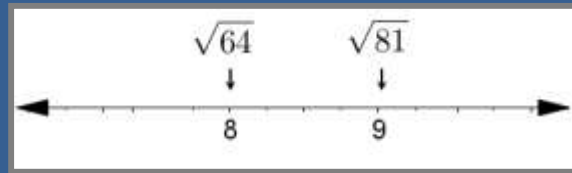


(b) $\Phi - 6e \approx -6,536811497\dots$



⚠ Si no se tiene una calculadora en el momento de hacer aproximaciones, se pueden usar algunos métodos sencillos para saber entre qué números se encuentra un número irracional que está expresado como un radical.

Por ejemplo, si queremos saber entre qué valores enteros se encuentra $\sqrt{74}$ buscamos las raíces enteras más próximas tanto a la derecha como izquierda:

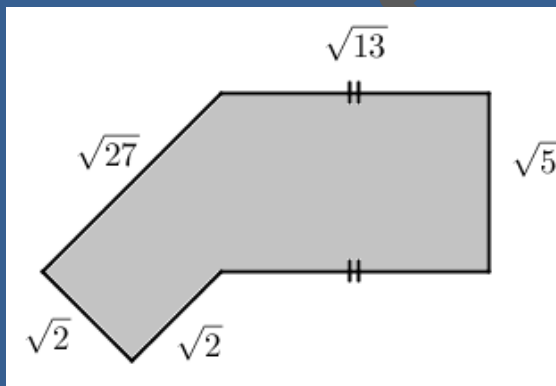


De este modo la $\sqrt{74}$ está entre los números enteros 8 y 9. Esto se expresa:
 $8 < \sqrt{74} < 9$

Operaciones con números irracionales

Los números irracionales son de gran utilidad en diversos campos del saber humano. Al ser valores con expansión decimal infinita no periódica, las operaciones en las que intervienen estos números conviene efectuarlas con ayuda de la calculadora. Analicemos los siguientes ejemplos:

1. Determine el perímetro de la siguiente figura

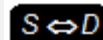


Para cada raíz cuadrada se usa el botón



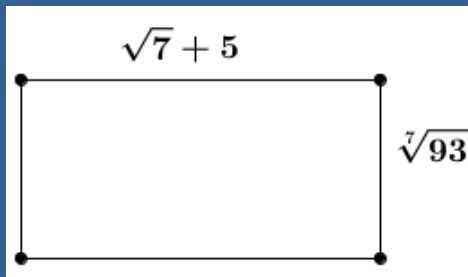
2. Hay dos pistas circulares, una de radio 8m y otra de radio 5m. Si el lunes Dionisio recorre una vez la pista más grande y el martes la otra, ¿cuántos metros de más recorrió el lunes respecto al martes?

En la calculadora, para obtener el valor aproximado en expansión decimal, se usa la tecla



Recuerde: $L_c = 2\pi \cdot r$

3. Determine el área del rectángulo adjunto.



Cuando se necesita obtener el resultado de un radical con índice diferente a dos, se presiona la tecla SHIFT y luego



Recuerde: $A_{\text{rectángulo}} = b \cdot h$

4. El área del piso de una habitación es rectangular y mide $\sqrt{405} \text{ m}^2$. Se desea colocar cerámica con cuadros de $\sqrt{0,09} \text{ m}^2$. ¿Cuántas piezas se necesitan?



Hora de practicar

Ejercicios 1 Números reales

1. A continuación se presentan diversas situaciones. Identifique si el número del resultado corresponde a un número racional o irracional.
 - (a) Lizandro viaja a su lugar de trabajo en bicicleta. Las llantas de su medio de transporte dan 700 vueltas al hacer el recorrido. El radio de la rueda de la bicicleta es de 0,6m. Para calcular la distancia recorrida se usa la fórmula: $\text{Distancia} = \text{vueltas} \cdot 2\pi r$. Por tanto Lizandro recorrió $700 \cdot 2\pi \cdot 0,6$ metros
 - (b) La cantidad de ciertas bacterias, que habrá luego de pasados “t” años, está dada por la fórmula $B = C \cdot e^t$. donde C es la cantidad inicial de bacterias. Si inicialmente hay 500 bacterias, entonces al cabo de dos años habrá $500 \cdot e^2$ bacterias.

- (c) Las diagonales de un rombo miden $\sqrt{12} \text{ cm}$ y $\sqrt{3} \text{ cm}$. Entonces su área está dada por $\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$
- (d) Toribio coloca en un banco ₡575 000 a un interés continuo, con una tasa de 0,14. Al cabo de 2 años, tendrá acumulados $575000 \cdot e^{0,14 \cdot 2}$ colones.
- (e) El volumen de una esfera está dado por la fórmula $V = \frac{4}{3} \pi r^3$. En Costa Rica existen unas esferas de piedra únicas en el mundo. El volumen de una de esas esferas, cuyo radio mide 0,8 metros es de $\frac{4}{3} \pi \cdot 0,8^3$
- (f) Al dividir la medida del largo de una tarjeta de débito entre la medida de su ancho, se obtiene como resultado $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
- (g) Si se pudiera poner en un “cajón” todos los números enteros positivos y se sacaran dos de ellos, la probabilidad de que estos sean primos entre sí está dada por $\frac{6}{\pi^2}$
- (h) El área de un cuadrado cuyo lado mide $\sqrt{\frac{2}{5}}$ metros es $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$

2. Lea el siguiente poema:

*“Soy, y seré a todos definible
mi nombre tengo que daros
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros”.*
(Autor: Manuel Golmayo)

Cuente las letras de cada palabra y construya el número que se va formando.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. Internacionalmente existe el “Día del número Pi”, el cual se celebra el 14 de marzo, ya que si se escribe esa fecha en notación estadounidense (mes/día) se obtiene 3/14. Para conmemorar esa fecha, en un colegio, a cada estudiante se le asignó un número, el cual correspondía a la cantidad de letras de su nombre multiplicadas por pi. ¿Qué número se le asignó a Remigio?

4. Clasifique cada una de las siguientes expresiones en racionales o irracionales, para ello marque con una equis la casilla correspondiente.

Expresión	Racional	Irracional	Expresión	Racional	Irracional
1,61			e^2		
6π			$4,\overline{67}$		
$4\sqrt{3}$			2,7134023		
3,14			$\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{2}}$		
$\frac{-\pi}{2\pi}$			$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$		
$4\Phi - 4\Phi$			2,333...		
$\frac{\pi - 1}{4}$			$\frac{-3}{7}$		
$7^{\frac{2}{5}}$			$-0,\overline{8}$		

5. Determine si las expansiones decimales de cada número son infinitas periódicas (IP), infinitas no periódicas (INP) o finitas (F).

Expresión	IP	INP	F	Expresión	IP	INP	F
-8,67392				$3\Phi + \Phi$			
$\frac{-7}{3}e$				$\sqrt{\frac{1}{81}}$			
$\frac{\sqrt{169}}{26}$				2			
$\pi - 1$				$\sqrt[3]{4}$			
$\frac{1}{252525...}$				π^3			
$7^{\frac{2}{5}}$				$-7,\overline{3}$			

6. Escriba $<$, $>$, $=$ según corresponda.

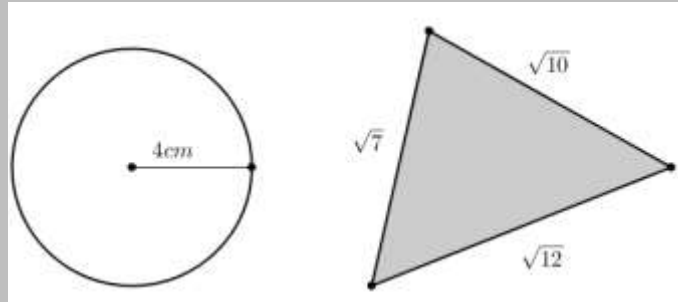
(a) $\sqrt[4]{30}$ _____ e (b) $\frac{-5\Phi}{2}$ _____ $-\sqrt{17}$ (c) $5\pi - \pi$ _____ $\frac{8\pi}{2}$

(d) $\frac{157}{50}$ _____ π (e) $-3\sqrt[5]{7}$ _____ -3Φ (f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ _____ $\frac{e}{4}$

7. Ordene los siguientes números en forma ascendente.

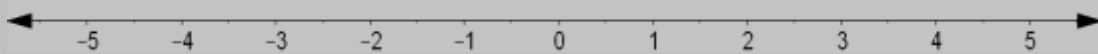
$$\sqrt[6]{25}, \quad \frac{\sqrt{24}}{2}, \quad -\frac{1}{4}\Phi, \quad -\sqrt{3}, \quad \frac{-\pi}{3}, \quad \frac{e}{2}, \quad \sqrt[3]{-7}$$

8. Indique cuál figura tiene mayor perímetro, justifique la respuesta

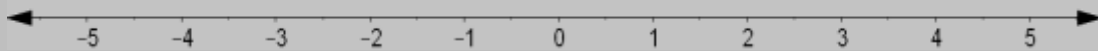


9. Ubique de modo aproximado, los siguientes números en la recta numérica

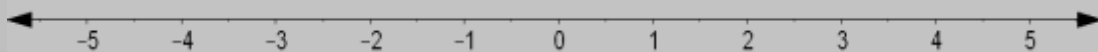
(a) $\sqrt{11}$



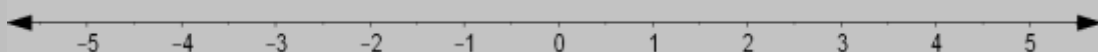
(b) $-\frac{3\pi}{2}$



(c) $-e+1$



(d) $\Phi + \frac{3}{2}$



10. Indique entre qué números enteros está cada valor irracional.

(a) $\underline{\hspace{1cm}} < \sqrt[5]{28} < \underline{\hspace{1cm}}$

(b) $\underline{\hspace{1cm}} < -5\pi < \underline{\hspace{1cm}}$

(c) $\underline{\hspace{1cm}} < \frac{-e}{4} < \underline{\hspace{1cm}}$

(d) $\underline{\hspace{1cm}} < -4\Phi < \underline{\hspace{1cm}}$

(e) $\underline{\hspace{1cm}} < \sqrt{\frac{7}{11}} < \underline{\hspace{1cm}}$

(f) $\underline{\hspace{1cm}} < \sqrt{23} < \underline{\hspace{1cm}}$

11. En La Biblia aparecen dos pasajes en los que se da una aproximación entera del número pi. Uno de esos pasajes dice:

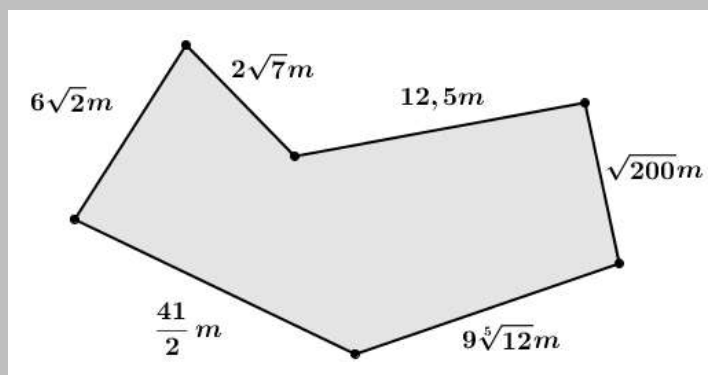
“Hizo fundir asimismo un mar de diez codos de un lado al otro, perfectamente redondo. Tenía cinco codos de altura y a su alrededor un cordón de treinta codos.” I Reyes 7,23-24

Según esa información, ¿qué valor de pi se usaba?

12. Determine el resultado aproximado de cada operación. [Use calculadora]

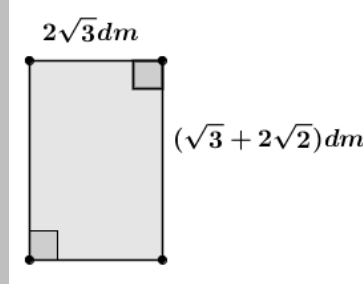
(a) $\sqrt{21} - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ (b) $\sqrt{5}(1 + \sqrt{5})$ (c) $\frac{4\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{14}}$ (d) $(\sqrt[5]{9} + 2)^2$
(e) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[4]{2}$ (f) $\frac{6 - \sqrt{3}}{2}$ (g) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}$ (h) $\sqrt[4]{2} \left[1 - (\sqrt{3} + 2) \right] - \sqrt{2}$

13. Se ha cementado un terreno y aún está fresca la mezcla. Por lo cual se coloca una cinta amarilla alrededor, para que nadie pase. El dibujo representa el plano del terreno ¿Cuántos metros de cinta se gastaron?

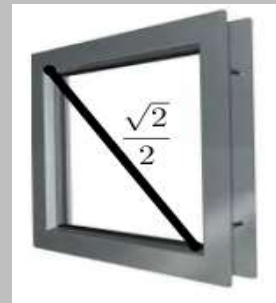


14. El área del piso de una habitación rectangular es de $20\sqrt{2}m^2$. Se desea colocar cerámica, con cuadros de $\sqrt{0,16}m^2$ ¿Cuántas piezas se necesitan?
15. Determine el área de un cuadrado, cuyo lado mide $5\sqrt{2}m$

16. Determine el área de la siguiente figura:



17. Un constructor necesita soldar una pieza que quede como diagonal de un marco cuadrado. Esa diagonal mide $\frac{\sqrt{2}}{2}m$, pero solo venden piezas de un metro de longitud. ¿Cuántos centímetros le sobran si compra un metro?



18. Se desea colocar una cinta alrededor de un anuncio que tiene forma circular. El diámetro del círculo es de 40cm. Determine la cantidad de cinta que se necesita. ¿Es un número racional o irracional?

19. Un joven desea invertir 150 000 colones en una cuenta, que paga con un interés compuesto continuo de $r = 0,12$. El tiempo que dejará el dinero en el banco es de 2 años. La fórmula para determinar el dinero que tendrá es: Dinero a recibir $= P e^{r \cdot t}$, donde P es el dinero invertido. ¿Cuánto dinero recibirá?

20. La arista de un cubo se determina con la siguiente fórmula: $\sqrt[3]{V}$, donde V es el volumen. Determine la arista del cubo, si el volumen es de:

- (a) 125cm^3
- (b) 16cm^3

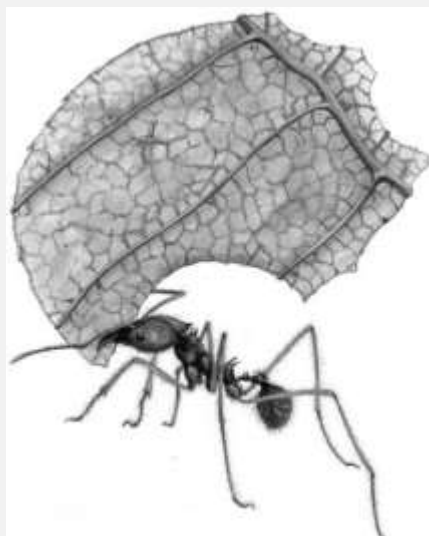
21. Se desea construir un marco cuadrado de madera cuyo lado mide $6\sqrt{2}$. Si solo venden piezas de madera con medidas enteras. ¿Cuántos metros debe comprar de madera, de modo que le sobre la menor cantidad?

Conocimiento: Cantidades muy grandes y muy pequeñas

Escenario de aprendizaje**¿Cuánto dijo que mide?**

Dos estudiantes de un colegio técnico están muy interesados por la informática. Su profesor les pide que investiguen cuál es el tamaño del componente de chip más pequeño del mundo (la medida del largo) y que a la vez indaguen cuál es el largo de una hormiga zompopa, de modo que puedan comparar los tamaños.

Al hacer una búsqueda por la Web, los estudiantes se dan cuenta de que el componente de chip más pequeño del mundo mide 125 000 nanómetros; mientras que la zompopa mide unos 50 000 micrómetros.



Estas medidas no le son familiares a los estudiantes, por lo que deciden investigar un poco más e incluso se retan a encontrar cuántas veces más grande es una medida con respecto a la otra.

¡Investiguemos con ellos!

Si pensamos en la distancia que hay entre dos planetas, o la cantidad de litros de agua que puede haber en el mar, estamos ante cantidades muy grandes, que si son dadas en la unidad básica de medida del S. I., tendríamos que escribir muchos ceros. Por ello, es conveniente el uso de múltiplos que nos permitan expresar más fácilmente esas cantidades.

De modo similar, si estamos trabajando con cantidades muy pequeñas, podemos utilizar los submúltiplos. En la actualidad, estas mediciones han tomado gran importancia, en especial, en el estudio de microorganismos y el avance de la nanotecnología.

Para trabajar con este escenario de aprendizaje, es necesario conocer dichos múltiplos y submúltiplos:

Valor en potencia	Factor	Símbolo	Nombre (Prefijo)
	MÚLTIPLOS		
10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000	Y	Yota
10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000	Z	Zetta
10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	E	Exa
10^{15}	1 000 000 000 000 000	P	Peta
10^{12}	1 000 000 000 000	T	Tera
10^9	1 000 000 000	G	Giga
10^6	1 000 000	M	Mega
10^3	1 000	K	Kilo
10^2	100	H	Hecto
10^1	10	Da	Deca
10^0	1: Unidad básica		
	SUBMÚLTIPLOS		
10^{-1}	0,1	d	deci
10^{-2}	0,01	c	centi
10^{-3}	0,001	m	mili
10^{-6}	0,000 001	μ	micro
10^{-9}	0, 000 000 001	n	nano
10^{-12}	0, 000 000 000 001	p	pico
10^{-15}	0, 000 000 000 000 001	f	femto
10^{-18}	0, 000 000 000 000 000 001	a	atto
10^{-21}	0, 000 000 000 000 000 000 001	z	zepto
10^{-24}	0, 000 000 000 000 000 000 000 001	y	yocto

Para poder hacer comparaciones, es más sencillo si se tiene ambas medidas en una misma unidad. Por ello vamos a hacer la conversión hacia la unidad básica.

Componente de chip: 125 000 nanómetros. Lo pasamos a metros.

$$125000 \cdot 10^{-9} = 0,000125$$

El chip mide 0,000125 metros

La zompopa: 50 000 micrómetros.

$$50000 \cdot 10^{-6} = 0,05$$

La zompopa mide 0,05 metros.

Se concluye que es más pequeño el chip que la zompopa.

Ahora bien, para determinar cuántas veces más grande es la zompopa que el componente de chip, basta con dividir la longitud de la zompopa por la longitud del chip:

$$\frac{0,05}{0,000125} = 400$$

Aunque parezca increíble, la zompopa es 400 veces más grande en longitud que el componente de chip más pequeño del mundo.

Ejemplos:

Aunque el océano pierde millones de litros de agua por evaporación, mientras que recibe otros millones a través de la lluvia y los ríos, los científicos han estimado que el océano tiene unos 1 370 Exalitros. ¿A cuántos gigalitros equivale?

Una conversión como esta se puede hacer de varias formas, una de ellas es pasar primero los Exalitros a litros. Luego esa cantidad de litros se pasa a Gigalitros.

$$1\,370\,E\ell \cdot \frac{10^{18}\ell}{1\,E\ell} \cdot \frac{1\,G\ell}{10^9\ell}$$

Al resolver las operaciones y cancelar las unidades respectivas se obtiene:

$$1\,370\cancel{E\ell} \cdot \frac{10^{18}\cancel{\ell}}{1\cancel{E\ell}} \cdot \frac{1\,G\ell}{10^9\cancel{\ell}} = 1,37 \times 10^{12}G\ell$$

Esto equivale a 1 370 000 000 000 gigalitros.



Hora de practicar

Ejercicios 2

Sistema Internacional de Medidas

1. La masa de la Tierra es de aproximadamente 6000 yottagramos. La Luna tiene una masa de 73 500 zetagramos. ¿Cuántos satélites naturales del tamaño de la Luna, caben en la Tierra?
2. La masa de un virus es de 0,1 attogramos y la de un grano de arena de 350 nanogramos ¿Cuántas veces es más grande la masa de la arena con respecto al virus?
3. El diámetro del Sol es de 1,39 Gm mientras que el de la Tierra es de 12,75 Mm ¿Cuánto más grande es el diámetro del Sol con respecto al de la Tierra?
4. La distancia más grande que ha recorrido un automóvil (un Volvo de 1966) ha sido de 4,2 Gm. La distancia de la Tierra a la Luna es de 384, 4 Mm. ¿Cuántas veces aproximadamente pudo ir a la Luna ese automóvil?
5. La anchura de un cabello humano es de 0,1 nanómetros, mientras que el diámetro de un glóbulo rojo es de 7 micrómetros. ¿Cuál tiene mayor longitud?
6. La longitud de la Gran Muralla China es de 6,4 megámetros ¿Cuántos metros más grande es esa Muralla respecto al diámetro de la Luna, si este mide 0,00348 gigámetros?
7. Resuelva las siguientes conversiones

(a) 2345 Mm _____ Gm	(b) 53 456 Tg _____ Eg
(c) 2 Ym _____ Zm	(d) 0,023 Pg _____ Gg
(e) 98 763 zg _____ ag	(f) 0,0027 μ g _____ pg
(c) 3 423 234 fm _____ nm	(d) 182 092 092 μ m _____ Mm

Curiosidades

8. Se estima que la cantidad de sangre que hay en todos los seres humanos es de aproximadamente 30 gicalitros, para almacenarla, se ocuparía un cubo de 310 metros de arista. Realmente no parece mucho. ¿A cuántos litros equivale toda esa sangre?
9. Si todas las células sanguíneas del cuerpo de un humano promedio fueran extendidas lado a lado, el largo total podría rodear la circunferencia de la Tierra dos veces, una distancia de cerca de 100 Megámetros. ¿A cuántos kilómetros equivale?

Autoevaluación de la unidad

I Parte. Selección Única. Marque con un punto pequeño (•) la única opción que completa correctamente el enunciado.

1. El resultado irracional de dividir la longitud de cualquier circunferencia entre la medida de su diámetro es

(A) 3,14

$$(B) \pi$$

(C) e

(D) Φ

2. El área de un cuadrado está dada por ℓ^2 . Si un cuadrado tiene un área de 7cm^2 , entonces la longitud de su lado, la representa el número irracional

(A) 49 cm

(B) 2,45 cm

(C) $\sqrt{7}$ cm

(D) 1,75cm

- ### 3. Un número racional corresponde a

(A) $\sqrt[3]{4}$

(B) $7e - 7e$

(C) 6π

(D) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

4. Un número irracional corresponde a

(A) $\sqrt{5}$

(B) $0,272727\ldots$

(C) $\sqrt{16}$

(D) $\frac{5}{2}$

- 5.** Un número racional corresponde a

$$(A) \frac{-8\Phi}{\Phi}$$

(B) $3 - e$

(C) $4\sqrt[7]{21}$

(D) $\pi + 5\pi$

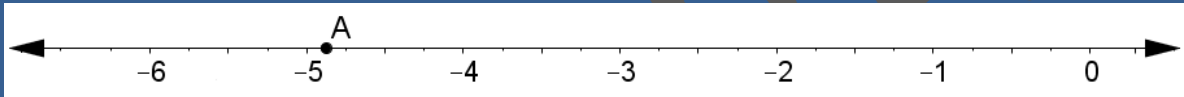
6. ¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

- (A) $2,5 \in \mathbb{Q}$ (B) $3,1415 \in \mathbb{I}$
 (C) $5\sqrt{3} \notin \mathbb{I}$ (D) $0 \notin \mathbb{Q}$

7. Un número irracional corresponde a

- (A) $\sqrt{\frac{1}{81}}$ (B) $\frac{\pi}{2\pi}$
 (C) $\frac{3\Phi}{2}$ (D) 2,98401

8. Considere la siguiente recta numérica



Un posible valor irracional que puede ubicarse en la posición A es

- (A) -2π (B) -3Φ
 (C) $-\sqrt{5}$ (D) $-\sqrt{26}$

9. La cantidad de bacterias que habrá luego de pasados t años, está dada por la fórmula $B = C \cdot e^t$, donde C es la cantidad inicial de bacterias. Si inicialmente había 1220 bacterias, ¿aproximadamente, cuántas habrá al haber pasado cinco años?

- (A) 181 064 (B) 3 316
 (C) 6 100 (D) 120 875

10. Según la pintura del hombre de Vitruvio, el cociente entre la altura de un ser humano y la distancia de los pies hasta su ombligo, es aproximadamente Φ . Este valor irracional equivale a

- (A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (B) 2,71
 (C) 3,14 (D) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

11. El ave más pequeña del mundo habita en Cuba y construye un nido de tan solo 30 000 micrómetros de longitud. ¿De cuántos metros construye esa ave su nido?

- (A) 0,3 (B) 0,003
(C) 0,03 (D) 0,0003

12. La masa de Marte es de 639 zettagramos. ¿A cuántos yotagramos equivale la masa de ese planeta?

- (A) 0,639 (B) 639×10^{24}
(C) 639×10^{21} (D) 0,000639

II Parte. Respuesta Corta. Conteste correctamente lo que se le solicita y dé su respuesta en los espacios en blanco correspondientes.

A) Escriba en los espacios en blanco los símbolos $<$, $>$ o $=$ según corresponda.

$$\Phi + 1 \quad \pi - 1$$

$$-\sqrt[4]{35} \quad -e$$

$$\frac{e}{3e} \quad \frac{2}{6}$$

$$-1,61 \quad -\Phi$$

B) Determine si las expansiones decimales de cada número son infinitas periódicas, infinitas no periódicas o finitas y marque con una X en la casilla que corresponda.

Expresión	Finita	Infinita periódica	Infinita No periódica
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{\sqrt{25}}{2}$			
2,767676...			
$7^{\frac{2}{5}}$			
1,2525			

D) Escriba en el espacio correspondiente el resultado aproximado de cada operación (use dos decimales en la respuesta)

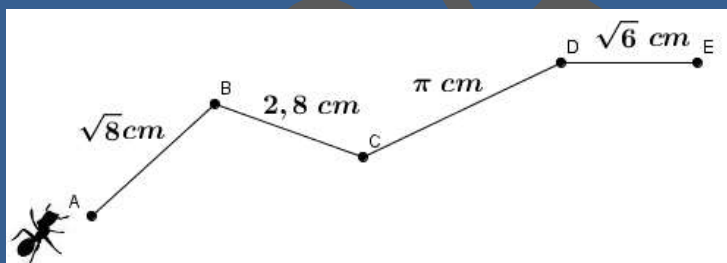
(1) $\sqrt[5]{3}[1-(\pi+2)]$ _____

(2) $\sqrt{21}-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ _____

(3) $(2e+2)^2$ _____

III Parte. Desarrollo. Trabaje en forma clara y ordenada. Resuelva cada problema.

1. Una hormiga hace el recorrido que se ilustra en la figura, desde el punto A hasta el E. Para llegar a su hormiguero debe recorrer 13cm. ¿Cuántos centímetros le faltarán por recorrer cuando haya llegado al punto E?



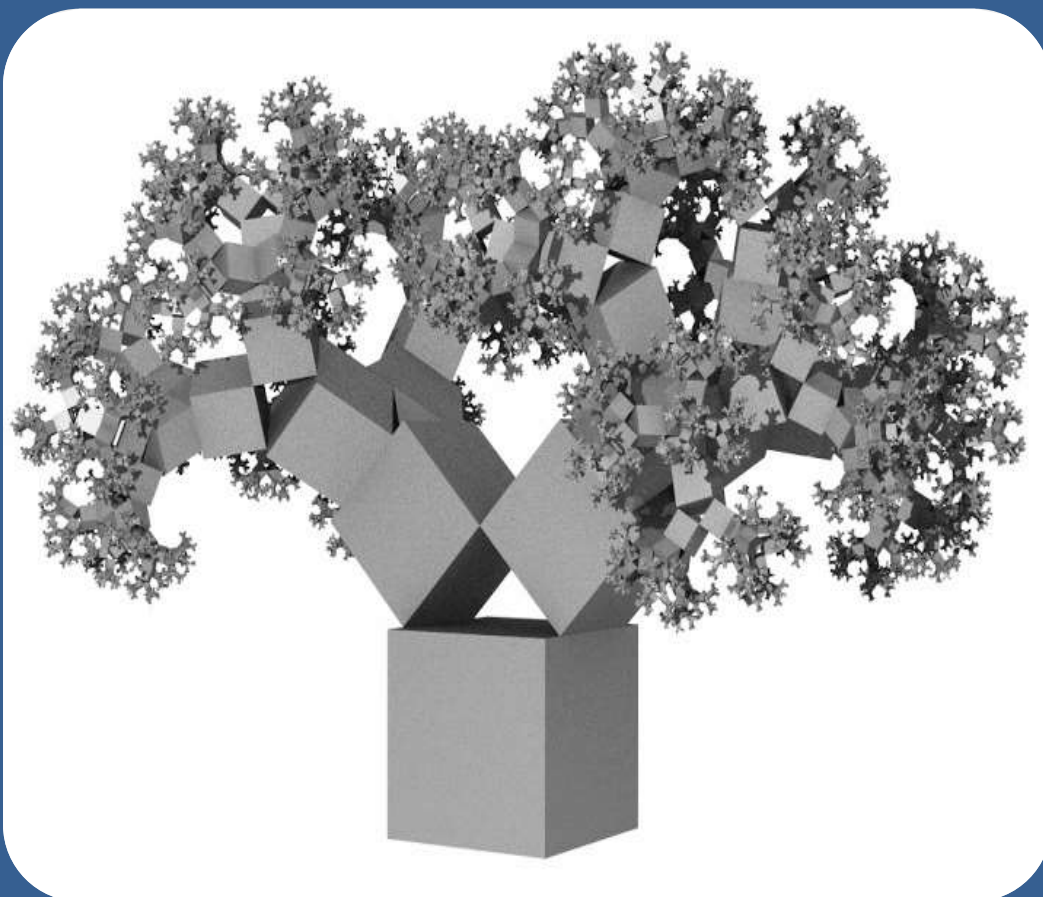
2. En un colegio hay 4 aulas a las que se les debe colocar cerámica. Cada aula tiene un área de $15\sqrt{2}m^2$. Los cuadros de cerámica tienen un área de $\sqrt{0,25}m^2$. ¿Cuántas piezas de cerámica se necesitan como mínimo para las cuatro aulas?

3. Clemente y Adelaida corren por deporte. Clemente cruza tres veces la diagonal de un terreno rectangular, dicha diagonal mide $15\sqrt{3}$ m, mientras que Adelaida recorre dos veces una pista circular de 9π m de circunferencia. ¿Cuántos metros más recorre Clemente respecto a Adelaida?

4. Cirilo necesita hacer un respaldo de su disco duro, donde tiene almacenados 20 Gb de información. Para ello, comprará discos compactos de 700 Mb. ¿Cuántos discos compactos como mínimo necesita comprar?

5. El insecto más pequeño del mundo, es una avispa llamada *Dicopomorpha echmepterygis*, la cual mide 140 000 nanómetros. Una pulga por su parte, mide 1500 micrómetros. ¿Cuántas de esas avispas hacen el tamaño de una pulga?

GEOMETRÍA



Habilidades específicas.

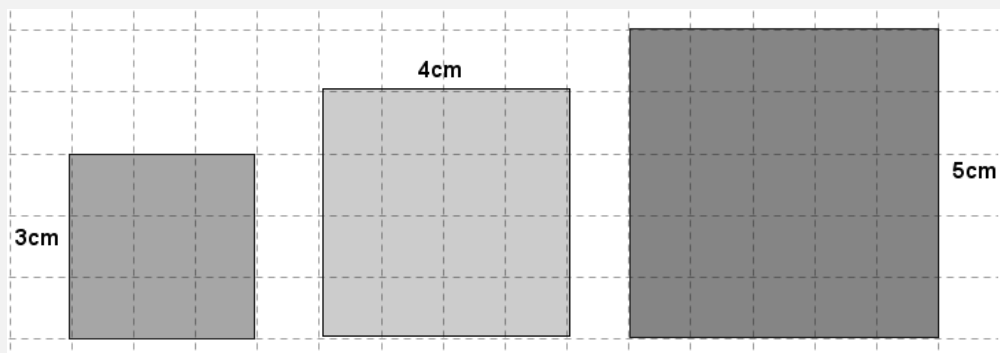
1. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas de diferentes contextos.
2. Encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, aplicando el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

Escenario de aprendizaje

Experimentemos

1. Construya y recorte tres cuadrados, cuyos lados midan 3cm, 5cm y 4cm respectivamente (Puede ayudarse con hojas cuadriculadas).



2. Una cada dos cuadrados por uno de sus vértices, de modo que entre los tres formen un triángulo.
3. Según la medida de sus ángulos, ¿cómo se clasifica el triángulo resultante? (use transportador)
4. Determine el área de cada cuadrado.
5. Analice qué relación existe entre esas áreas

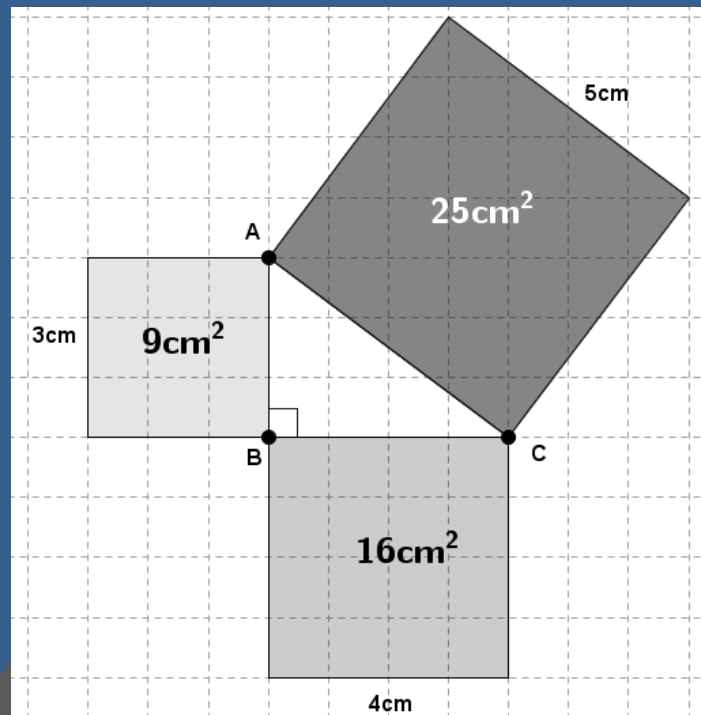
Al acomodar los cuadrados según se solicita, podemos observar que se forma un triángulo rectángulo, recto en B, de medidas 3cm, 4cm y 5cm.

Además, se logra apreciar que si se suman las áreas de los dos cuadrados más pequeños, se obtiene la medida del área del cuadrado mayor. Esto es:

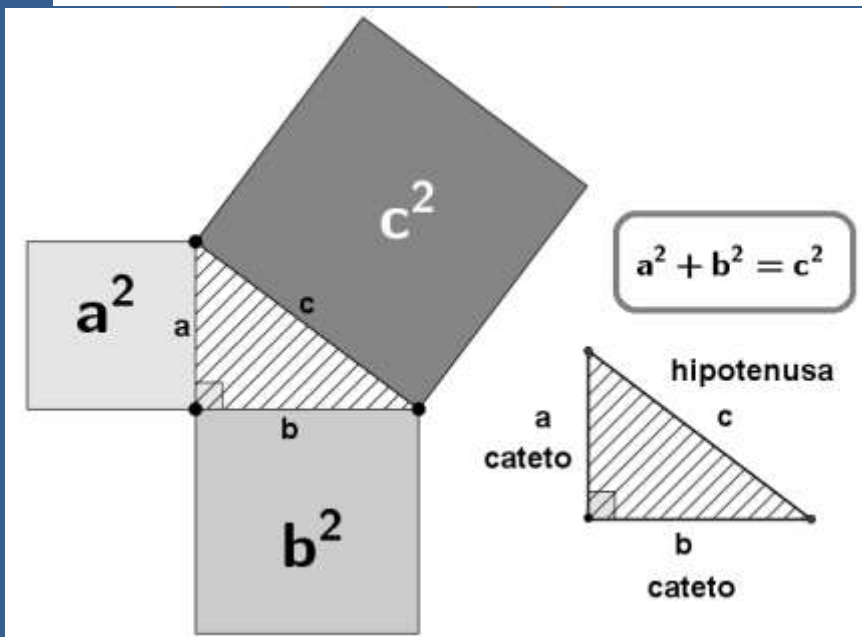
$$9 + 16 = 25$$

Lo cual también se puede expresar como:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



A la generalización de este resultado se le conoce como Teorema de Pitágoras, en honor a la escuela pitagórica, a la cual se le atribuye su descubrimiento. Sin embargo, hay evidencias de que civilizaciones como la china, ya usaban este resultado.



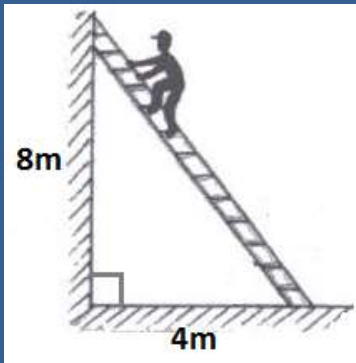
En síntesis, el teorema indica que:

En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

Este teorema es muy útil cuando en triángulos rectángulos conocemos la medida de dos de sus lados y necesitamos calcular la faltante.

Ejemplos

1. Zósimo necesita limpiar una ventana de un edificio, que está a 8m de altura. Para ello coloca una escalera a 4m de la base de la pared. ¿Cuánto mide la escalera?



En este caso, tenemos como datos las medidas de los catetos del triángulo rectángulo y necesitamos determinar el valor de la hipotenusa, para lo cual resolvemos:

$$8^2 + 4^2 = e^2 \quad e: \text{ medida de la escalera}$$

$$64 + 16 = e^2$$

$$80 = e^2$$

$$\sqrt{80} = e$$

$$8,94 \approx e$$

Por tanto, la escalera mide aproximadamente 8,94 metros.

2. Una cancha de fútbol (rectangular) mide 125 metros de largo. Si la longitud de una diagonal es de 150 metros. ¿Cuál es el perímetro de dicha cancha?

Para determinar el perímetro, primero se debe conocer la medida del ancho de la cancha, para ello, vamos a usar nuevamente el Teorema de Pitágoras.

$$125^2 + a^2 = 150^2, \quad a: \text{ medida del ancho}$$

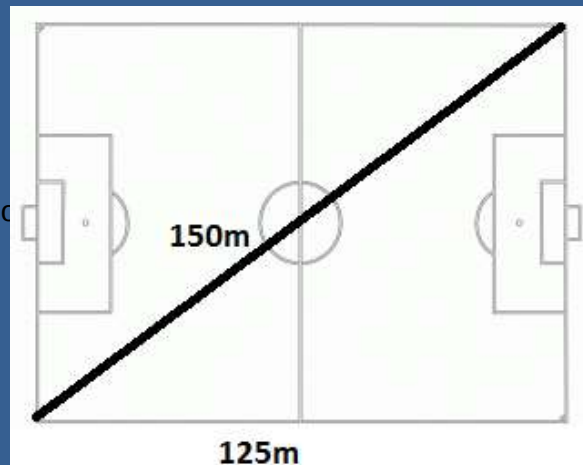
$$15\,625 + a^2 = 22\,500$$

$$a^2 = 22\,500 - 15\,625$$

$$a^2 = 6\,875$$

$$a = \sqrt{6\,875}$$

$$a \approx 82,91$$



De este modo, el perímetro de la cancha es: $82,91 + 82,91 + 125 + 125 = 415,82\text{m}$.

Distancia entre puntos

Escenario de aprendizaje

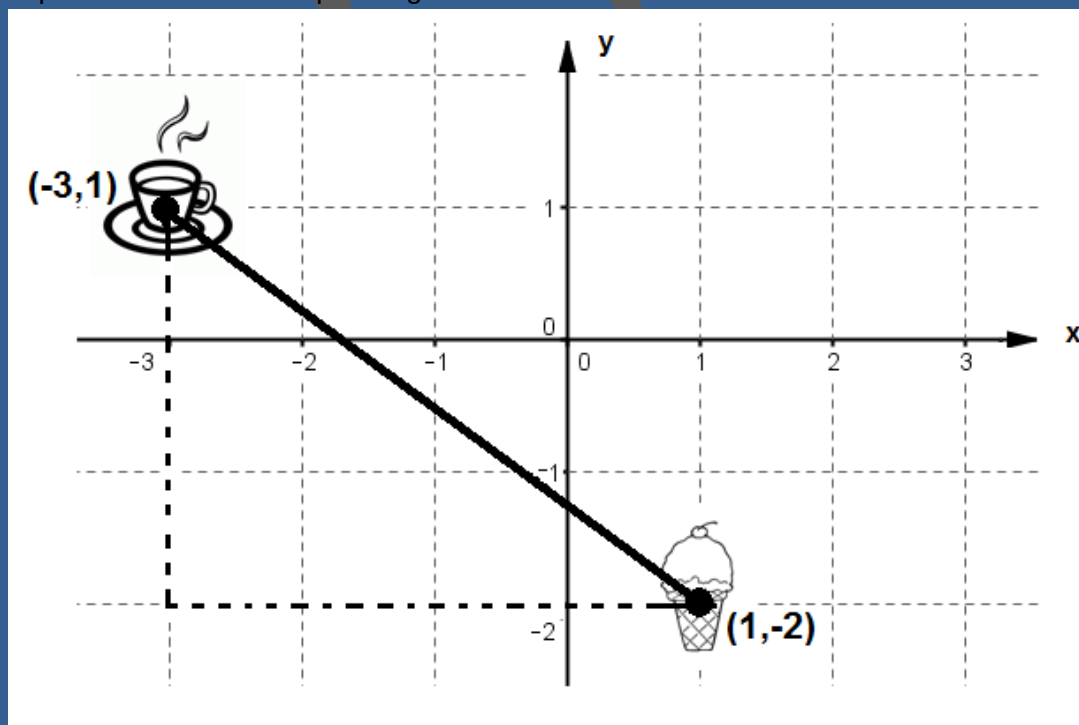
Por un helado y un café

Zósimo y Capistrano salen del parque de Mercedes Norte, cuya coordenada se ubica en el punto $(0,0)$.

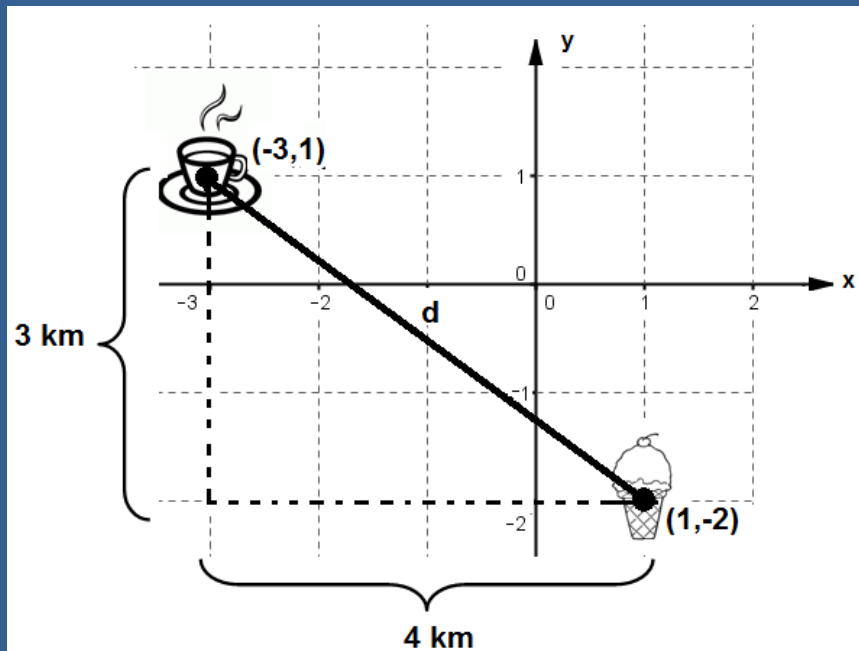
Zósimo se dirige a una heladería, para lo cual recorre 2 km al sur y 1 km al este; mientras que Capistrano va a una cafetería, ubicada 1 km al norte y 3 km al oeste de dicho parque. ¿A qué distancia se encuentra esa heladería respecto a la cafetería?

Para ubicarnos posicionalmente en una ciudad, es de gran ayuda establecer un plano cartesiano, que permita establecer mediante pares ordenados, dónde se encuentra determinado lugar.

El problema anterior se puede graficar así:



Al formarse un triángulo rectángulo, se puede aplicar el teorema de Pitágoras para determinar la distancia que hay entre los puntos $(-3, 1)$ y $(1, -2)$.



$$\begin{aligned}
 4^2 + 3^2 &= d^2 \\
 16 + 9 &= d^2 \\
 25 &= d^2 \\
 \sqrt{25} &= d \\
 5 &= d
 \end{aligned}$$

Se concluye que la distancia en línea recta, entre la cafetería y la heladería es de 5 km

Usando un procedimiento más directo, lo que se realizó para determinar esta distancia fue el siguiente cálculo:

$$\sqrt{(1 - -3)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

En resumen:

Sean M (x_1, y_1) N (x_2, y_2) dos puntos del plano cartesiano. La distancia entre

M y N está dada por la fórmula $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Ejemplo

Determine la distancia entre los puntos $\left(-\frac{2}{3}, 3\right)$ $\left(-3, \frac{1}{3}\right)$

$$d = \sqrt{\left(-3 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{113}{9}} \approx 3,54$$



Hora de practicar

Ejercicios 3 Teorema de Pitágoras

1. En cada caso, se dan las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo. Halle la longitud de la hipotenusa.

- (a) 3cm y 7m (b) 5cm y 5cm (c) $\sqrt{3}$ m y 1m (d) $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$
 (e) 12 y 5 (f) $\frac{1}{2}$ cm y 1,5 cm (g) 6dm, 8dm (h) 1m, 1m

2. En cada ejercicio se dan las longitudes de un cateto y de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Halle la longitud del cateto faltante.

- (a) 3cm y 5m (b) 6cm y 10cm (c) 2m y 4m (d) $5\sqrt{3}$, 10
 (e) 1 y 2 (f) $\frac{7}{2}$ cm y 15 cm (g) 9dm, 2dm (h) 0,5m, 0,3m

3. Determine el valor de "x" en cada caso

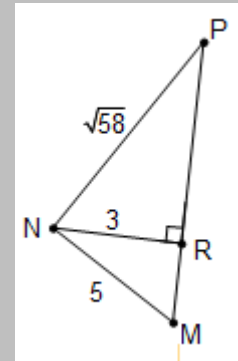
(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)
(g)	(h)	(i)

4. Efectúe cada uno de los problemas que se le plantean.

- a) El perímetro de un rombo es 40cm, y una de las diagonales mide 5cm. Halle la medida de la otra diagonal y del área de dicho rombo.
- b) Las dimensiones de un rectángulo son 6 cm y 8cm. Halle la medida de la diagonal de ese rectángulo.
- c) La parte más alta de una escalera apoyada en una pared vertical, alcanza en esta una altura de 3m, si el pie de la escalera queda sobre el piso a 1,2 m de la pared, entonces ¿cuál es la longitud aproximada de la escalera?
- d) Las medidas de las bases de un trapecio isósceles son 30m y 20m. Si la medida de uno de los lados no paralelos es 10m; entonces ¿cuál es la medida de su altura?

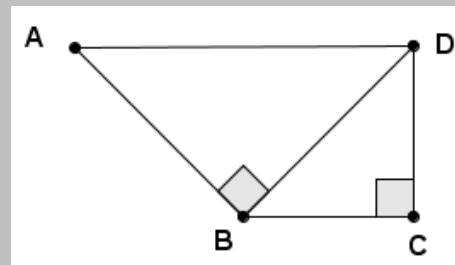
5. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, halle el área del $\triangle MNP$

M – R – P



6. De acuerdo con los datos de la figura, donde $DC = BC = \sqrt{2}$, y $AB = BD$, entonces el valor de AD corresponde a

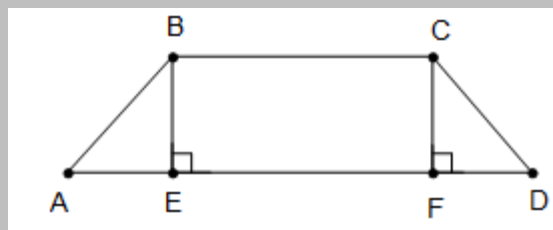
- (A) $2\sqrt{2}$
 (B) 2
 (C) $\sqrt{2}$
 (D) 8



7. El perímetro de un rombo es 20, y una de las diagonales mide 2, entonces el área de dicho rombo corresponde a
- (A) $4\sqrt{6}$
 (B) $8\sqrt{6}$
 (C) $2\sqrt{99}$
 (D) $4\sqrt{99}$

8. El cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles, donde $BC = 10$, $AD = 32$, $CF = 6$. Entonces la medida de $\overline{AB}$ corresponde a

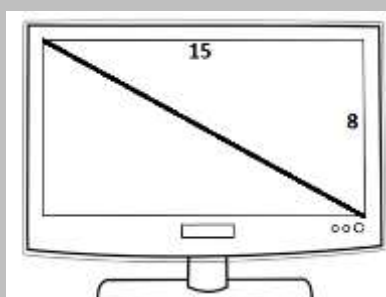
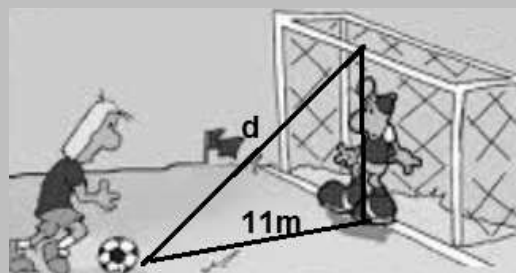
- (A) $2\sqrt{265}$
(B) $\sqrt{85}$
(C) $\sqrt{157}$
(D) $2\sqrt{247}$



9. Si la medida de una diagonal de un cuadrado es $5\sqrt{2}$, entonces el perímetro de dicho cuadrado es

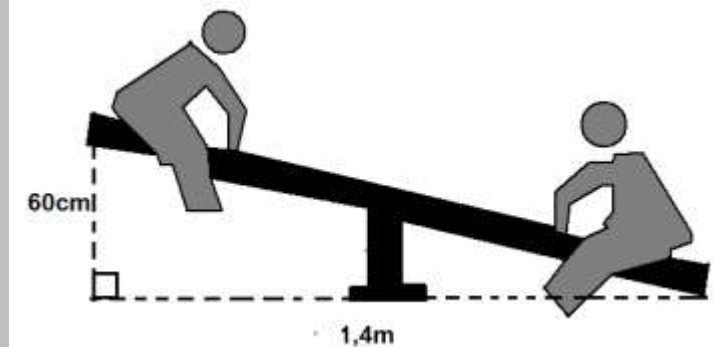
- (A) 10
(B) 20
(C) 25
(D) 5

10. En un lanzamiento de penal (a 11 metros de la portería) un jugador pateó el balón hacia arriba en busca del centro del marco y pega en el poste horizontal (a 2,2 metros de altura) ¿Cuánta distancia recorrió el balón?

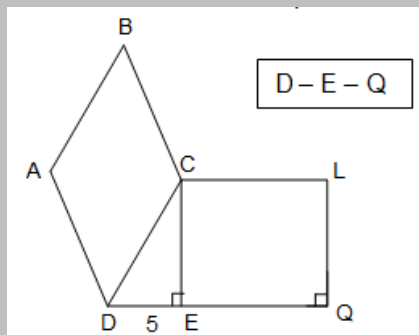
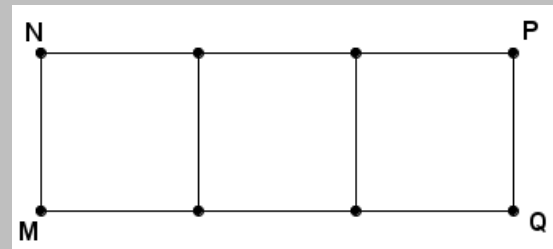


11. Las pulgadas de un televisor corresponden a la medida de la diagonal de la pantalla. ¿De cuántas pulgadas es un televisor, si el largo de la pantalla es de 8 pulgadas y el ancho de 15 pulgadas?

12. Según la información del dibujo, cuál es la longitud aproximada de la pieza del sube y baja



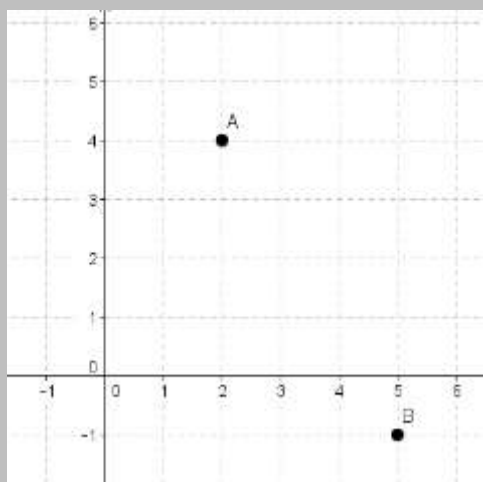
13. El rectángulo MNPQ está formado por 3 cuadrados congruentes entre sí. Si la longitud de cada lado del cuadrado mide 12cm, determine la longitud de la diagonal del rectángulo MNPQ.



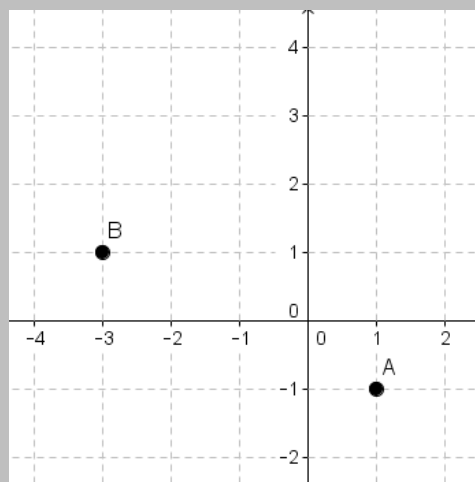
14. De acuerdo con los datos de la figura, si el cuadrilátero ABCD es un rombo cuyas diagonales miden 12 y 16, determine la medida de $\overline{LQ}$

15. Usando las cuadrículas proporcionadas, determine la distancia entre los puntos A y B en cada caso.

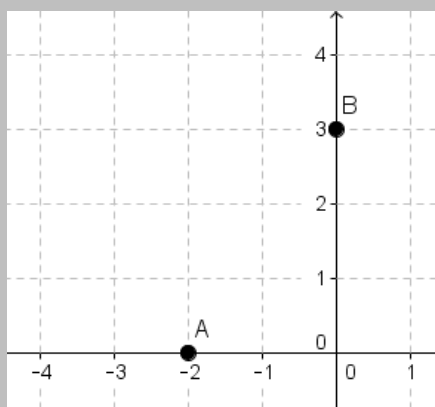
(a)



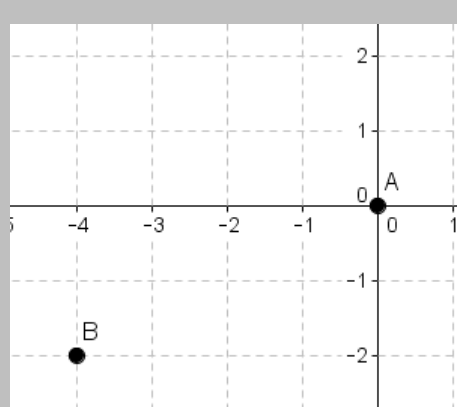
(b)



(c)



(d)



16. Determine la distancia entre los puntos dados:

(a) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)(3, -3)$

(b) $(\sqrt{3}, 0)(2\sqrt{3}, -1)$

(c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right)$

(d) $(-1, 6)(-2, 3)$

(e) $(-2, 5), (6, -7)$

(f) $\left(-\frac{6}{7}, 1\right), \left(\frac{1}{7}, 1\right)$

(g) $(2\sqrt{7}, -1), (5\sqrt{7}, 1)$

(h) $\left(\sqrt{6}, \frac{-1}{11}\right), \left(7\sqrt{6}, \frac{-1}{11}\right)$

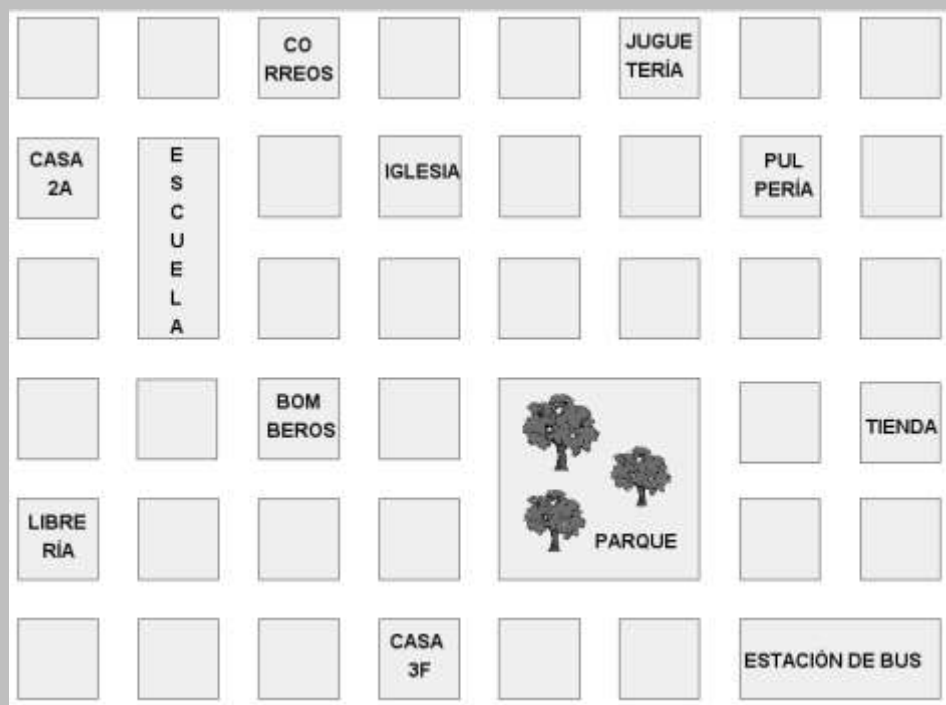
17. Dadas las coordenadas de los vértices de cada triángulo ABC, clasifíquelos según sea, en isósceles, escaleno o equilátero.

(a) $A(-3, 0), B(0, 3\sqrt{3}), C(3, 0)$

(b) $A(2, -1), B\left(\frac{9}{2}, 4\right), C(7, -1)$

(c) $A(1, 2), B(2, -2), C(-3, 1)$

18. Considere el croquis de una ciudad y conteste lo que se le solicita.



Suponga que entre cada cuadra hay 100 metros, Despreciando la medida del ancho de las calles determine la distancia entre:

- (a) La librería y la estación de bomberos
 - (b) La casa 2A y la tienda
 - (c) La juguetería y la pulpería
 - (d) La Iglesia y la tienda
 - (e) La casa 3F y la pulpería
 - (f) La tienda y los correos.
19. Lodovico y Dionisio hacen una carrera. Deben llegar a un parque que se ubica a 5 km norte y 6 oeste del lugar de salida (punto (0,0)). Cada uno escoge su ruta para llegar, pero se cansan y se detienen antes de llegar. Lodovico corre 5 km al oeste y 3km al norte; mientras que Dionisio corre 4 km al norte y 4km al oeste.
- (a) ¿A qué distancia quedó Lodovico del parque?
 - (b) ¿A qué distancia quedó Dionisio del parque?
 - (c) ¿Quién llegó más cerca del parque?
 - (d) ¿A qué distancia quedó Lodovico de Dionisio?

Trigonometría

Desde hace unos 4000 años, el ser humano ha estudiado diversas propiedades de los triángulos. Por ejemplo, existen tablillas en arcilla que demuestran cálculos realizados por los babilonios, donde destacan estudios con triángulos rectángulos.

Ese estudio de los triángulos, es lo que hoy conocemos con el nombre de trigonometría. Esta palabra proviene del griego $\tauριγωνο$ (trigōno) que significa triángulo y $μετρον$ (metron), que se traduce como medida. Es decir, la trigonometría se concibe como la medida de los triángulos.



Los egipcios también desarrollaron conocimientos trigonométricos, tales como el cálculo de la medida de los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas (que estudiaremos en este apartado), para efectuar medidas en agricultura y construir pirámides.

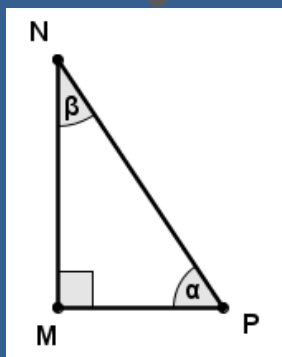


La astronomía fue una disciplina que promovió el desarrollo de la trigonometría, de la cual recibió la ayuda necesaria para la predicción de las rutas, posiciones de los cuerpos celestes, mejorar la exactitud en la navegación y hacer cálculos del tiempo y calendarios.

La trigonometría es esencial en disciplinas como la Arquitectura, Cartografía, Topografía, Física, Ingeniería Civil, Electrónica y muchas otras áreas del saber.

x Triángulo Rectángulo.

Considere el $\triangle MNP$, recto en M



$\overline{MN}$ es el cateto opuesto a α

$\overline{MP}$ es el cateto adyacente a α

$\overline{MN}$ es el cateto adyacente a β

$\overline{MP}$ es el cateto opuesto a β

$\overline{NP}$ es la hipotenusa (está opuesta al ángulo recto)

Habilidades específicas.

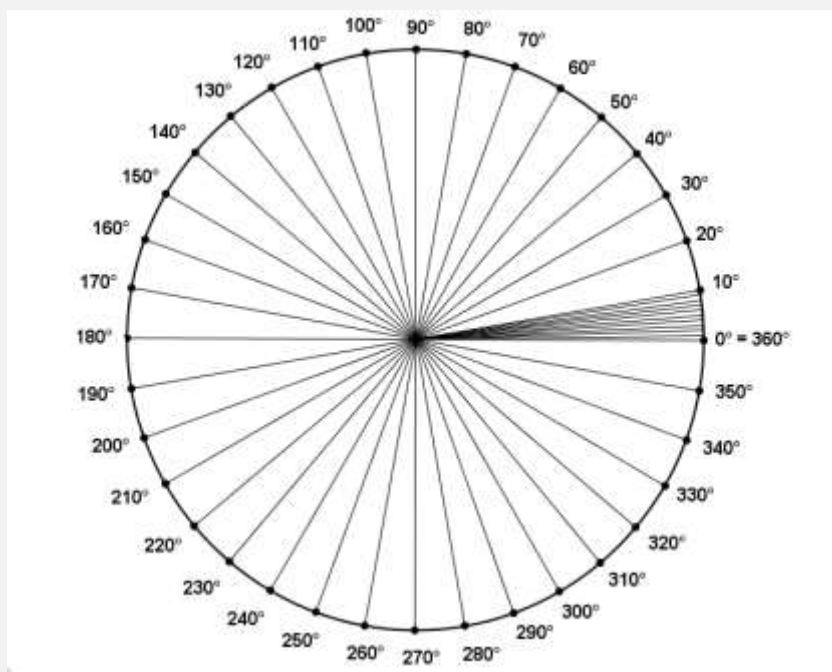
3. Convertir medidas angulares de grados a radianes y viceversa.

Ángulos en grados y radianes

Escenario de aprendizaje

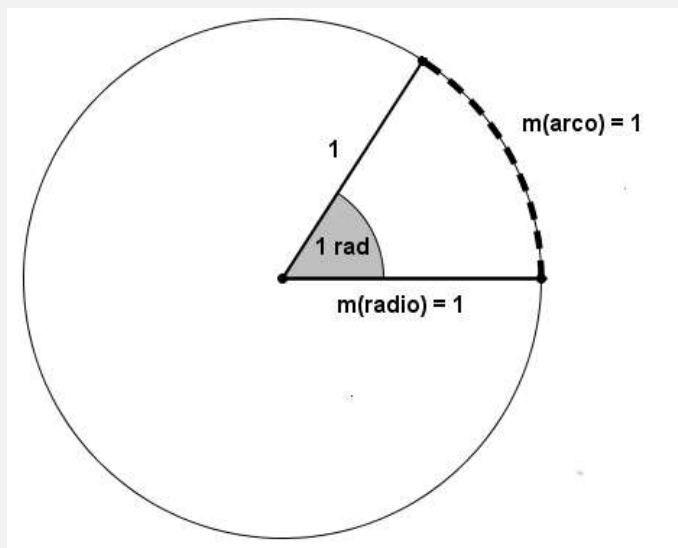
Dos sistemas para medir ángulos.

Grados: En temas anteriores de geometría, se ha usado el sistema sexagesimal para referirnos a la medida de un ángulo, el cual está ligado a una circunferencia; ya que es el resultado de dividir esta en 360 partes. Cada una de las partes divididas recibe el nombre de grado (1°). Por tanto, una circunferencia completa mide 360° , independientemente del tamaño de su radio.



Radianes: Otra unidad de medida de ángulos es el radián, simbolizado **rad**.

Un radián es la medida del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco cuya longitud es igual a la del radio.



¿Cómo establecer una relación entre esas dos unidades de medida angular?

En diversas ocasiones, necesitamos convertir una medida angular que está en grados a radianes o viceversa. Por eso, es necesario establecer una relación entre ambas.

Sabemos que la longitud de una circunferencia está dada por $2 \cdot \pi \cdot r$, por lo cual, si deseamos conocer cuántos radianes contiene una circunferencia, basta con realizar $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r}$, ya que el radio y el arco miden igual.

Al simplificar la expresión, se obtiene que en una circunferencia hay 2π rad, que equivalen a los 360° en el sistema sexagesimal.

Con esto se establece la siguiente relación:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Y si dividimos la igualdad por dos, nos queda una equivalencia que permitirá hacer conversiones entre ambas medidas:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

De esta equivalencia se desprende que:

$$1\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \qquad 1\text{ grado} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

En síntesis:

✚ Para convertir de grados a radianes, la medida se multiplica por $\frac{\pi}{180^\circ}$

✚ Para convertir de radianes a grados, la medida se multiplica por $\frac{180^\circ}{\pi}$

Ejemplos

1. Si un ángulo mide 60° , ¿cuál es su medida en radianes?

Al aplicar la relación anterior, se tiene que $60^\circ = \cancel{60^\circ} \cdot \frac{\pi}{\cancel{180^\circ}} \text{ rad} = \frac{1}{3} \text{ rad}$

La medida del ángulo de 60° , en radianes es de $\frac{1}{3} \pi \text{ rad}$.

2. Si un ángulo mide $\frac{11}{5} \pi$, ¿cuál es su medida en grados?

Se tiene que $\frac{11}{5} \pi \text{ rad} = \frac{11}{5} \cancel{\pi} \cdot \frac{180^\circ}{\cancel{\pi}} = 396^\circ$

La medida del ángulo de $\frac{11}{5} \pi$, en grados es 396°

Habilidades específicas.

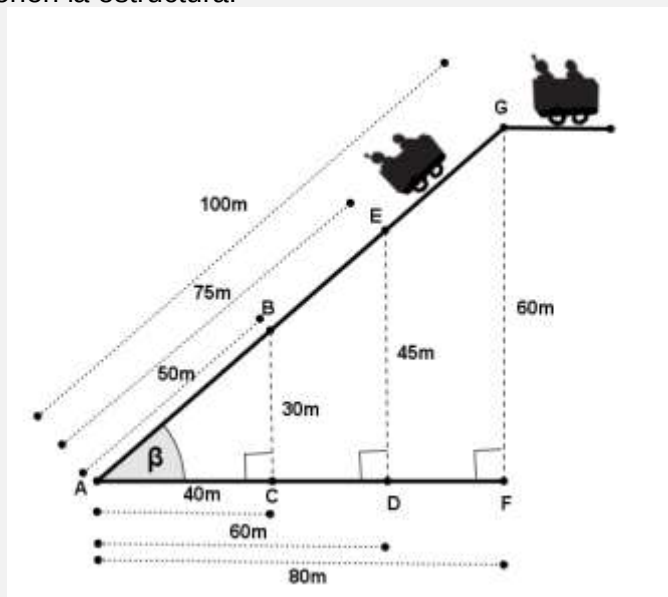
4. Aplicar las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) en diversos contextos.
5. Aplicar seno, coseno y tangente de ángulos complementarios.
6. Aplicar los conceptos de ángulos de elevación y depresión en diferentes contextos.
7. Aplicar que la suma de los cuadrados del seno y coseno de un ángulo es 1.
8. Resolver problemas que involucren las razones trigonométricas, sus propiedades y ángulos de elevación y de depresión.
9. Plantear problemas contextualizados que utilicen razones trigonométricas para su solución

Razones trigonométricas

Escenario de aprendizaje

En la montaña rusa

La figura adjunta, muestra parte del plano de una Montaña Rusa, donde se aprecia un ángulo de inclinación β , que se forma entre el suelo y la rampa. También hay unos postes que sostienen la estructura:



1. ¿Qué relación cumplen los triángulos ABC, AED y AGF? ¿Por qué?
2. En cada triángulo se pueden determinar seis cocientes o razones entre las medidas de los lados que lo forman. Calcule para cada uno, las siguientes razones.

(a) $\frac{\text{cateto opuesto al } \angle \beta}{\text{cateto adyacente al } \angle \beta}$ (b) $\frac{\text{cateto opuesto al } \angle \beta}{\text{hipotenusa}}$ (c) $\frac{\text{cateto adyacente al } \angle \beta}{\text{hipotenusa}}$

Según lo aprendido en octavo nivel, los triángulos que se forman en la montaña rusa son semejantes, por el criterio $\alpha - \alpha$, puesto que el ángulo β es común para los tres triángulos, y todos tienen un ángulo recto.

$$\triangle ABC \sim \triangle AED \sim \triangle AGF$$

Ahora, determinemos las tres razones que se solicitan (sus recíprocas no serán parte de nuestro estudio)

$\frac{\text{cateto opuesto al } \angle \beta}{\text{cateto adyacente al } \angle \beta}$	$\frac{\text{cateto opuesto al } \angle \beta}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\text{cateto adyacente al } \angle \beta}{\text{hipotenusa}}$
En el $\triangle ABC$		
$= \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$	$= \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$	$= \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$
En el $\triangle AED$		
$= \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$	$= \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$	$= \frac{60}{75} = \frac{4}{5}$
En el $\triangle AGF$		
$= \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$	$= \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$	$= \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$

Observe que al ser los triángulos semejantes, evidentemente, las razones presentadas en las columnas de la tabla anterior, son equivalentes. A estas se les conoce como **razones trigonométricas**, y su valor va a depender de la medida del ángulo agudo que se utilice.

Por la utilidad que tienen estas razones trigonométricas dentro de la Matemática y otras ciencias aplicadas, a cada una de ellas se le ha asignado un nombre particular:

Seno de un ángulo β : es la razón entre la medida del cateto opuesto al ángulo β y la medida de la hipotenusa. Simbólicamente se escribe: **sen β**

$$\text{sen}\beta = \frac{\text{cateto opuesto al } \angle \beta}{\text{hipotenusa}}$$

Coseno de un ángulo β : es la razón entre la medida del cateto adyacente al ángulo β y la medida de la hipotenusa. Simbólicamente se escribe: **cos β**

$$\text{cos}\beta = \frac{\text{cateto adyacente al } \angle \beta}{\text{hipotenusa}}$$

Tangente de un ángulo β : es la razón entre la medida del cateto opuesto y la longitud del cateto adyacente al ángulo β . Simbólicamente se escribe: **$\tan\beta$**

$$\tan\beta = \frac{\text{cateto opuesto al } \angle\beta}{\text{cateto adyacente al } \angle\beta}$$

En forma abreviada se expresa así:

$$\tan\beta = \frac{CO}{CA}, \quad \cos\beta = \frac{CA}{H}, \quad \text{sen}\beta = \frac{CO}{H}$$

CO: cateto opuesto, CA: cateto adyacente H: hipotenusa

Ejemplos:

		$\text{sen}\beta = \frac{m}{k}$	$\cos\beta = \frac{n}{k}$	$\tan\beta = \frac{m}{n}$
		$\text{sena} = \frac{n}{k}$	$\cos\alpha = \frac{m}{k}$	$\tan\alpha = \frac{n}{m}$
Calcular con Pitágoras	$2^2 + x^2 = 6^2$ $x = \sqrt{36 - 4}$ $x = 4\sqrt{2}$	$\text{sen}\beta = \frac{4\sqrt{2}}{6}$ $= \frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\cos\beta = \frac{2}{6}$ $= \frac{1}{3}$	$\tan\beta = \frac{4\sqrt{2}}{2}$ $= 2\sqrt{2}$
		$\text{sena} = \frac{2}{6}$ $= \frac{1}{3}$	$\cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{6}$ $= \frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\tan\alpha = \frac{2}{4\sqrt{2}}$ $= \frac{1}{2\sqrt{2}}$
□ABCD rombo AC=12cm ED=3cm	$6^2 + 3^2 = x^2$ $\sqrt{36 + 9} = x$ $\sqrt{45} = x$ $3\sqrt{5} = x$	$\text{sen}\beta = \frac{6}{3\sqrt{5}}$ $= \frac{2}{\sqrt{5}}$	$\cos\beta = \frac{3}{3\sqrt{5}}$ $= \frac{1}{\sqrt{5}}$	$\tan\beta = \frac{6}{3}$ $= 2$
		$\text{sena} = \frac{3}{3\sqrt{5}}$ $= \frac{1}{\sqrt{5}}$	$\cos\alpha = \frac{6}{3\sqrt{5}}$ $= \frac{2}{\sqrt{5}}$	$\tan\alpha = \frac{3}{6}$ $= \frac{1}{2}$

En los ejemplos anteriores, ¿qué relación observa entre $\text{sen}\beta$ y $\text{cos}\alpha$? ¿Entre $\text{sen}\alpha$ y $\text{cos}\beta$?

Se logra observar que $\text{sen}\beta = \text{cos}\alpha$ y que $\text{sen}\alpha = \text{cos}\beta$. Además $\alpha + \beta = 90^\circ$ (son ángulos complementarios), por lo que podemos establecer la siguiente equivalencia:

$$\text{sen}\beta = \text{cos}(90^\circ - \beta)$$

$$\text{cos}\beta = \text{sen}(90^\circ - \beta)$$

Ejemplos:

$\text{sen}70^\circ = \text{cos}20^\circ$	$\text{cos}45^\circ = \text{sen}45^\circ$
$\text{sen}90^\circ = \text{cos}0^\circ$	$\text{sen}10^\circ = \text{cos}80^\circ$

Ejemplo:

Si $\text{sen}x = 0,\bar{1}$. Halle el valor de $\text{cos}x$ y de $\text{tan}x$

Primero expresamos $0,\bar{1}$ en fracción: $0,\bar{1} = \frac{1}{9}$

De este modo, se tiene que $\text{sen}x = \frac{1}{9}$. Seguidamente dibujamos un triángulo rectángulo y ubicamos el ángulo x en alguno de los dos ángulos agudos. En este caso, el 1 será la medida del cateto opuesto y el 9 la longitud de la hipotenusa.

Mediante el Teorema de Pitágoras, calculamos el cateto adyacente a " x "

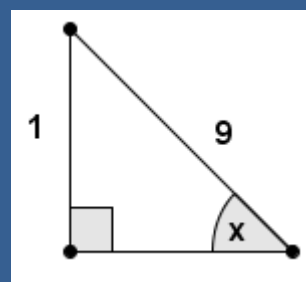
$$1^2 + a^2 = 9^2$$

$$a = \sqrt{81 - 1}$$

$$a = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Por tanto:

$$\text{cos}x = \frac{4\sqrt{5}}{9} \quad y \quad \text{tan}x = \frac{1}{4\sqrt{5}}$$



¿Sabías que...?



La palabra **seno** del ángulo, proviene de la palabra *semis inscriptae*, referida a la mitad de una cuerda de un círculo de radio 1. Su abreviatura terminó simplificada como *sins*, fue latinizada como *sinus* y en español se tradujo como *seno*..

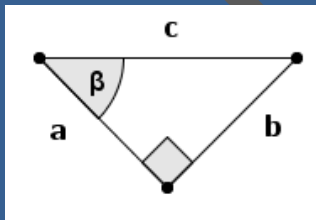
La palabra **coseno** fue creada por Gunter, y se deriva de las relaciones entre las funciones trigonométricas de ángulos complementarios. Esta palabra proviene de la abreviatura latina de la expresión "*complementi sinus*" que quiere decir seno del complemento. Más tarde se abrevió a "*co sinus*" de donde surge coseno.

La palabra **tangente** viene del latín *tangens* que significa "tocar"



Existen muchas relaciones que se pueden establecer al operar con las razones trigonométricas. Veamos una de ellas:

Vamos a determinar el valor de la expresión $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x$



Es importante aclarar que $\text{sen}^2 x = (\text{sen} x)^2$

Sin perder generalidad en la demostración, consideremos el triángulo adjunto, y determinemos las razones involucradas.

$$\text{sen} \beta = \frac{b}{c}, \quad \text{cos} \beta = \frac{a}{c}$$

Además por el Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$

Al reemplazar en la fórmula inicial, se obtiene $\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2$

Al simplificar:
$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 + a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Se concluye que:

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

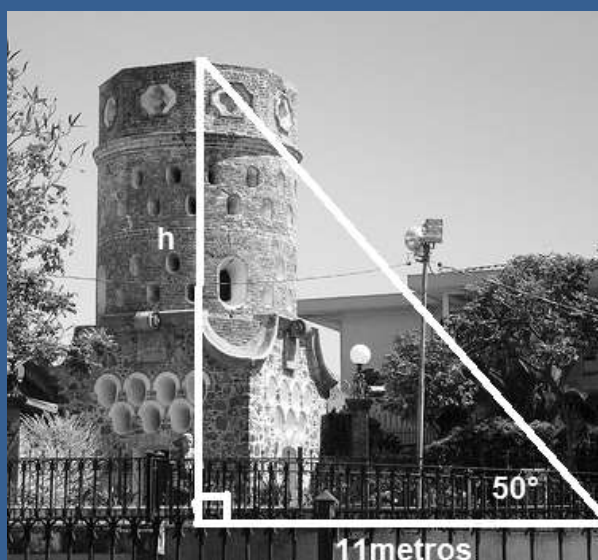
Ejemplo: $\text{sen}^2(70^\circ) + \text{cos}^2(70^\circ) = 1$

Cálculo de valores desconocidos en triángulos rectángulos mediante trigonometría

Conociendo únicamente la medida de un lado y de un ángulo agudo, las razones trigonométricas son de gran utilidad para calcular las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Ejemplos:

1. Si deseamos calcular la altura aproximada del Fortín de Heredia, teniendo algunos datos podemos lograrlo.



Del triángulo rectángulo formado, podemos extraer diversa información:

El cateto correspondiente a la altura del Fortín, es opuesto al ángulo de 50° .

El cateto horizontal, que mide 11 metros, es adyacente al ángulo de 50° .

Con estos datos, podemos establecer la siguiente relación:

$$\tan(50^\circ) = \frac{h}{11} \text{ . Al despejar } h, \text{ se}$$

obtiene que $11 \cdot \tan(50^\circ) = h$

Ahora, solo basta introducir en la calculadora esta expresión; pero para ello debe cerciorarse de que esté en modo DEG. De no estar en ese modo, debe teclear

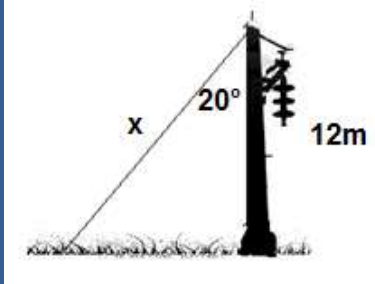
`shift mode 3`

Por tanto se introduce `11 tan 50 )`

Se obtiene que $h \approx 13,1\text{m}$

Se concluye que la altura del Fortín es de aproximadamente 13, 1 metros.

2. De acuerdo con la figura, determine la longitud aproximada del cable.

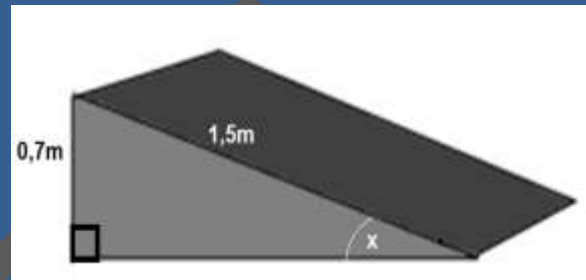


Conocemos el cateto adyacente al ángulo dado, y necesitamos encontrar el valor de la hipotenusa, por tanto usamos la razón coseno del ángulo.

$$\cos(20^\circ) = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{12}{\cos(20^\circ)} \Rightarrow x \approx 12,77m$$

El cable mide aproximadamente 12,77m

3. Se desea construir una rampa de acceso a una escuela, que tenga una altura de 0,7 m y una longitud de 1,5m. ¿Cuánto debe medir el ángulo de inclinación de esa rampa?

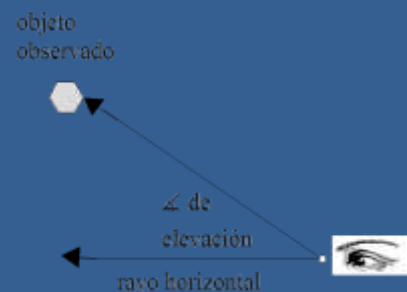


En este caso, se establece que $\sin(x) = \frac{0,7}{1,5}$

Para determinar el valor del ángulo "x" se usa la función inversa de $\sin(x)$, llamada arcoseno del ángulo ($\arcsen x$). Para nuestros efectos, basta con hacer el siguiente proceso en la calculadora: $\boxed{\text{shift}} \boxed{\sin} \boxed{\frac{0,7}{1,5}} \boxed{=}$ y se obtiene que el ángulo buscado mide 27,8 grados aproximadamente.

Ángulos de elevación y depresión

Ángulo de elevación: Es aquel ángulo que se forma con dos rayos, uno horizontal que parte del punto de observación y otro que parte del mismo punto de observación hacia un objeto observado por encima del rayo horizontal.

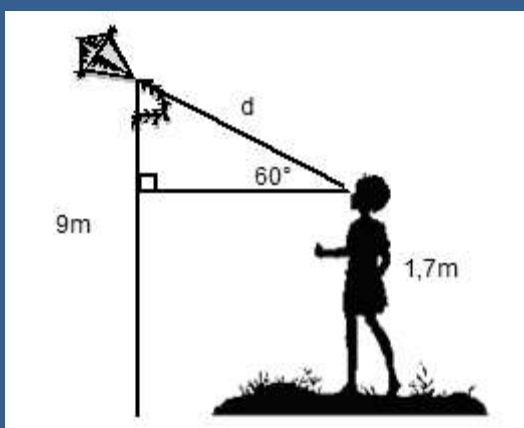


Ángulo de depresión: Es aquel ángulo que se forma con dos rayos, uno horizontal que parte del punto de observación y otro que parte del mismo punto de observación hacia un objeto observado por debajo del rayo horizontal

Altura visual: Es la longitud vertical que hay desde el suelo hasta los ojos de la persona que observa.

Ejemplos:

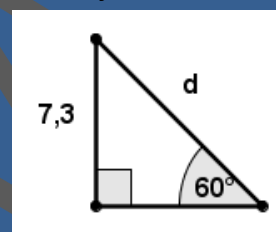
1. Silverio tiene una estatura visual de 1,7m y observa un papalote (cometa) que se encuentra a 9 m de altura con un ángulo de elevación de 60° . ¿Cuál es la distancia entre Silverio y el papalote?



Nótese que la medida del cateto opuesto al ángulo de elevación es igual a la diferencia de la altura del papalote y de la visual del joven.

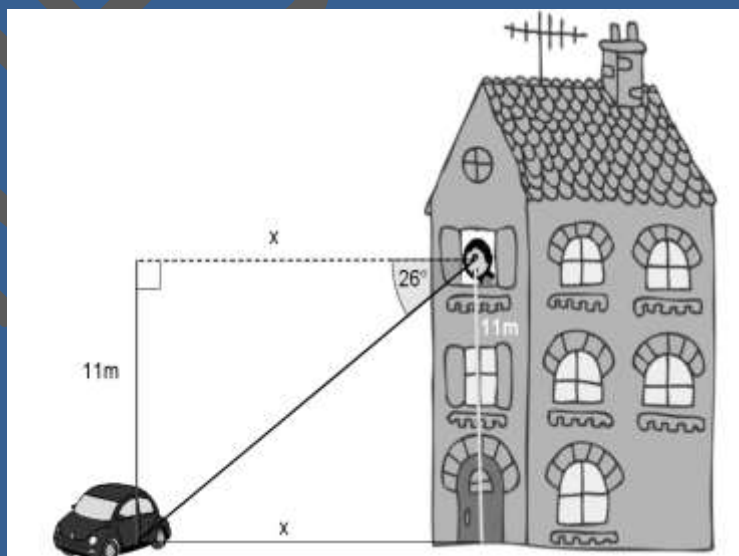
Luego se trabaja con los datos del triángulo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{7,3}{d} \\ \Rightarrow d &= \frac{7,3}{\operatorname{sen} 60^\circ} \approx 8,42\text{m}\end{aligned}$$



La distancia entre Silverio y el papalote es de aproximadamente 8,42 metros.

2. Gabino está ubicado en el tercer piso de un hotel y está a una altura visual de 11m. Observa un automóvil con un ángulo de depresión de 26° . Determine la distancia en que se encuentra el automóvil respecto a la base del edificio.



Se establece la relación:

$$\begin{aligned}\tan(26^\circ) &= \frac{11}{x} \\ \Rightarrow x &= \frac{11}{\tan(26^\circ)} \approx 22,55\text{m}\end{aligned}$$

Por tanto, la distancia entre el carro y la base del hotel es de 22,55 metros

3. En la azotea de un edificio hay una cámara, a una altura de 45m. En un primer momento, el aparato observa a un señor con un ángulo de depresión de 27° . El señor avanza hacia el edificio y en un segundo momento, la cámara lo observa con un ángulo de depresión de 41° . ¿Cuántos metros avanzó el señor en ese período?

Para resolver este ejercicio, es necesario separar los dos triángulos involucrados.

Basados en el dibujo, determinemos los valores de “m” y “n” por aparte.

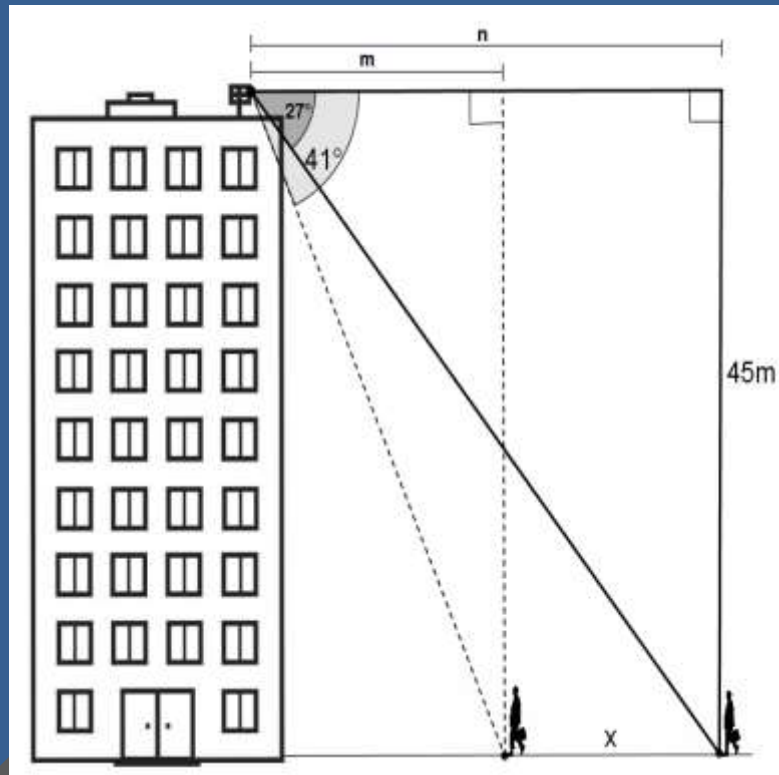
$$\tan(27^\circ) = \frac{45}{n}$$

$$\Rightarrow n = \frac{45}{\tan(27^\circ)} \approx 88,31 \text{ metros}$$

$$\tan(41^\circ) = \frac{45}{m}$$

$$\Rightarrow m = \frac{45}{\tan(41^\circ)} \approx 51,76 \text{ metros}$$

La distancia recorrida es $x = n - m = 88,31 - 51,76 = 36,55$ metros





Hora de practicar

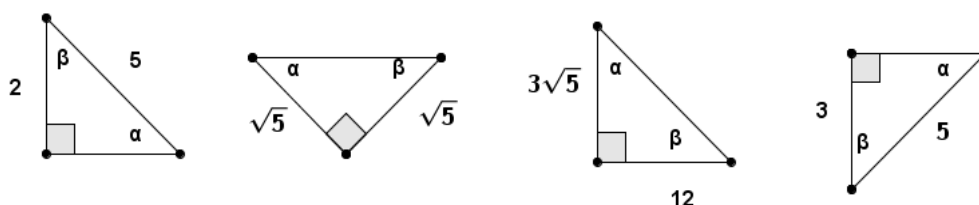
Ejercicios 4

Ángulos y

Razones trigonométricas

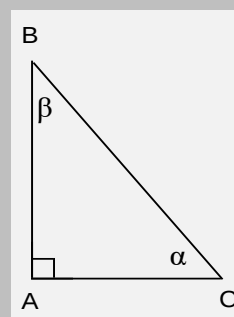
PARTE A

- Convierta cada medida de los ángulos a radianes.
(a) 120° (b) 210° (c) 15° (d) 180° (e) 90° (f) 300° (g) 315°
- Convierta cada medida de los ángulos a grados.
(a) $\frac{13}{18}\pi$ (b) $\frac{16\pi}{9}$ (c) $\frac{\pi}{12}$ (d) $\frac{10}{9}\pi$ (e) π (f) $\frac{5}{4}\pi$ (g) $\frac{3}{4}\pi$
- En cada uno de los siguientes triángulos, halle los valores de $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cos \beta$, $\sin \beta$ y $\tan \beta$
-



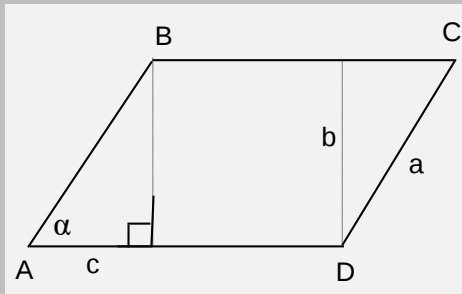
Si α es la medida de un ángulo agudo y $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ entonces $\tan \alpha$ es

- $\frac{1}{2}$
 - 2
 - $\frac{1}{\sqrt{5}}$
 - $\frac{\sqrt{5}}{2}$
5. De acuerdo con la figura, $\frac{AB}{BC}$ corresponde a
- $\sin \beta$
 - $\tan \alpha$
 - $\sin \alpha$
 - $\tan \beta$



6. El cuadrilátero ABCD adjunto es un paralelogramo. De acuerdo con los datos proporcionados, $\sin \alpha$ corresponde a

- (A) $\frac{b}{c}$
 (B) $\frac{c}{a}$
 (C) $\frac{b}{a}$
 (D) $\frac{a}{c}$



7. Sean α y β las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces se cumple con certeza que

- (A) $\sin \alpha = \sin \beta$
 (B) $\sin \alpha = \cos \beta$
 (C) $\cos \alpha = \tan \beta$
 (D) $\tan \alpha = \tan \beta$

8. Si α es la medida de un ángulo agudo, y $\tan \alpha = 1$, entonces $\cos \alpha + \sin \alpha$ corresponde a

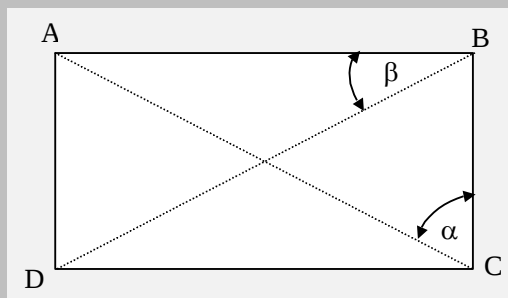
- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (B) 2
 (C) $\sqrt{2}$
 (D) $2\sqrt{2}$

9. De acuerdo con los datos de la figura, si $\square ABCD$ es un rectángulo y

$\sin \alpha = \frac{12}{13}$ entonces $\tan \beta$ es

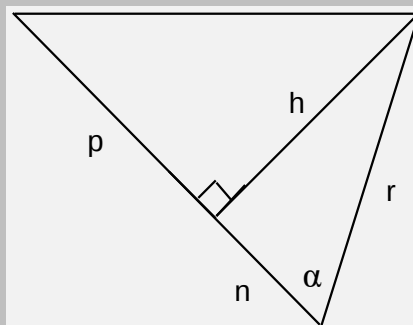
igual a

- (A) $\frac{12}{5}$
 (B) $\frac{5}{13}$
 (C) $\frac{5}{12}$
 (D) $\frac{13}{12}$



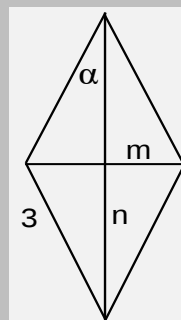
10. De acuerdo con los datos de la figura, el valor $\cos \alpha$ corresponde a

- (A) $\frac{h}{n}$
 (B) $\frac{p}{r}$
 (C) $\frac{r}{n}$
 (D) $\frac{n}{r}$



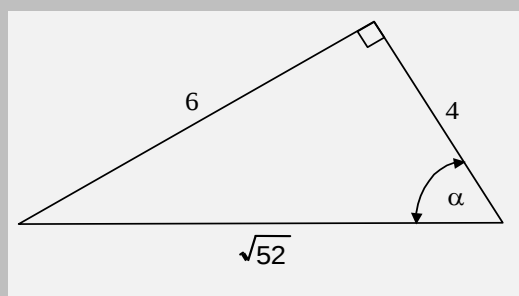
11. La figura adjunta representa un rombo, entonces $\sin \alpha$ corresponde a

- (A) $\frac{m}{n}$
 (B) $\frac{m}{3}$
 (C) $\frac{n}{3}$
 (D) $\frac{n}{m}$



12. De acuerdo con los datos de la figura, el valor de $\sin (90^\circ - \alpha)$ es

- (A) $\frac{3}{\sqrt{13}}$
 (B) $\frac{3}{2}$
 (C) $\frac{2}{\sqrt{13}}$
 (D) $\frac{2}{3}$



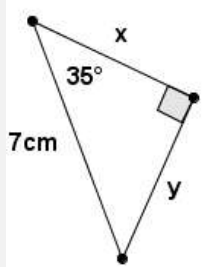
13. El valor de $\cos (20^\circ)$ es equivalente a

- (A) $\cos (70^\circ)$
 (B) $\sin (20^\circ)$
 (C) $\tan(70^\circ)$
 (D) $\sin(70^\circ)$

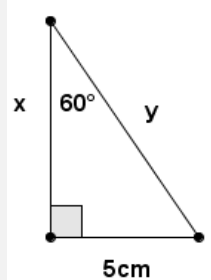
PARTE B

1. En cada caso, determine los valores faltantes.

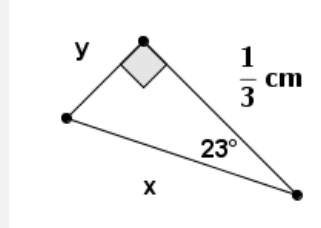
(a)



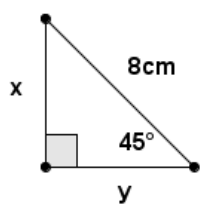
(b)



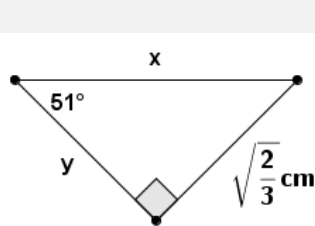
(c)



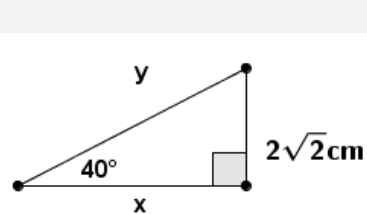
(d)



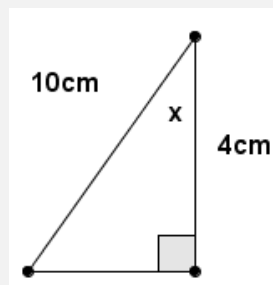
(e)



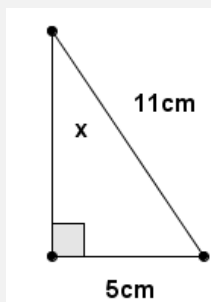
(f)



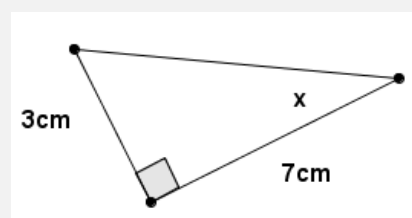
(g)



(h)

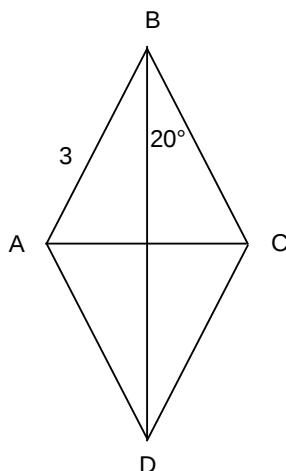


(i)

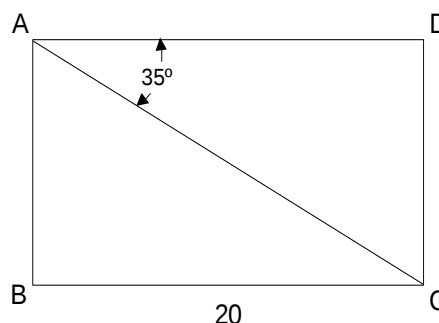


2. Con los datos de cada figura, determine lo que se le solicita.

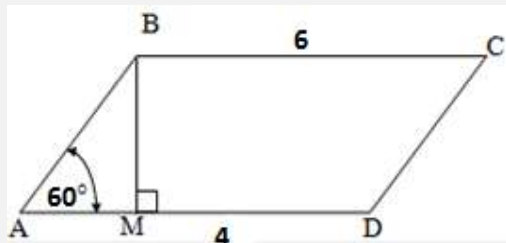
(a) El $\square ABCD$ es un rombo. Determine la longitud aproximada de $\overline{BD}$



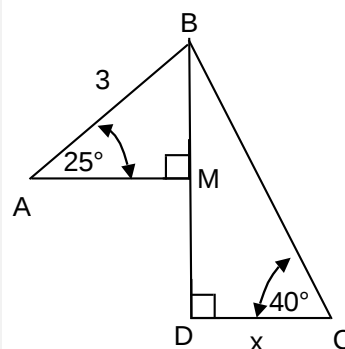
(b) El $\square ABCD$ es un rectángulo. Determine su perímetro.



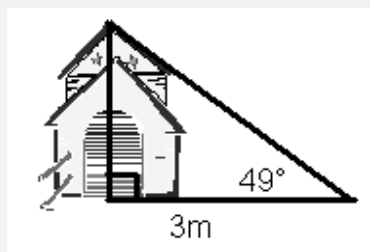
(c) El $\square ABCD$ es un paralelogramo. Determine su área



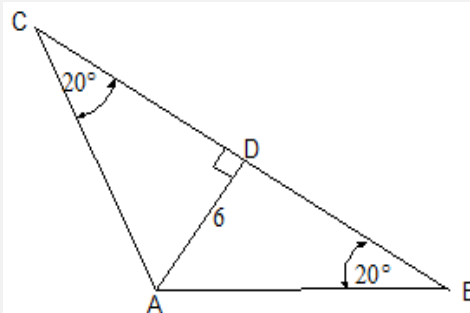
(d) M es el punto medio de $\overline{BD}$. Determine el valor aproximado de "x"



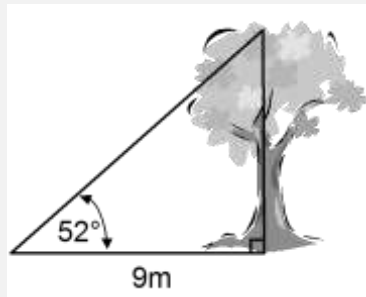
(e) Determine la altura de la casa



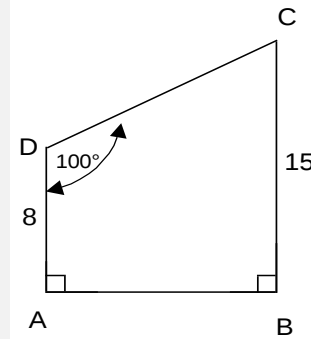
(f) Determine la medida aproximada de $\overline{BC}$



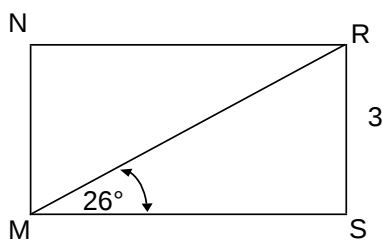
(g) Determine la altura aproximada en metros del árbol



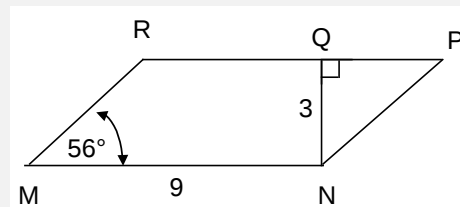
(h) Si $BC = 15$, determine AB



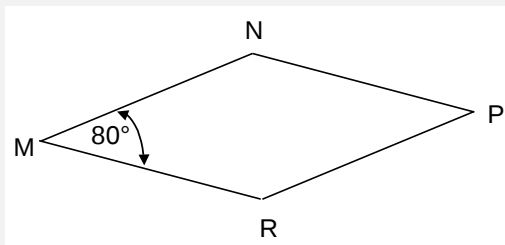
(i) El $\square MNRS$ es un rectángulo. ¿Cuál es la medida de $\overline{NS}$?



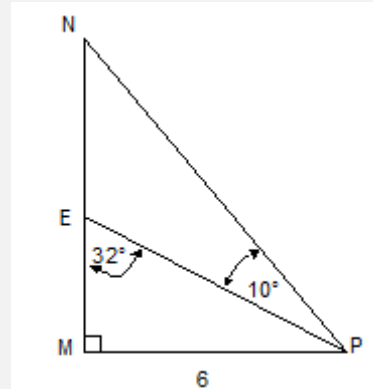
(j) El $\square MRPN$ es un paralelogramo. Determine su perímetro



(k) El $\square MNPR$ es un rombo, donde $MN = 12$. Determine su área



(l) Determine el valor de NE



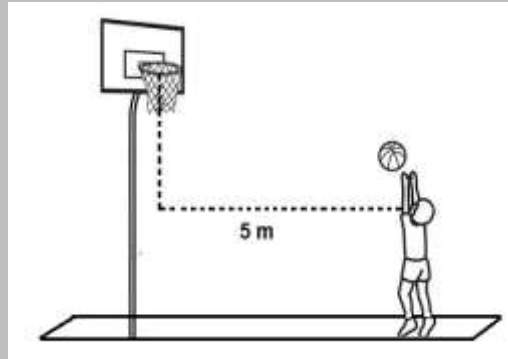
- Sea el $\square MNPR$ un rombo. Si $m\angle MNR = 70^\circ$ y $MP = 18$, determine la medida aproximada de NR .
- Sea el $\square ABCD$ un rombo. Si $m\angle ABC = 100^\circ$ y $AC = 4$, determine su perímetro.
- El largo de un rectángulo forma con la diagonal un ángulo de 58° . Si la diagonal mide 15 cm, ¿cuál es aproximadamente la medida del largo de ese rectángulo?

PARTE C

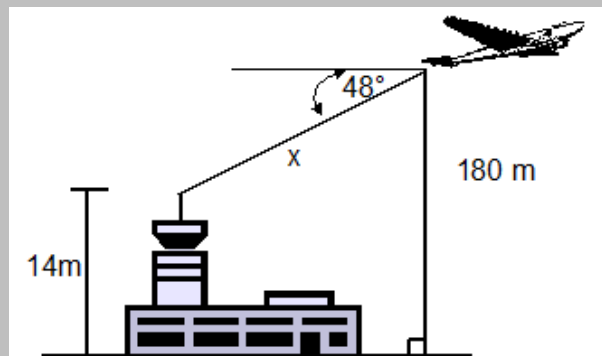
1. Resuelva cada problema

- a) Desde la cúspide de una torre de 11,5m de alto se observa con un ángulo de depresión de 53° , un objeto ubicado en el mismo plano horizontal que la base de la torre. ¿A qué distancia aproximada se encuentra el objeto de la base de la torre?
- b) Fulgencio se encuentra a 24 metros de la base del asta de una bandera, y tiene una altura visual de 1,5m. Determina que el ángulo de elevación hasta el punto más alto del asta es de 48° ¿Qué altura tiene el asta?
- c) Un guardabosque que se encuentra en una torre a 29 m de altura, observa con un ángulo de depresión de 9° a un animal que está dormido ¿A qué distancia se encuentra el animal de la base de la torre?
- d) Desde un bote que está a 350 m de la base de un faro, se observa la cima del faro con un ángulo de elevación de 36° ¿cuál es la altura aproximada del faro?
- e) Uno de los edificios más altos del mundo es la Torre Sears. Esta proyecta una sombra de 950m, cuando el ángulo de elevación de los rayos solares es 25° , ¿cuál es aproximadamente la altura del edificio?
- f) Desde la parte más alta de un edificio se observan dos puntos A y B en el suelo con ángulos de depresión de 29° y 55° . Determine la distancia a la que se encuentran esos puntos, si la altura del edificio es de 78m
- g) Desde un avión se observa la parte más alta de un faro con un ángulo de depresión de 39° . La altura a la que se encuentra el avión es de 2100 m y la altura del faro es de 120m. Determine la distancia entre el avión y la parte más alta del faro.
- h) Una rampa tiene una longitud de 3,5m y una altura de 2m. ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación de la rampa?
- i) Una señora observa una antena que está colocada en la azotea de un edificio. Su estatura visual es de 1,6 m. El ángulo de elevación con la que ve la parte más alta del edificio es de 42° y con el que ve la parte superior de la antena de 55° . Si la mujer se encuentra a 11 m de la base del edificio, determine la altura de la antena.

- j) Los ojos de un jugador de baloncesto están a 1,72 m del piso. El jugador intenta encestar y está a una distancia de 5m del centro de la canasta. Para ello, mira el aro con un ángulo de elevación de 32° . ¿A qué altura está el aro?



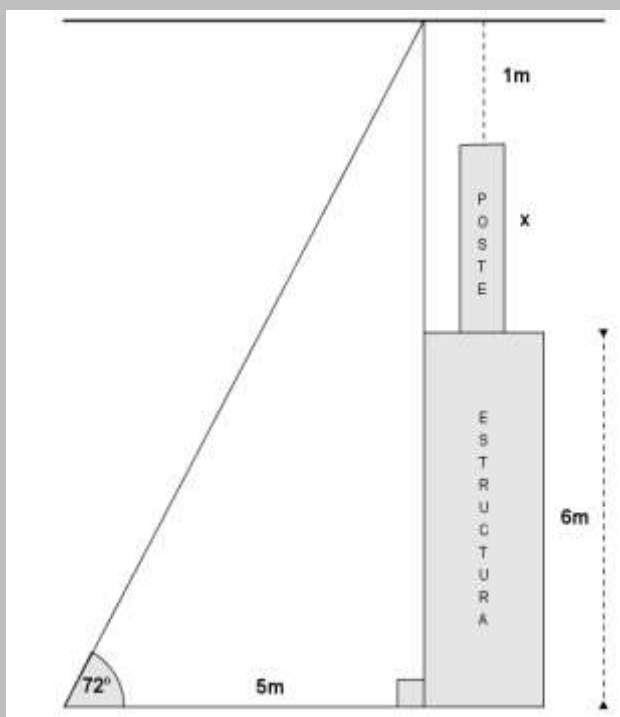
- k) Un ingeniero observa con un teodolito la cima de un cerro con un ángulo de elevación de 38° , luego se acerca 30m y el nuevo ángulo de elevación es de 59° . ¿Cuál es la altura aproximada del cerro, si el teodolito mide 1,72m?
- l) ¿Cuál es aproximadamente la altura de un faro ubicado al nivel del mar, si desde su cima se observa, con un ángulo de depresión de 47° , un bote que está a 300m de distancia en el mismo plano de la base del faro?
- m) Considere el dibujo.



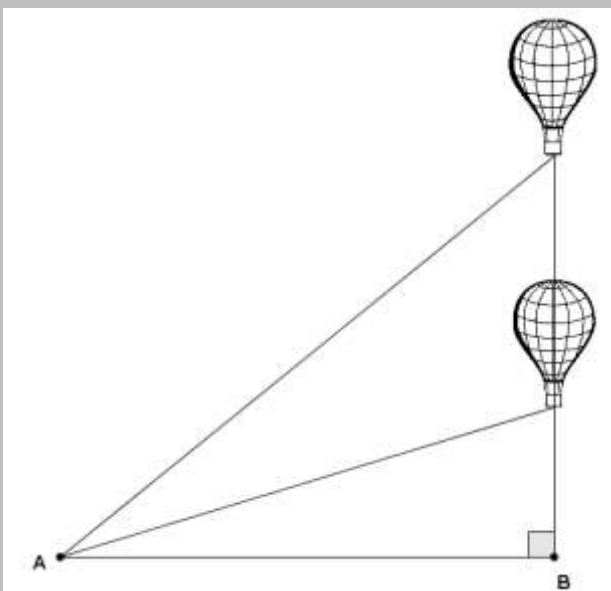
De acuerdo con los datos del dibujo, ¿cuál es la distancia aproximada en metros del avión a la torre de control?

- n) Al despegar un avión, describe una trayectoria recta que forma un ángulo de 15° con la horizontal. ¿Qué distancia en metros aproximadamente, ha volado el avión al alcanzar una altura de 1800 m?

- o) En una bodega se coloca una estructura de 6m de altura y debe añadirse un poste encima, de tal modo que entre ambos quede 1m por debajo del nivel del techo de la bodega. Para esto un observador a 5m de distancia, midió un ángulo de elevación de 72° , entre la base de la estructura y el techo. ¿Cuál es la altura del poste que se debe agregar?

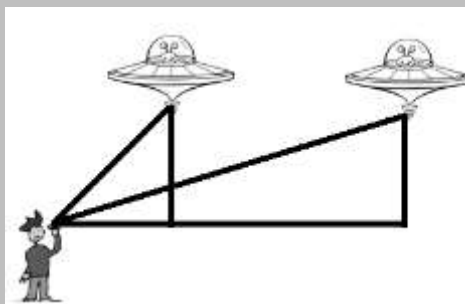


- p) Cuando un globo aerostático sube verticalmente, su ángulo de elevación desde un punto A, cambia de 21° a 33° . Si A está ubicado sobre un terreno horizontal, a 25km de distancia del punto B (el cual está debajo del globo). Determine el ascenso aproximado del globo.



AFRONTANDO RETOS

Una persona que tiene una medida visual de 1,5m observa en un mismo plano vertical dos ovnis volando a una misma altura con ángulos de elevación de 50° y 35° . Si la distancia entre los ovnis es de 90 m ¿A qué altura están los ovnis?



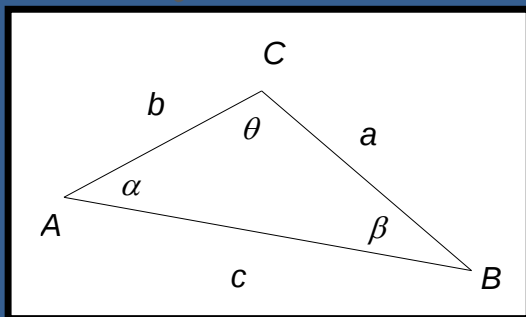
Habilidad específica.

10. Aplicar la ley de senos en diversos contextos.

Ley de senos

A pesar de que las razones trigonométricas que se trabajaron con anterioridad, tienen importantes aplicaciones en la vida cotidiana, existe una restricción: los problemas deben involucrar triángulos rectángulos. Si necesitamos determinar alguna medida de un lado o ángulo en un triángulo no rectángulo (oblicuángulo), precisamos utilizar otro resultado, conocido como Ley de senos.

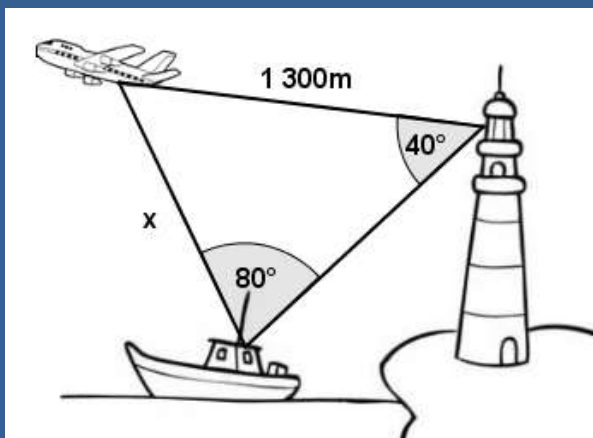
La ley de senos indica que en todo triángulo la razón entre la longitud de cada lado y el seno del ángulo opuesto a él, es constante.



$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \theta}$$

Ejemplos:

1. Una persona observa un avión y un barco desde la cúpula de un faro, tal como muestra la figura. ¿Cuál es la distancia que hay del barco al avión?



Se establece la relación:

$$\frac{1300}{\text{sen}(80^\circ)} = \frac{x}{\text{sen}(40^\circ)}$$

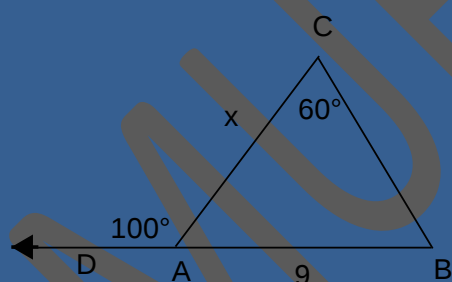
Y se multiplica en equis para despejar la variable:

$$1300 \cdot \text{sen}(40^\circ) = x \cdot \text{sen}(80^\circ)$$

$$\frac{1300 \cdot \text{sen}(40^\circ)}{\text{sen}(80^\circ)} = x \Rightarrow x \approx 848,51$$

La distancia entre el barco y el avión es de 848,51 metros aproximadamente.

2. Según los datos de la figura, determine el valor de x.



Se debe hallar primero la medida del $\angle BAC$.

$$m\angle BAC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Ahora se calcula la medida del $\angle ABC$

$$m\angle ABC = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$$

Con estos datos, se puede aplicar el teorema de senos:

$$\frac{x}{\text{sen}(40^\circ)} = \frac{9}{\text{sen}(60^\circ)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9\text{sen}(40^\circ)}{\text{sen}(60^\circ)} \Rightarrow x \approx 6,68$$

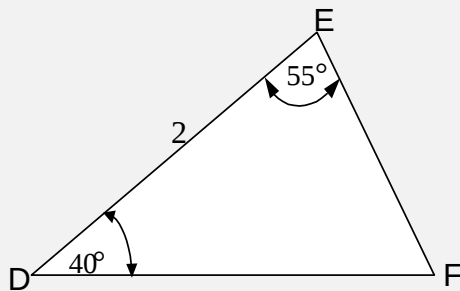


Hora de practicar

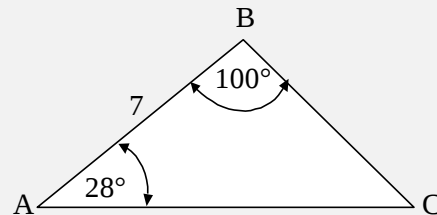
Ejercicios 5 Ley de senos

1. En cada caso determine el valor que se le solicita.

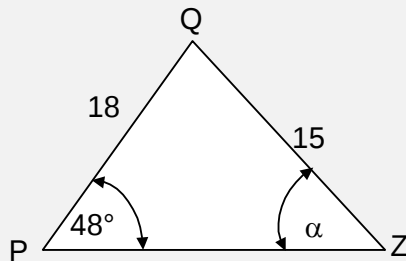
(a) Determine EF



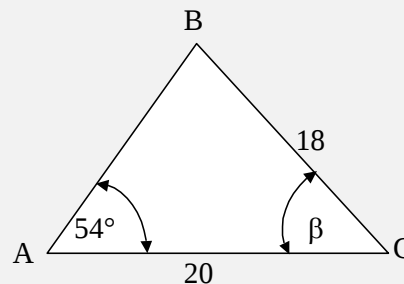
(b) ¿Cuál es la medida aproximada de $\overline{BC}$?



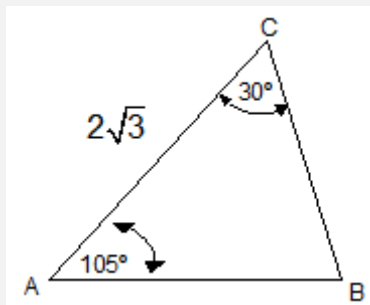
(c) ¿Cuál es el valor aproximado de α ?



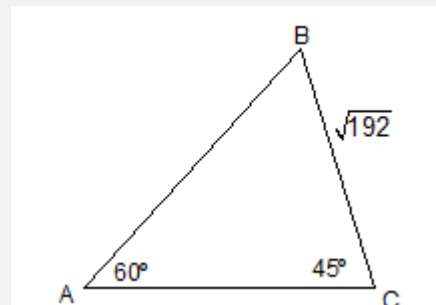
(d) ¿Cuál es el valor aproximado de β ?



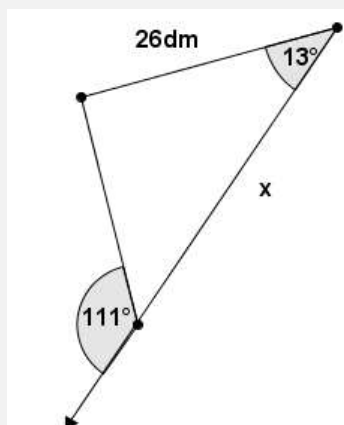
(e) Determine la medida de $\overline{AB}$



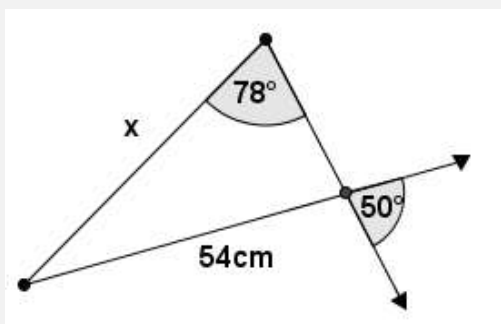
(f) Determine la medida de $\overline{AB}$



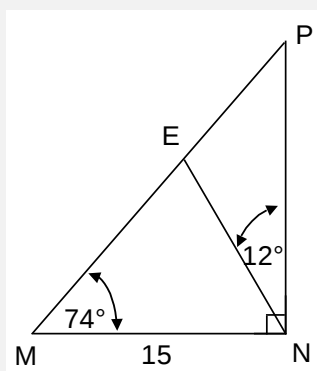
(g) Determine la medida de x



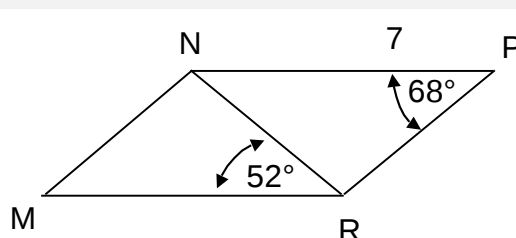
(h) Determine la medida de x



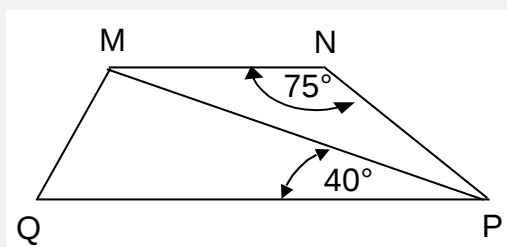
(i) Determine el valor de NE



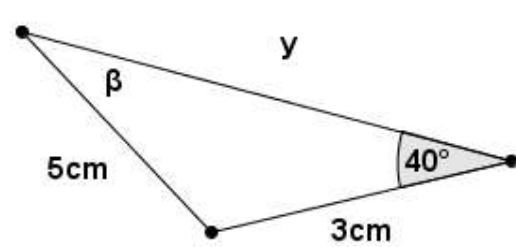
(j) MRPN es un paralelogramo. Determine el valor de NR



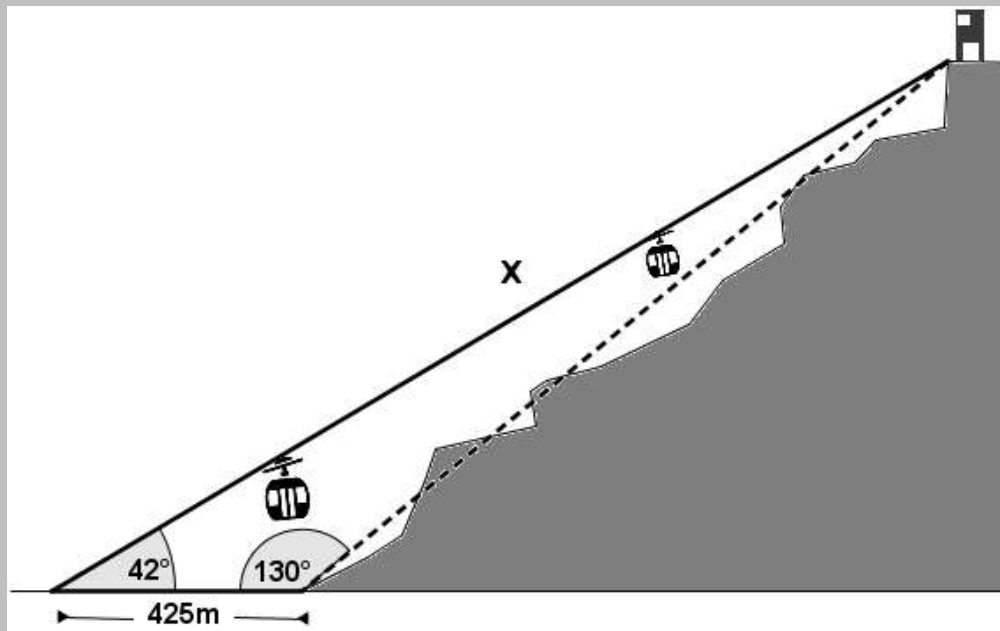
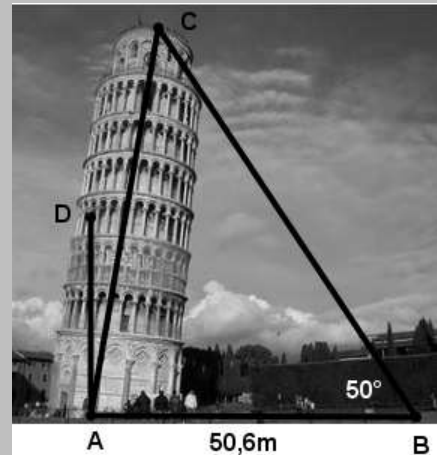
(k) En el $\square MNPQ$, $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$ y $MP = 10$. Determine el valor de NP



(l) Determine el valor de " y "
[Sugerencia: Calcule primero el valor de β mediante Ley de Senos]



2. Para determinar la distancia entre dos puntos A y B, se traza un segmento de recta desde C hasta A de longitud 30m y se determina que $m\angle BAC = 55^\circ$ y $m\angle ACB = 50^\circ$. ¿Cuál es aproximadamente la distancia entre A y B?
3. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas. La distancia entre A y B es de 5 km; a los pueblos B y C los separan 11 km. El ángulo que forman las carreteras que unen A con B y A con C es de 120° . ¿Qué distancia hay entre A y C?
4. La torre de Pisa es un campanario ubicado en Italia, que desde el proceso de construcción se fue inclinando. Determine el ángulo de inclinación, según los datos que se presentan en la ilustración. La longitud de la torre AC es de 55,8m
[El ángulo de inclinación es el $\angle DAC$, el cual es complementario con el $\angle CAB$]
5. De acuerdo con los datos de la figura, ¿cuál es la longitud del cable del teleférico?



Habilidad específica.

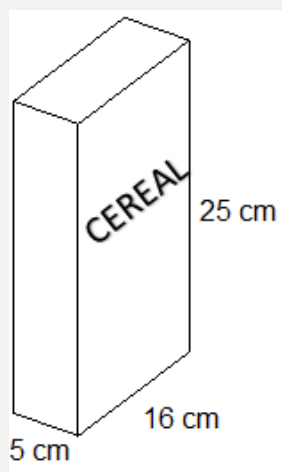
- 11.** Identificar y calcular la apotema de pirámides rectas cuya base sea un cuadrado o un triángulo equilátero.
- 12.** Calcular el área lateral y el área total de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular.
- 13.** Calcular el área lateral y el área total de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.

Escenario de aprendizaje**Unidos para reciclar**

Dionisio desea reciclar el cartón de unas cajas de cereal y contabilizar los metros cuadrados que no irán a parar a un botadero gracias a su iniciativa. Los resultados los expondrá en un proyecto interdisciplinario que incluye el departamento de Matemática, Ciencias, Educación Ciudadana e Inglés.

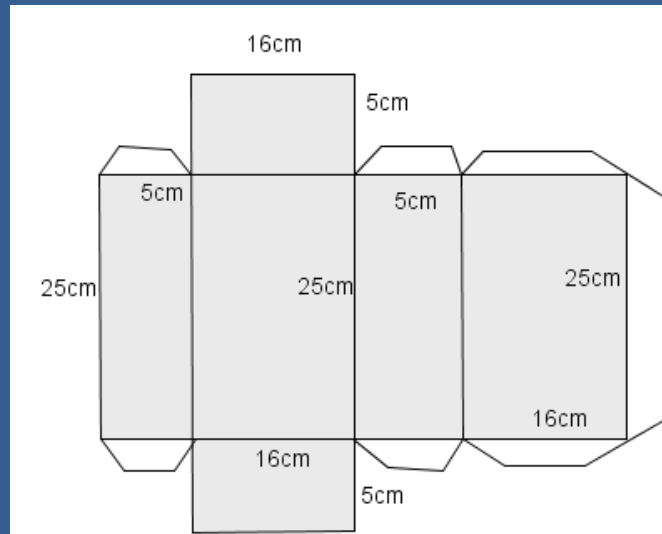
Las dimensiones de la caja de cereal se presentan en la ilustración.

Si logró recolectar 125 cajas en dos semanas, ¿cuántos metros cuadrados logró reciclar? (suponga que no se toman en cuenta las pestañas que unen las partes de la caja de cereal)



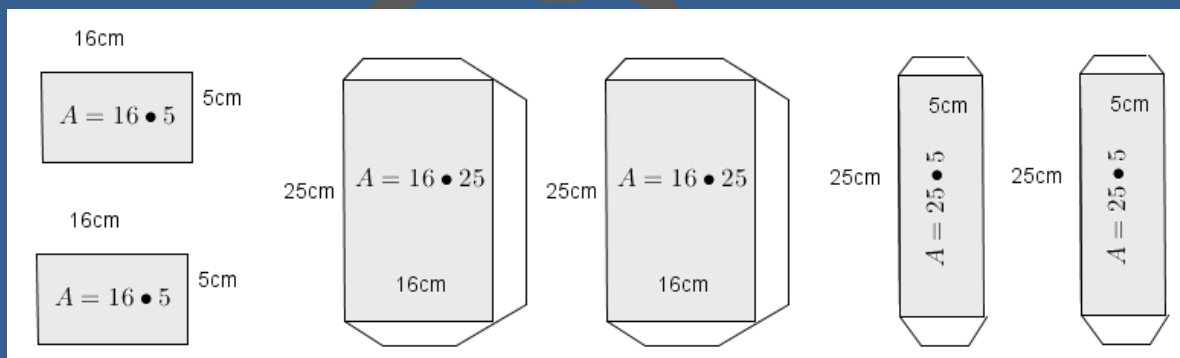
En este caso, estamos ante un problema que involucra una figura en tres dimensiones, la cual tiene ancho, largo y altura.

Al desarmar las cajas de cereal, Dionisio se percató de que cada una de ellas está formada por rectángulos, es más, por 3 parejas de rectángulos congruentes entre sí.



Decide calcular el área de tres caras diferentes y luego multiplicar ese resultado por dos.

Hay dos caras de 25cm x 16cm (la del frente y atrás), una pareja de 16cm x 5cm (la base y tapa) y dos de 5cm x 25cm (donde viene la información energética del producto)



Con esta información, se puede determinar el área de una caja, de la siguiente manera: $A = 2(16 \cdot 5 + 16 \cdot 25 + 25 \cdot 5) = 1\,210\text{cm}^2$

Ahora la conversión a metros cuadrados sería $1\,210\text{cm}^2 \cdot \frac{1\text{m}^2}{100^2\text{cm}^2} = 0,121\text{m}^2$

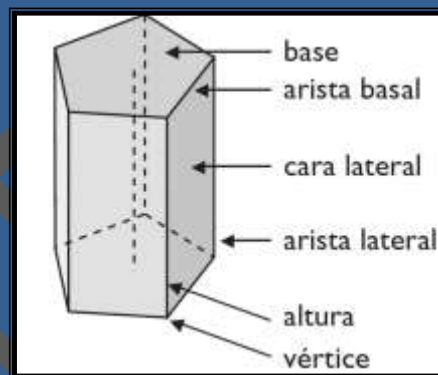
Como recolectó 125 cajas, entonces logró reciclar $0,121\text{m}^2 \cdot 125 = 15,125\text{m}^2$ de cartón

Prisma recto

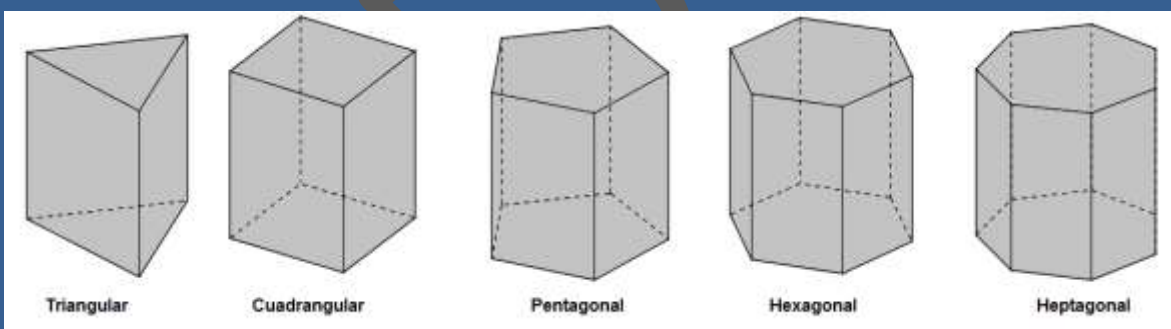
Los prismas rectos son aquellos cuerpos sólidos cuyas caras laterales están formadas por rectángulos y un par de caras congruentes denominadas bases. Son parte de la familia de los **poliedros**, ya que todas sus caras son planas.

En un prisma recto su altura es congruente con la altura de uno de los rectángulos que forman las caras laterales.

- # **Cara:** superficie plana (polígono) que delimita el poliedro.
- # **Arista:** Segmento en el que se intersecan dos caras del poliedro.
- # **Vértice:** Punto en el que se intersecan tres o más aristas del poliedro.



A continuación, algunos prismas, cuyo nombre depende del polígono de su base.

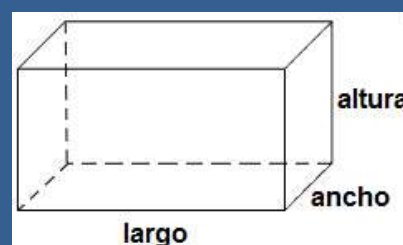


Si se desea calcular el área de un prisma de base regular, basta con calcular el área basal (que son dos polígonos) y los rectángulos que forman el área lateral (la cantidad de rectángulos es igual al número de lados del polígono de la base).

- # **Paralelepípedo recto:** Prisma cuya base es un rectángulo.

Área lateral: $2 \cdot (\text{largo} \cdot \text{altura}) + 2 \cdot (\text{ancho} \cdot \text{altura})$

Área basal: $2 \cdot (\text{largo} \cdot \text{ancho})$

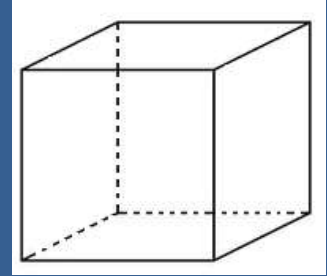


Cubo: Prisma formado por seis cuadrados congruentes entre sí.

Área lateral: $4 \cdot a^2$ a : arista

Área basal: $2 \cdot a^2$

Área total: $6 \cdot a^2$

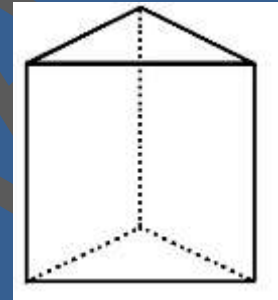


Prisma triangular: Estudiaremos los prismas triangulares, cuya base es un triángulo equilátero.

Área lateral: $3 \cdot (a_b \cdot h)$, a_b : arista de la base h : altura

Área basal: $2 \cdot \left(\frac{(a_b)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right)$

Área del Δ equilátero = $\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$



Ejemplos

1. Se desea calcular la cantidad de azulejo necesario para enchapar una piscina rectangular, de 2 metros de profundidad, 10 metros de largo y 7 de ancho. ¿Cuánto material se necesita?

En este caso, se determina el área lateral y el área de una sola base:

$$2 \cdot (10 \cdot 2) + 2 \cdot (7 \cdot 2) + (10 \cdot 7) = 138$$

Se necesitan 138m² de azulejo



2. Determine el área total de un prisma triangular regular si la arista basal mide 8cm y la altura 20cm

$$\text{Área: } 3 \cdot (8 \cdot 20) + 2 \left(\frac{8^2 \sqrt{3}}{4} \right) \approx 535,42$$

El área del prisma es de aproximadamente 535, 42cm²

3. Determine el área de un dado de arista 3cm

$$\text{Área: } 6 \bullet 3^2 = 54$$

El dato tiene un área de 54cm²



Escenario de aprendizaje

La pirámide de Keops

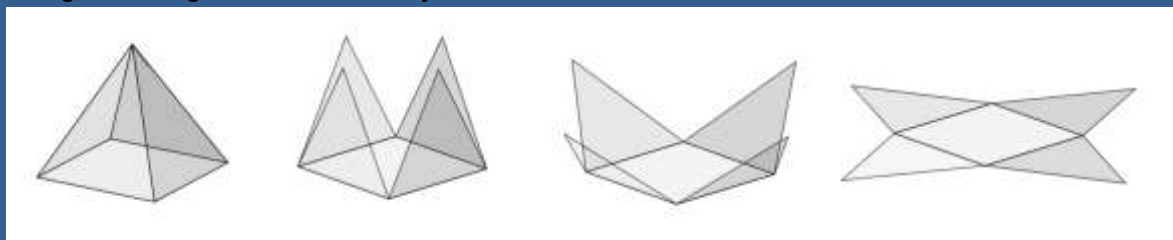
En la planicie de Giza se encuentran tres pirámides, entre ellas la única maravilla del mundo antiguo que aún existe: la Gran Pirámide de Keops, de base cuadrada.

Originalmente medía 147 metros de altura y el lado basal 230 metros.

Para tener una idea de la magnitud de dicha edificación, supongamos que vamos a forrar dicha construcción con papel; tanto las caras laterales como la base. ¿Cuántos metros cuadrados de papel necesitaríamos?



Imaginemos por un momento que “abrimos” la pirámide. Podremos visualizar cuatro triángulos congruentes entre sí, y un cuadrado como base:



Para calcular el área de la base, basta con resolver $230 \bullet 230 = 52\,900\text{m}^2$. Sin embargo, para determinar el área de cada triángulo, necesitamos los datos de la arista basal (que es 230m) y de su altura, la cual no mide lo mismo que la altura de la pirámide. Por ello, es importante primero analizar las partes que conforman estos poliedros.

Pirámide

Una pirámide es un poliedro, en el cual todas las caras, menos la base, tienen un vértice común. Este punto se denomina vértice, cúspide o ápice de la pirámide. Además, las caras laterales de una pirámide están formadas por triángulos.

Una pirámide está formada por:

Cúspide o ápice Es el vértice de la pirámide.

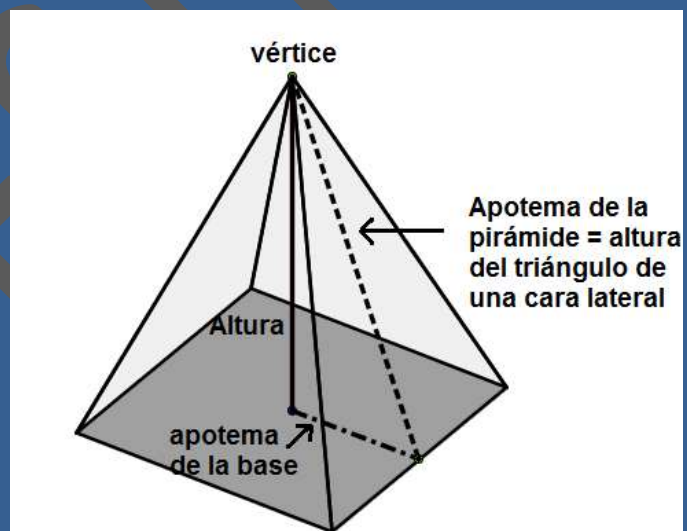
Altura: Segmento que va de la cúspide de la pirámide hasta la base de la misma en forma perpendicular. Cuando la base es regular, el pie de la altura es el centro de la base.

Apotema: Es la altura de cada uno de los triángulos que forman las caras laterales de la pirámide.

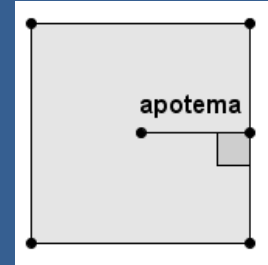
Arista Lateral: Segmento que une dos triángulos de las caras laterales. Sus extremos son la cúspide de la pirámide y un vértice de la base.

Arista Basal: Lado del polígono de la base de la pirámide.

Apotema de la base: Segmento de la base que une el centro del polígono con el punto medio de un lado del mismo.

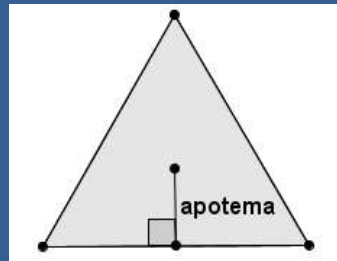


En el **cuadrado** la apotema mide la mitad de su lado: $\frac{\ell}{2}$

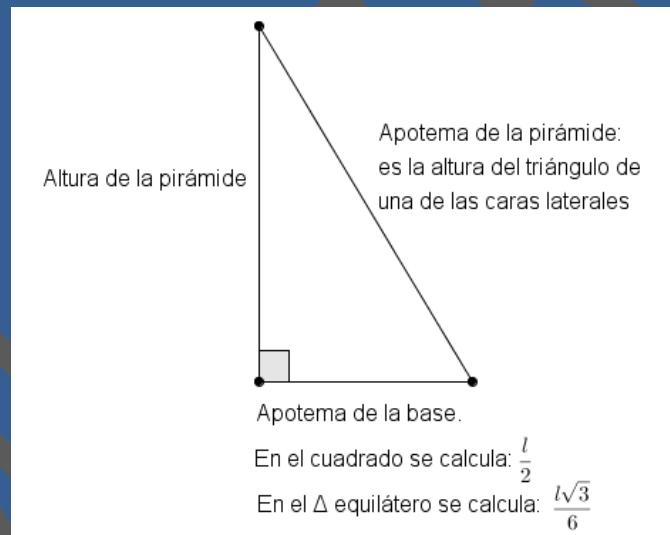


En el **triángulo equilátero** la apotema está dada por

$$\frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{6}$$



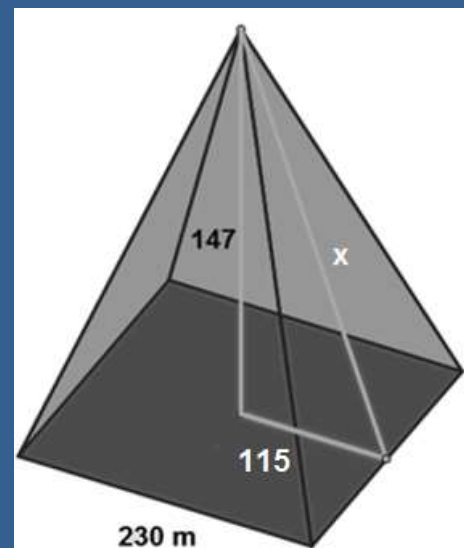
Note que siempre se forma un triángulo rectángulo, donde los catetos son: la apotema de la base y la altura de la pirámide, mientras que la hipotenusa es la apotema de la pirámide, la cual es necesaria para determinar el área de cada triángulo.



$$(\text{altura de la pirámide})^2 + (\text{apotema de la base})^2 = (\text{apotema de la pirámide})^2$$

Con esta información, podemos retomar el escenario de aprendizaje. Recordemos que se desea calcular el área de la Pirámide de Keops, que tiene una altura de 147m y una arista basal de 230m.

Al tener una base cuadrada, la apotema basal medirá la mitad de la longitud del lado del cuadrado, esto es 115m.

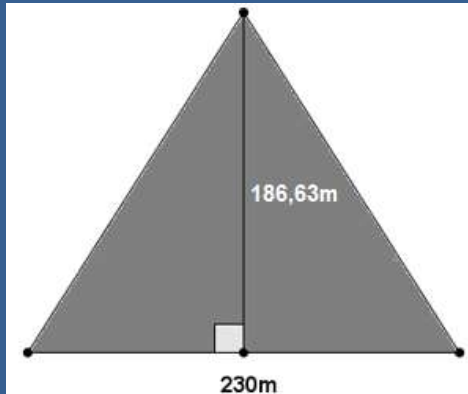


Para determinar el área de una cara lateral, es necesario conocer la apotema de la pirámide, la cual se calcula mediante el Teorema de Pitágoras:

$$147^2 + 115^2 = x^2$$

$$\sqrt{34834} = x$$

$$186,63 \approx x$$



Se ilustra uno de los triángulos que forman las caras laterales.

Por tanto, el área lateral se halla al resolver:

$$4 \cdot \frac{230 \cdot 186,63}{2} \approx 85\,849,8\text{m}$$

Mientras que el área basal, corresponde al área del cuadrado de lado 230:

$$230^2 = 52\,900\text{m}$$

$$\text{Área total: } 85\,849,8\text{m} + 52\,900\text{m} \approx 138\,749,8$$

Se concluye que, el área total de la pirámide de Keops, y por consiguiente, la cantidad de papel para forrarla, es de aproximadamente 138 749,8m.

Ejemplo

1. Determine el área total de una pirámide triangular regular cuya arista basal mide 8cm y la altura de la pirámide es de 15cm

El área basal corresponde al área del triángulo equilátero cuyo lado mide 8cm:

$$\frac{8^2 \sqrt{3}}{4} \approx 27,71\text{cm}^2$$

La apotema de la base está dada por: $\frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

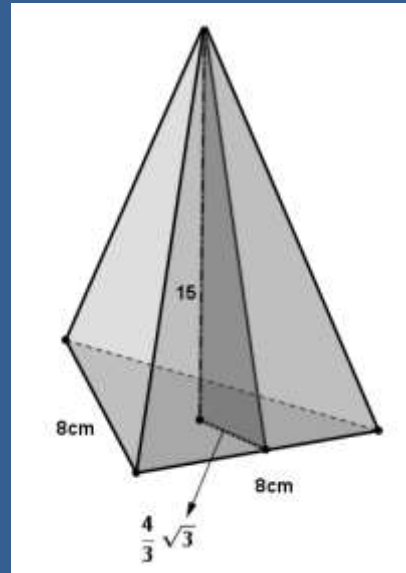
Mediante el Teorema de Pitágoras, se determina la

$$\text{apotema de la pirámide: } 15^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{691}{3}} = a \Rightarrow 15,17\text{cm} \approx a$$

$$\text{El área lateral es } 3 \cdot \frac{8 \cdot 15,17}{2} \approx 182,04\text{cm}^2$$

Por tanto, el área total de la pirámide se calcula: $27,71 + 182,04$.

El área total es de $209,75\text{cm}^2$





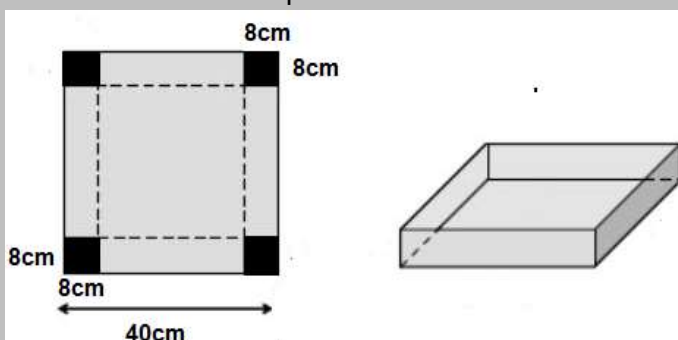
Hora de practicar

Ejercicios 6 Prisma y pirámide

1. Determine el área lateral de un prisma de base cuadrada, cuya arista basal mide 8cm y la altura 20cm.
2. Determine el área basal (las dos tapas) de un prisma cuya base es un triángulo equilátero de lado 6cm y la altura mide 10cm.
3. Calcule el área total de un paralelepípedo cuyas dimensiones de la base son 10cm y 6cm y la altura mide 3cm.
4. Determine el área de la envoltura del chocolate que se ilustra:



5. Se desea construir una caja sin tapa con un pliego de cartulina cuadrado de 40cm de lado. Para ello, se recorta en cada esquina un cuadrado de 8cm de lado (en el dibujo aparecen de color negro), de modo que al doblar hacia arriba quede la caja deseada.

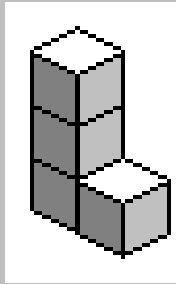


(a) Determine el área de la base de la caja.

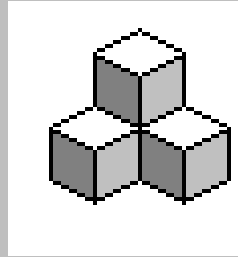
(b) Determine el área lateral de la caja

6. Se desea pintar las figuras que se adjuntan, las cuales corresponden a piezas de un cubo soma. ¿Cuántos cm^2 se deben pintar si la arista de cada cubo es de 2dm?

(a)



(b)



7. Un joven desea hacer una pecera cuadrangular la cual no tiene tapa superior. La altura de la pecera debe medir 0,5m y la arista basal 0,25m. ¿Cuánto material necesitará para construirla?
8. En un prisma cuadrangular de arista basal 14cm y altura 20cm. Calcule el área:
(a) Lateral (b) Basal (c) Total
9. En un prisma triangular de arista basal 10 cm y altura 7cm. Determine el área:
(a) Lateral (b) Basal (c) Total
10. En un prisma cuadrangular el área de la base es de 25cm^2 y la altura de 8cm. Obtenga el área:
(a) Lateral (b) Basal (c) Total
11. En un paralelepípedo el ancho mide 4cm, el largo 12cm y la altura 6cm. Determine el área:
(a) Lateral (b) Basal (c) Total
12. En un cubo la arista mide 6,5cm. Determine el área:
(a) Lateral (b) Basal (c) Total
13. Se va a construir un contenedor sin tapa. Cada metro cuadrado de la base tiene un costo de ₡ 12 000 y las caras laterales un valor de ₡ 8 000 el metro cuadrado. Si las medidas del ancho, largo y alto son 3,5m, 8m, 3m respectivamente. ¿Cuál es el costo total del contenedor?

14. La casita de un perro tiene forma de prisma triangular, cuya arista del triángulo equilátero mide 1m y el largo de la casa mide 1,5m. Si el agujero por donde entra el animalito tiene un área de $0,2 \text{ m}^2$, ¿cuál es el área de casa, incluyendo el piso y la pared de atrás?

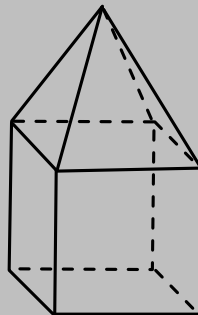


15. Determine la apotema de una pirámide cuadrangular, cuya altura mide 10cm y la arista basal 6cm.
16. Determine la altura de una pirámide cuya base es un triángulo equilátero, y la apotema mide 5cm y la arista basal 4 cm.
17. Determine el área basal de una pirámide cuadrangular, cuya apotema mide 10cm y la altura mide 8 cm
18. Calcule el área total de una pirámide cuadrangular cuya altura mide 13dm y la arista basal 8dm.
19. La apotema de una pirámide, cuya base es un triángulo equilátero, es de 4m y la arista basal de 6m. Determine el área total de la pirámide.
20. Determine el área lateral de una pirámide cuya base es un triángulo equilátero, sabiendo que su apotema mide 10cm y la arista basal 7cm

21. La pirámide del Museo del Louvre es una obra formada por cristales, que está situada en París. Tiene una altura de 20,6 m y una base cuadrada de 35 metros de lado. Determine el área de cristal de dicha estructura.

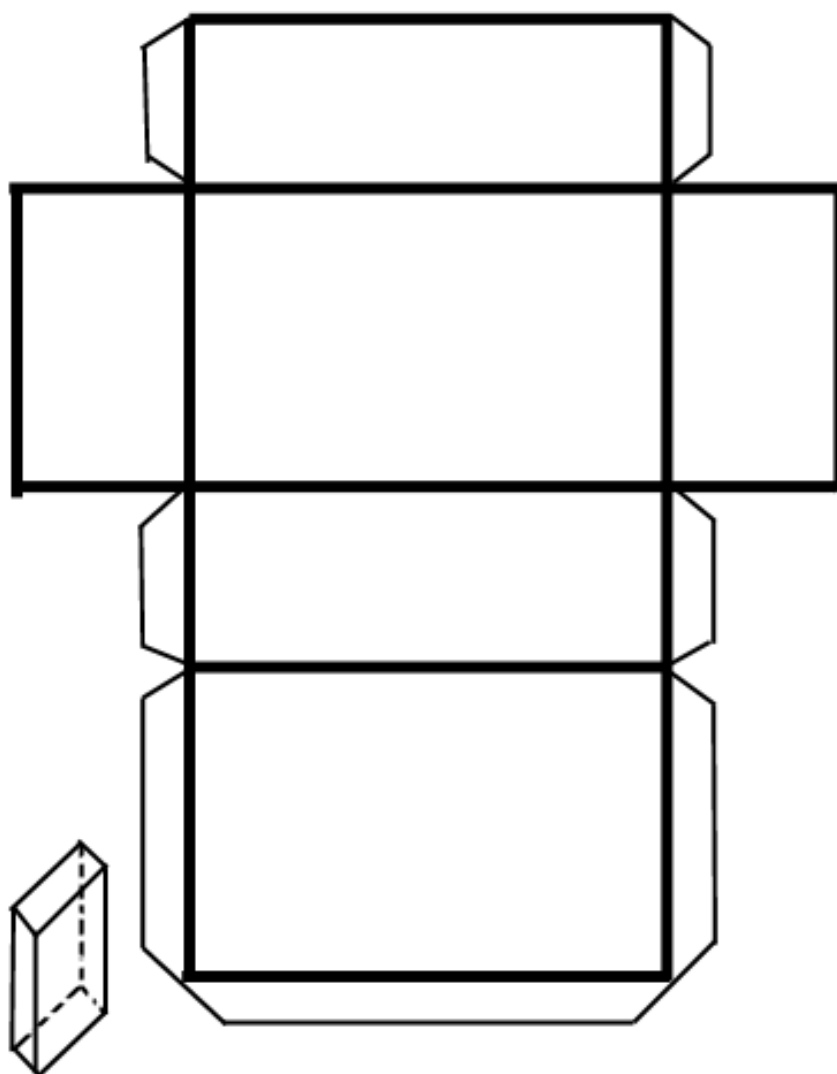


22. En una pirámide cuadrangular recta, la medida de la apotema es de 10cm y el lado de la base mide 12cm. Determine el área total de la pirámide.
23. Determine el área lateral de una pirámide cuadrangular cuya área de la base es de 36cm^2 y la altura mide 9cm.
24. Determine el área de la figura, si se sabe que la arista del cubo mide 4cm y la altura de la pirámide 2cm.

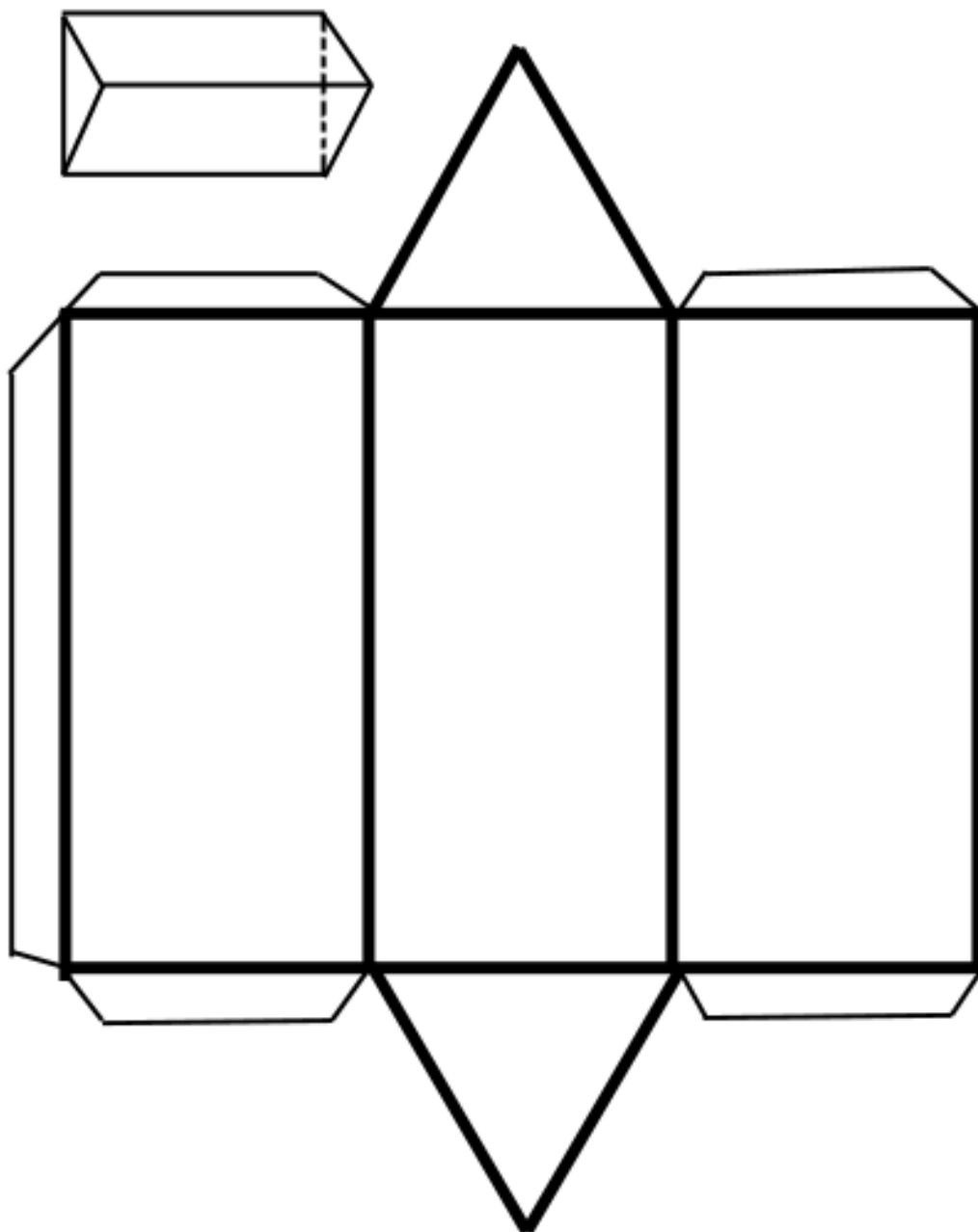


25. Recorte cada una de las siguientes figuras y construya el cuerpo sólido. Determine en cada caso el área lateral, el área basal y el área total. Escriba los cálculos en su cuaderno.

(a) Prisma de base rectangular: Paralelepípedo

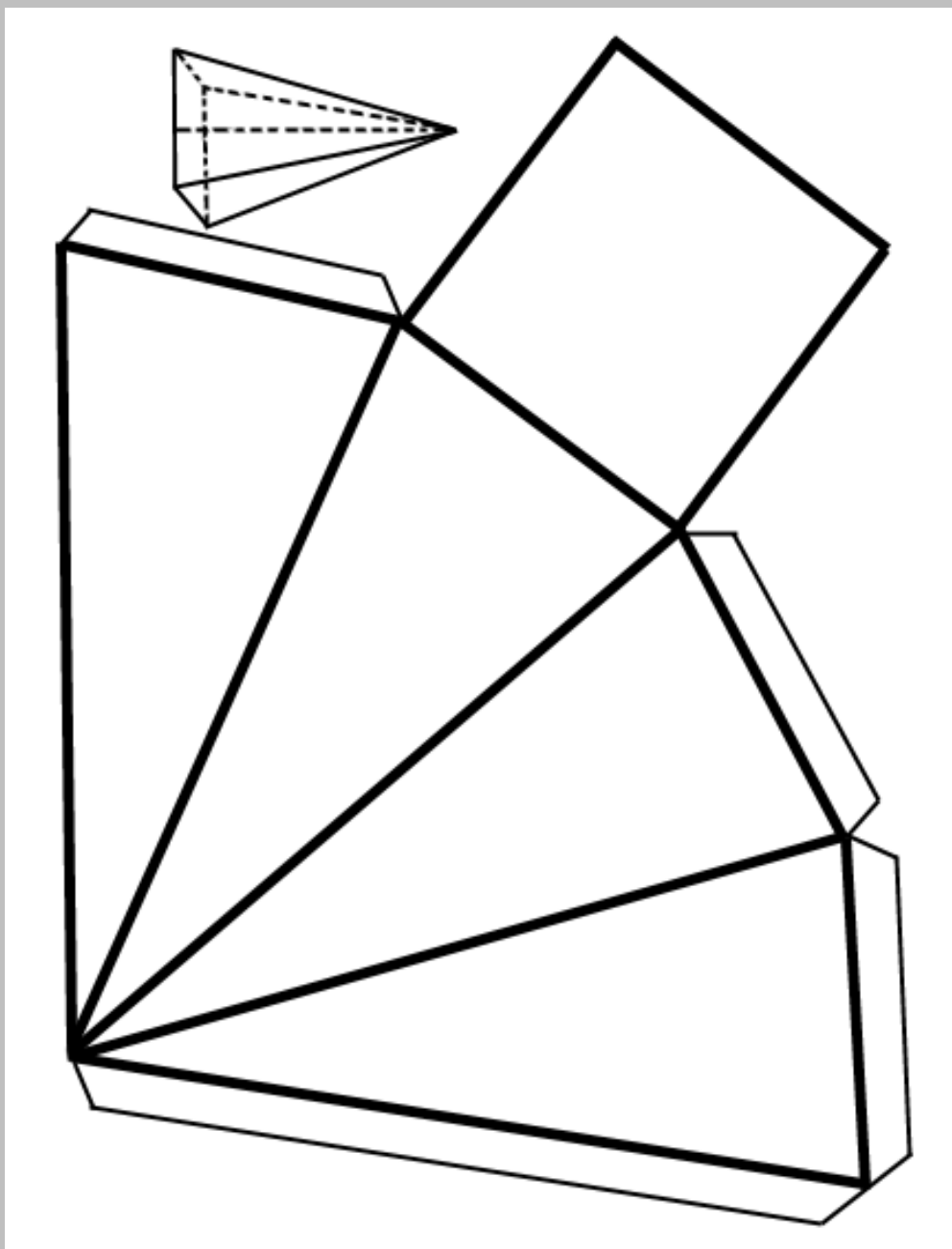


MUESTRA

(b) Prisma triangular

MUESTRA

(c) Pirámide cuadrangular o de base cuadrada



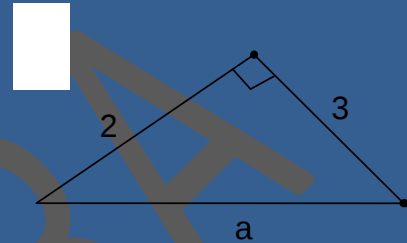
MUESTRA

Autoevaluación de la unidad

I Parte. Selección Única. Marque con un punto pequeño (•) la única opción que completa correctamente el enunciado.

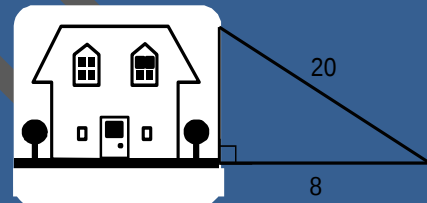
- Según la información proporcionada en la figura adjunta, el valor de “a” es

- | | |
|--------|-----------------|
| (A) 13 | (B) $\sqrt{13}$ |
| (C) 5 | (D) $\sqrt{5}$ |



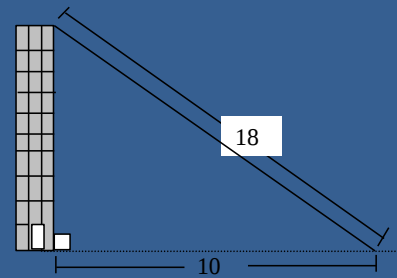
- De acuerdo con los datos de la figura adjunta, ¿cuál es la medida de la altura de la casa?

- | | |
|-----------------|------------------|
| (A) $\sqrt{28}$ | (B) $\sqrt{336}$ |
| (C) $\sqrt{12}$ | (D) $\sqrt{464}$ |



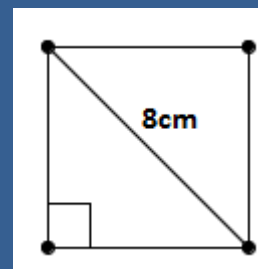
- De acuerdo con los datos de la figura adjunta ¿cuál es la medida de la altura del edificio?

- | | |
|-----------|-----------|
| (A) 8 | (B) 28 |
| (C) 14,96 | (D) 20,59 |



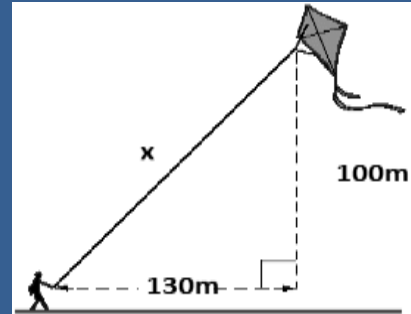
- ¿Cuál es la medida del lado de un cuadrado, si su diagonal mide 8cm?

- | | |
|----------------------------|-----------|
| (A) $8\sqrt{2} \text{ cm}$ | (B) 8 cm |
| (C) $4\sqrt{2} \text{ cm}$ | (D) 64 cm |



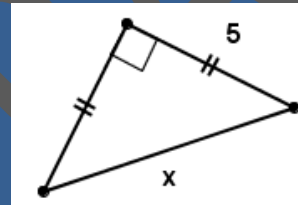
- Según los datos de la figura adjunta, ¿cuál es la medida aproximada del hilo que sujeta la cometa?

- (A) 30 m (B) 900 m
(C) 230 m (D) 164,01 m



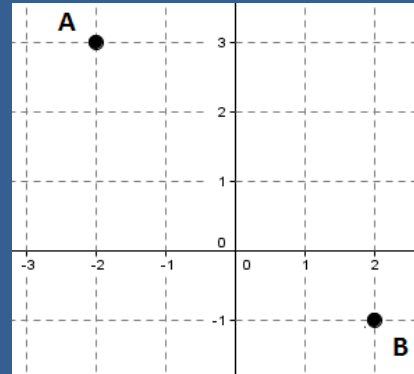
- Según la información proporcionada en la figura adjunta, el valor de “x” es

- (A) 10 (B) $5\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{10}$ (D) 50



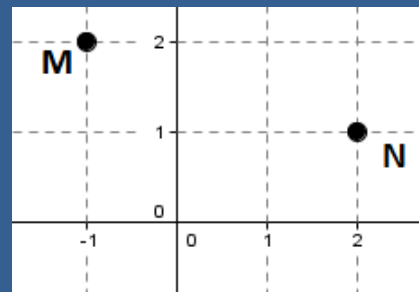
- De acuerdo con los datos proporcionados en el plano cartesiano adjunto, ¿cuál es la distancia aproximada entre los puntos A y B?

- (A) 8 (B) 5,65
(C) 4 (D) 32



- De acuerdo con los datos proporcionados en el plano cartesiano adjunto, ¿cuál es la distancia entre los puntos M y N?

- (A) 2 (B) 4
(C) 1,41 (D) 3,16



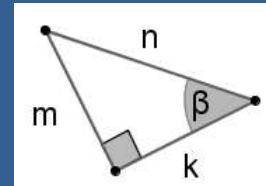
- De acuerdo con los datos proporcionados en la figura adjunta, $\sin \beta$ corresponde a

(A) $\frac{m}{n}$

(B) $\frac{n}{m}$

(C) $\frac{k}{n}$

(D) $\frac{m}{k}$



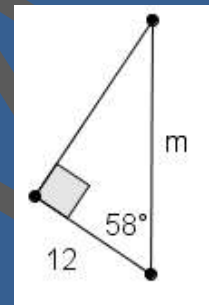
- De acuerdo con los datos de la figura, el valor aproximado de “m” corresponde a

(A) 6, 35

(B) 22, 64

(C) 10,17

(D) 19, 2



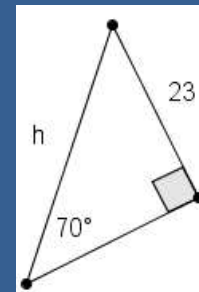
- De acuerdo con los datos de la figura, el valor aproximado “h” corresponde a

(A) 63, 19

(B) 7, 86

(C) 24, 47

(D) 8,37



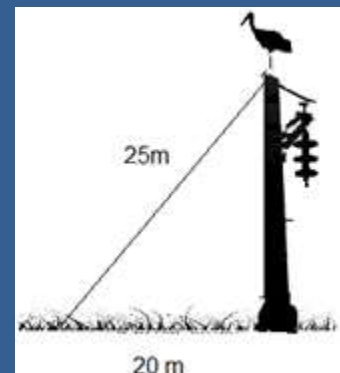
- De acuerdo con los datos de la ilustración adjunta, la medida aproximada del **ángulo** que se forma entre el poste eléctrico y el cable que lo sostiene corresponde a

(A) 53, 13

(B) 36, 66

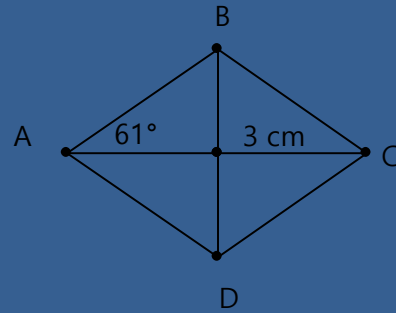
(C) 0, 01

(D) 38, 65



- De acuerdo con los datos de la figura, en el rombo ABCD, ¿cuál es la longitud aproximada de uno de sus lados?

(A) 6,18	(B) 1,45
(C) 2,62	(D) 3,43



- Una rampa tiene 286m de longitud y se eleva a una distancia vertical de 20m, entonces ¿cuál es la medida aproximada de su ángulo de elevación?

(A) 74°	(B) 4°
(C) 86°	(D) 16°

- El segmento en que se intersecan dos caras de un prisma recibe el nombre de

(A) vértice	(B) altura
(C) arista	(D) base

- Aquel poliedro cuyas caras laterales están conformadas por triángulos, recibe el nombre de

(A) prisma triangular	(B) pirámide
(C) cubo	(D) paralelepípedo

- En un paralelepípedo el ancho mide 2cm, el largo 10cm y la altura 15cm. ¿Cuál es el área de una base?

(A) 20cm^2	(B) 150cm^2
(C) 30cm^2	(D) 100cm^2

- El área total de un cubo, cuya arista mide 7m ,corresponde a

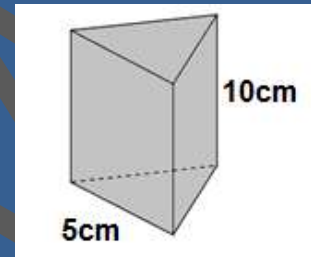
(A) 49m^2	(B) 168m^2
(C) 294m^2	(D) 196m^2

- El área **lateral** de una pirámide cuadrangular, cuya apotema mide 11dm y la arista basal 5dm, corresponde a

(A) 220dm^2	(B) $27,5\text{dm}^2$
(C) $82,5\text{dm}^2$	(D) 110dm^2

- En la figura adjunta, la base del poliedro es un triángulo equilátero. Según la información proporcionada, el área **lateral** del cuerpo sólido corresponde a

(A) 50cm^2	(B) 150cm^2
(C) $10,82\text{cm}^2$	(D) $21,64\text{cm}^2$



- El área de la **base** de una pirámide cuadrangular, cuya altura mide 8 dm y la arista basal 9dm, corresponde a

(A) 81dm^2	(B) 162dm^2
(C) 72dm^2	(D) 36dm^2

- El área de **una** cara lateral de una pirámide cuadrangular, cuya apotema mide 6dm y la arista basal 8dm, corresponde a

(A) 48dm^2	(B) 14dm^2
(C) 24dm^2	(D) 28dm^2

II Parte. Respuesta Corta. Conteste correctamente lo que se le solicita y dé su respuesta en los espacios en blanco correspondientes.

A) En cada caso determine la distancia entre los puntos A y B.

		Distancia entre los puntos A y B
i)	$A (-2, 4) \quad B (5, -1)$	
ii)	$A \left(\frac{2}{5}, 7 \right) \quad B \left(\frac{-3}{5}, 7 \right)$	
iii)	$A (3, 5\sqrt{3}) \quad B (4, \sqrt{3})$	

B) Convierta cada una de las medidas de los ángulos a grados o radianes, según sea.

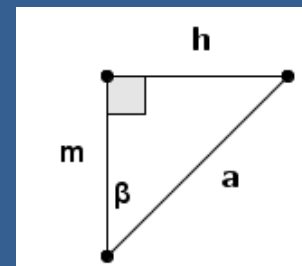
	Radianes	Grados
i)	$\frac{5}{2}\pi$	
ii)	2π	
iii)	$\frac{11\pi}{5}$	
iv)		90°
v)		215°
vi)		330°

C) De acuerdo con los datos de la figura adjunta, halle lo que se le solicita

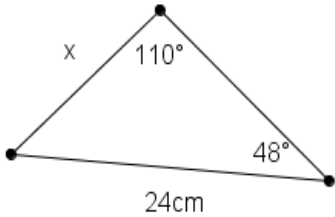
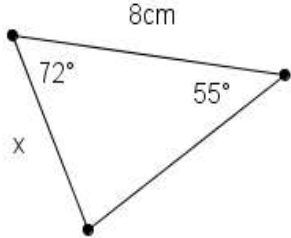
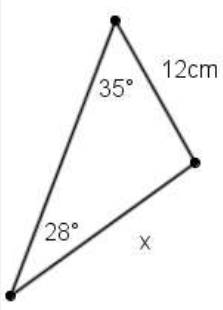
$\text{sen } \beta =$ _____

$\text{cos } \beta =$ _____

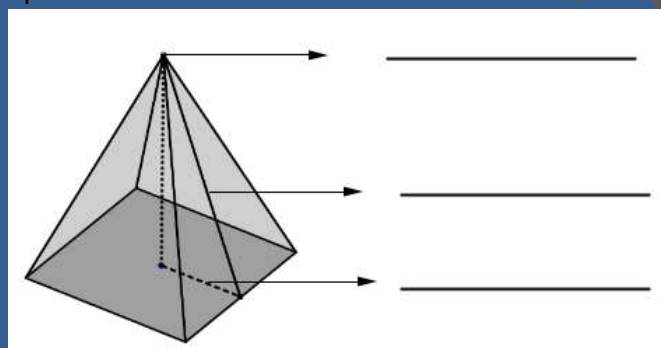
$\text{tan } \beta =$ _____



D) En cada caso, determine el valor de “x” según la información que se le proporciona.

		
x = _____	x = _____	x = _____

E) Dada la pirámide adjunta, escriba en el espacio correspondiente el nombre de las partes solicitadas.

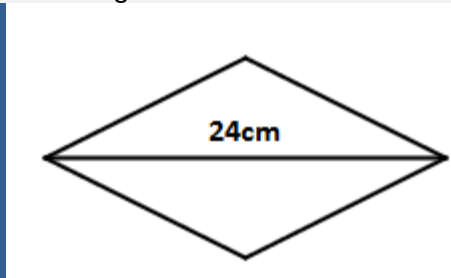


F) Complete correctamente el cuadro con la medida faltante en cada caso.

Poliedro	Medida de la arista basal de la pirámide	Medida de la altura de la pirámide	Medida de la apotema de la pirámide
Pirámide cuadrangular	16cm	6cm	
		12cm	13cm
		3cm	5cm
	4cm		8cm

III Parte. Desarrollo. Trabaje en forma clara y ordenada. Resuelva cada problema.

- A)** La diagonal mayor de un rombo mide 24 cm y el perímetro es de 60cm. Halle el valor de la diagonal menor.

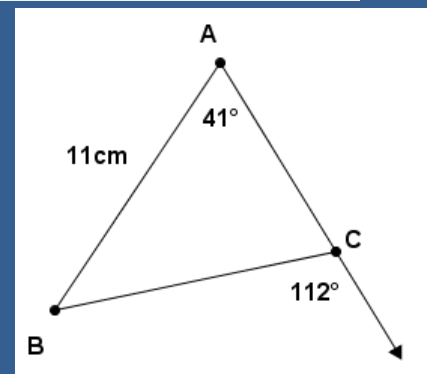


- B)** Sea α un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, donde $\operatorname{sen} \alpha = \frac{7}{9}$. Determine el valor de $\tan \alpha$

- C)** Eulalia tiene una estatura visual de 1,62m y observa un cometa con un ángulo de elevación de 32° . Si la distancia entre Eulalia y el cometa es de 20m. ¿A qué altura se encuentra el cometa?

- D)** Desde un avión se observa la parte más alta de un edificio con un ángulo de depresión de 42° . La altura a la que se encuentra el avión es de 750m y la altura del edificio es de 120m. Determine la distancia entre el avión y la parte más alta del edificio.

- E)** De acuerdo con los datos de la figura, determine el valor de AC.



- F)** Se reciclarán unas cajas de cartón sin tapa, que tienen forma de paralelepípedo, cuyas dimensiones son 30 cm de largo, 14 cm de ancho y 20 cm de alto. ¿Cuántos cm^2 de cartón se lograrían reciclar con 15 cajas?

- G)** Determine el área total de una pirámide cuadrangular cuya altura mide 10cm y la arista basal es de 12 cm

Estadística



Habilidades específicas.

1. Establecer diferencias entre variables cuantitativas: discretas y continuas.
2. Clasificar variables cuantitativas en discretas o continuas.

Variables cuantitativas

Escenario de aprendizaje

Educación para todos

Con el fin de ofrecer una beca a los estudiantes que realmente lo necesitan, el Departamento de Orientación de un centro educativo confeccionó un formulario, en el cual, entre otros aspectos, se consultaba sobre:

- a. Edad del estudiante.
- b. Cantidad de personas que viven con el estudiante.
- c. Salario bruto del encargado de familia.
- d. Distancia a la que se encuentra la casa respecto al centro educativo.
- e. Vehículos inscritos en el núcleo familiar.

Con esta información clasifiquemos las variables del estudio.

● Cada aspecto que el Departamento de Orientación *desea investigar* es una **variable** del estudio. En nuestro ejemplo, las variables son: *edad, personas que viven con el estudiante, salario bruto del encargado, distancia de la casa a la institución y número de vehículos.*

Característica o variable

La variable es la particularidad que se quiere estudiar de la unidad o dato estadístico. Aquellas variables que pueden ser medibles, reciben el nombre de **variables cuantitativas**. Estas se subdividen en dos:

- **Cualitativas discretas:** las cuales solo pueden tomar valores enteros.

Un ejemplo de variable discreta es la cantidad de personas que viven con el estudiante (ya que no es válido decir que viven 3,4 personas)

■ **Cualitativas continuas:** aquellas que pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo. En el ejemplo que estamos analizando, la edad se clasifica como variable continua, ya que un estudiante puede tener 15 años y 6 meses (15, 5 años).

● Seguidamente se clasifican las variables presentes en el escenario de aprendizaje.

Variable	Cuantitativa Discreta	Cuantitativa Continua	Posibles observaciones
Edad del estudiante.		✓	13,5 años
Cantidad de personas que viven con el estudiante.	✓		6
Salario bruto del encargado de familia.		✓	₡255 023 830, 25
Distancia a la que se encuentra la casa respecto al centro educativo.		✓	2,4 km
Vehículos inscritos en el núcleo familiar.	✓		1



Hora de practicar

Ejercicios 7

Variables discretas y continuas.

1. Clasifique las variables cuantitativas en discretas y continuas.

Variable	Cuantitativa discreta (D)	Cuantitativa continua (C)
(a) Número de habitaciones.		
(b) Temperatura en el Volcán Turrialba		
(c) Cantidad de mariposas en INbio.		
(d) Porcentaje obtenido en el examen de Matemática.		
(e) Número de accidentes por exceso de velocidad al año.		
(f) Cantidad de páginas de un libro.		
(g) Perímetro de una pizarra.		
(h) Monto a pagar por recibo de agua.		
(i) Materias que recibe por día.		
(j) Horas promedio que estudia fuera del colegio.		
(k) Cantidad de películas que ve un estudiante en el cine por mes.		
(l) Cantidad de carros que pasan por un puente bailey por día.		
(m) Cantidad de veces que asiste un estudiante al colegio por año.		
(n) Estatura de una jirafa.		
(o) Cantidad de extra clases realizados durante el año.		
(p) Cantidad de veces que se conecta en el Facebook un adolescente a la semana.		
(q) Distancia que recorre un estudiante para llegar a su colegio.		
(r) Personas que han escalado el Cerro Chirripó		
(s) Cantidad de Colegios en Guanacaste		

Habilidades específicas.

3. Reconocer la importancia de agrupar datos cuantitativos en clases o intervalos.
4. Resumir un grupo de datos cuantitativos por medio de la elaboración de un cuadro de distribuciones de frecuencia absoluta y relativa (o porcentual).
5. Interpretar la información que proporciona un cuadro de distribución de frecuencias al resumir un grupo de datos cuantitativos.
6. Resumir la información proporcionada por una distribución de frecuencias mediante un histograma o un polígono de frecuencias (absolutas o relativas), e interpretar la información que proporcionan estas representaciones gráficas.
7. Utilizar algún software especializado o una hoja de cálculo para apoyar la construcción de las distribuciones de frecuencia y sus representaciones gráficas.

Representación tabular y gráfica de datos cuantitativos continuos

Escenario de aprendizaje**Cuidemos nuestra salud**

En el Colegio Eudora, se llevó a cabo una feria de la salud, en la que se recalcó la importancia de comer sanamente. Dentro de las actividades, a cada estudiante se le determinó la masa corporal.

Analicemos los datos obtenidos de la sección 9 – 5.

La medida de la masa corporal, en kilogramos, de los 45 estudiantes de la sección 9 – 5 se presenta a continuación:

49,3	55, 8	41,5	72	59,2	80,4	40,3	53, 9	45
56, 8	69	44	55,5	60,4	55,5	77,4	71,5	61
42,8	63,8	44,5	61,3	52,8	54	50,7	69,4	57
58	48,5	57,3	53,6	44,6	41,3	62,8	64,6	66
49,6	44,2	67,2	53	54,4	45,1	72,7	49	43,6

Tal como se estudió en octavo nivel, si se desea presentar un reporte sobre la información obtenida, podemos utilizar tablas y gráficos, con el fin de que el análisis de los datos sea más sencillo.

Sin embargo, por la variabilidad de los datos de este ejemplo, y al trabajar con variables continuas, es necesario agruparlos en clases. De este modo se confecciona una tabla de distribución de frecuencias, que permitirá confeccionar gráficos como histogramas y polígonos de frecuencia.



Cuadro de distribución de frecuencias

Para tabular datos cuantitativos que poseen gran variabilidad, se siguen los siguientes pasos:

- # **Se escoge el número de clases:** La cantidad de clases, grupos o intervalos lo escoge el investigador. Se sugiere que sea aproximadamente $\sqrt{n}$, donde “n” es el número de datos.
- # **Se determina el rango o recorrido:** Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.
- # **Se calcula la amplitud del intervalo o de la clase:** Para calcularlo se hace el cociente entre el rango y el número de intervalos. Se redondea a la unidad mayor.
- # **Determinamos el punto medio de cada clase:** Cada intervalo tiene un representante llamado marca de clase o punto medio, y corresponde a la media aritmética (promedio) entre los extremos de este.
- # **Se determina la frecuencia absoluta:** Esto es, el número de datos que se ubican en cada clase.
- # **Calculamos la frecuencia relativa:** Para ello se divide la frecuencia absoluta por n. $F_r = \frac{F_a}{n}$. Si deseamos usar la frecuencia porcentual multiplicamos la frecuencia relativa por 100. $F_p = F_r \cdot 100$

Construyamos con los datos del escenario un cuadro de distribución de frecuencias.

- # La cantidad de datos es $n = 45$. Número de clases = $\sqrt{45} \approx 6,7$. Usaremos 6 **clases** o intervalos.

- # El dato mayor es 80,4 kg y el menor 40,3kg; por lo que el **rango o recorrido** es $80,4 - 40,3 = 40,1$
- # La **amplitud** se calcula $\frac{40,1}{6} \approx 6,6$. Con el redondeo usamos 7 de amplitud.
- # Para confeccionar los intervalos, se inicia con el valor menor, que en este caso es 40,3. Luego se van sumando 7 unidades. El límite inferior del intervalo queda cerrado y el superior abierto.
- # Para el punto medio de la primera clase resolvemos: $\frac{40,3 + 47,3}{2} = 43,8$
- # La frecuencia absoluta de la primera clase, será la cantidad de datos que están entre 40,3 inclusive y 47,3 excluido.
- # Para determinar la F_r de la primera clase, se resuelve $F_r = \frac{11}{45} \approx 0,24$
- # La suma de las F_r debe dar uno (o lo más aproximado posible)

Tabla 1: Distribución absoluta y porcentual de la masa corporal en kilogramos de los estudiantes de la 9 -5 del Colegio Eudora

Clases: Masa corporal	Marca o punto medio	Frecuencia Absoluta F_a	Frecuencia Relativa F_r	Frecuencia Porcentual
[40,3 , 47,3[	43,8	11	0,24	24
[47,3 , 54,3[	50,8	9	0,2	20
[54,3 , 61,3[	57,8	12	0,27	27
[61,3 , 68,3[	64,8	6	0,13	13
[68,3 , 75,3[	71,8	5	0,11	11
[75,3 , 82,3[	78,8	2	0,04	4
Totales		45	1	100



Histograma

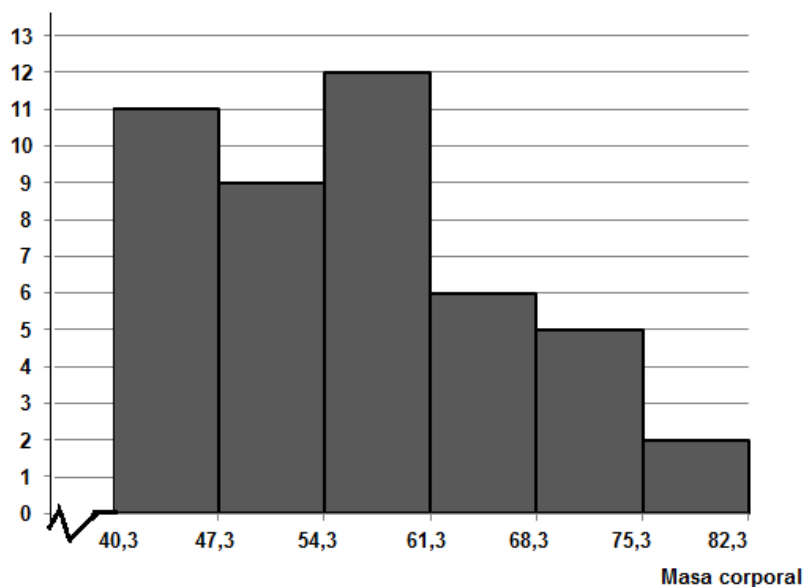
Con la información proporcionada en la Tabla 1, podemos construir un gráfico llamado histograma.

El histograma es una representación gráfica de una variable mediante barras, donde la altura de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados. En el eje x se ubican las clases y en el eje “y” las frecuencias respectivas.

Las barras deben tener el mismo ancho y sin espacio entre ellas.

La información anterior queda representada así:

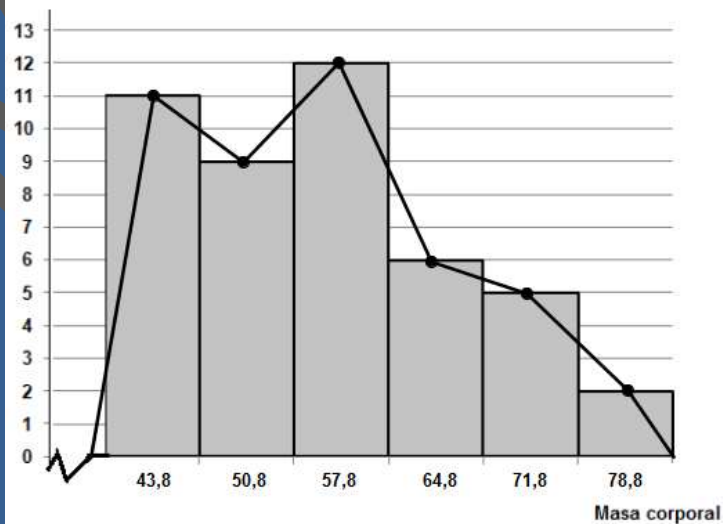
Gráfico 1: Masa corporal en kilogramos de los estudiantes de la 9 -5 del Colegio Eudora



Polígono de frecuencia

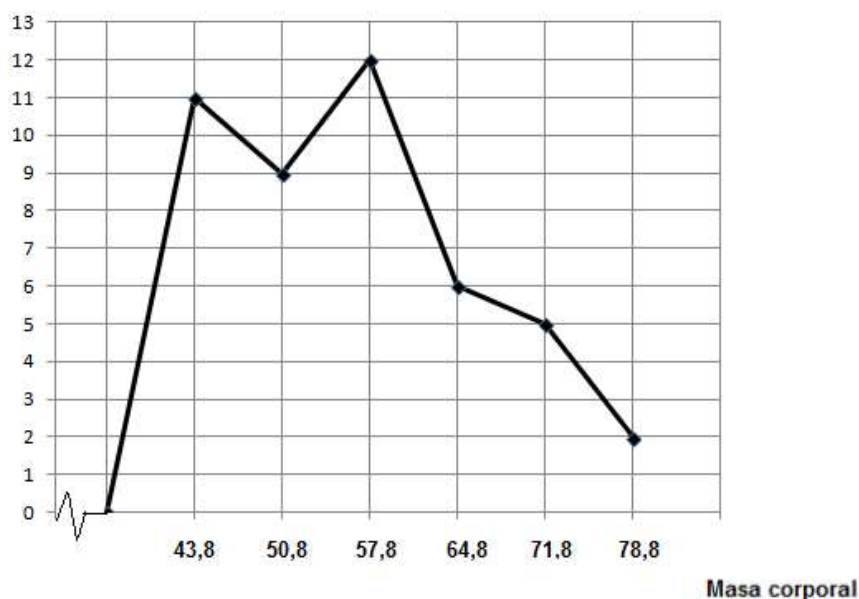
A partir de un histograma se puede crear un gráfico lineal, llamado polígono de frecuencia. Este se construye uniendo los puntos que asocian la marca o punto medio de cada clase con su respectiva frecuencia absoluta.

Gráfico 2: Masa corporal en kilogramos de los estudiantes de la 9 -5 del Colegio Eudora



Si eliminamos el histograma, nos queda únicamente el polígono de frecuencias:

Gráfico 3: Masa corporal en kilogramos de los estudiantes de la 9 -5 del Colegio Eudora



Construcción en Excel.

Para confeccionar histogramas en Excel debe estar habilitado el complemento *Análisis de datos*. Para ello debemos ir a: Inicio de Excel → Opciones de Excel → Complementos → Herramientas para análisis.

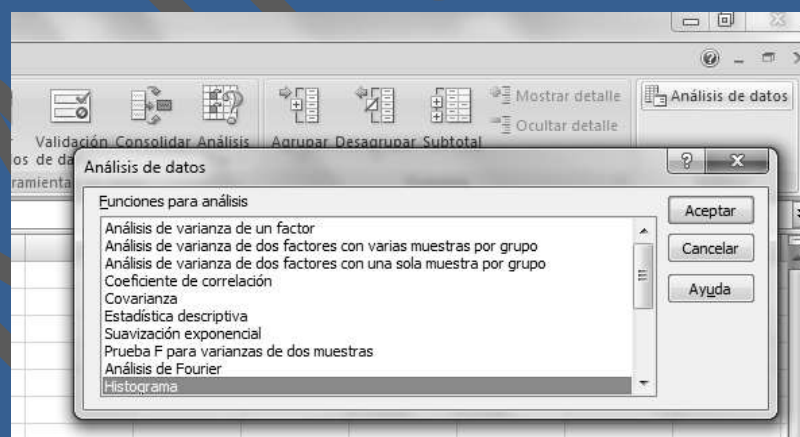
Consideremos los siguientes datos sobre las edades de un grupo de personas

22	14	23	12	16	21	16	25	4	9
15	22	11	4	11	17	23	27	12	18

- # Los datos se digitan en una columna.
- # Escogemos 5 clases
- # Para determinar el dato menor, se usa la fórmula `=MIN()`, y para el mayor `=MAX()`
- # El rango será $27 - 4 = 23$. La amplitud, se obtiene al redondear a la unidad mayor el resultado de $23 \div 5$.
- # Se construyen las clases, en una columna se escriben los límites inferiores y en otra los superiores.

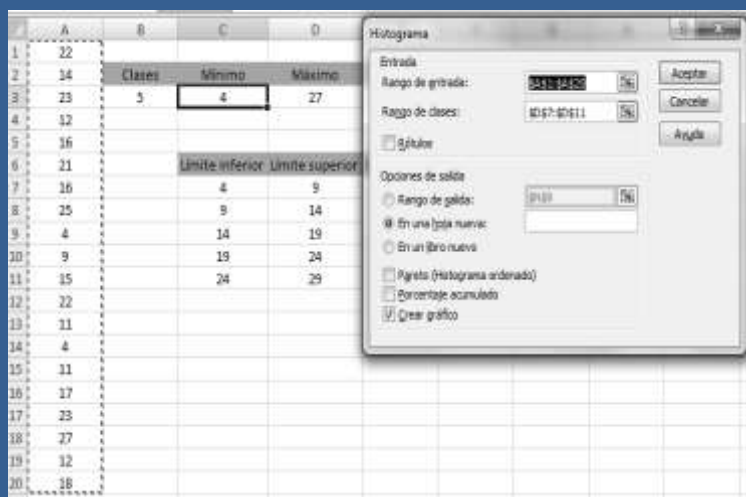
Obtener datos externos			Conexiones		Ordenar y filtros		
C3		fx		=MIN(A1:A20)			
	A	B	C	D	E	F	
1	22						
2	14	Clases	Mínimo	Máximo	Rango	Amplitud	
3	23	5	4	27	23	5	
4	12						
5	16						
6	21		Límite inferior	Límite superior	Marca		
7	16		4	9	6,5		
8	25		9	14	11,5		
9	4		14	19	16,5		
10	9		19	24	21,5		
11	15		24	29	26,5		
12	22						
13	11						
14	4						
15	11						
16	17						
17	23						
18	27						
19	12						
20	18						

- # Luego vamos al menú de herramientas del Excel y usamos la opción *Análisis de datos* y escogemos *histograma*

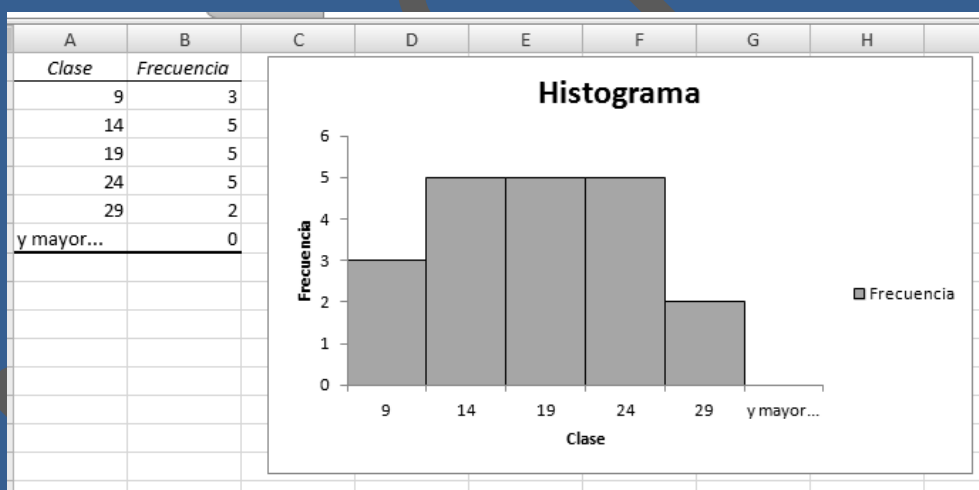


⚡ Se abre una ventana, en la cual debemos introducir los datos solicitados.

En el “*rango de entrada*” marcamos los 20 datos de la columna. En el “*rango de clases*”, señalamos los límites superiores de las clases. Por último marcamos “*Crear gráfico*” y escogemos dónde queremos que aparezca el histograma.



⚡ El Excel le construirá el histograma, el cual puede manipularse para darle el color, ancho, etiquetas y título deseado. También aparece una tabla de frecuencias.





Hora de practicar

Ejercicios 8

Distribuciones de frecuencia y sus representaciones gráficas.

1. En la tabla adjunta se muestran las edades de los conductores con licencia de un distrito de San José. De acuerdo con los datos del cuadro, indique si la afirmación es verdadera o falsa.

Edad "x" de los conductores	Frecuencia absoluta
$18 \leq x < 28$	200
$28 \leq x < 38$	305
$38 \leq x < 48$	406
$48 \leq x < 58$	200
$58 \leq x < 68$	200
$68 \leq x < 78$	46
$78 \leq x < 88$	5

- (a) 251 conductores del distrito de San José tienen una edad de 58 años o más. ()
- (b) No existe ningún conductor con 88 años. ()
- (c) 505 conductores del distrito de San José tienen una edad menor a 38 años. ()
- (d) 46 conductores del distrito de San José tienen una edad de 68 años. ()
- (e) La amplitud de las clases es de 10. ()
- (f) La muestra del estudio fue de 1 362 personas. ()
2. En el cuadro adjunto se muestra la distribución del número de partos de un hospital según la edad de las pacientes durante un mes.

Edad en años cumplidos	Número de partos
$[15, 24[$	8
$[24, 33[$	35
$[33, 42[$	9
$[42, 51[$	2

De acuerdo con los datos del cuadro, conteste.

- (a) ¿Cuántas pacientes, con menos de 33 años, dieron a luz en ese hospital?
- (b) ¿Cuántas pacientes dieron a luz teniendo **al menos** 33 años de edad en ese hospital?
- (c) ¿Cuántas clases hay en la tabla?

3. La tabla adjunta, presenta las calificaciones en matemática de los estudiantes de un grupo de noveno nivel. De acuerdo con los datos del cuadro, indique si la afirmación es verdadera o falsa.

- (a) 3 estudiantes tienen una nota mayor a 60 ()
 (b) El 25% de los estudiantes tienen una nota entre 70 y 80. ()
 (c) 3 estudiantes tienen una nota de 50. ()
 (d) 6 estudiantes tienen una nota menor a 60. ()
 (e) Aproximadamente el 5,2% de los estudiantes tienen notas entre 50 y 60. ()
 (f) El grupo en estudio está formado por 57 estudiantes ()

Calificaciones	Frecuencia Absoluta
[40,50[	3
[50,60[	3
[60,70[	7
[70,80[	25
[80, 90[	10
[90, 100[	9

4. En una encuesta, se indagó sobre los gastos mensuales de las familias costarricenses. La información se detalla a continuación. Las cantidades están en miles de colones (así, por ejemplo, 150 significa 150 000 colones)

125	205	302	325	158	210	352	350	152	115
205	305	200	300	258	190	215	169	425	306
225	100	95	168	259	305	458	250	132	178
75	102	400	105	352	196	205	245	236	70

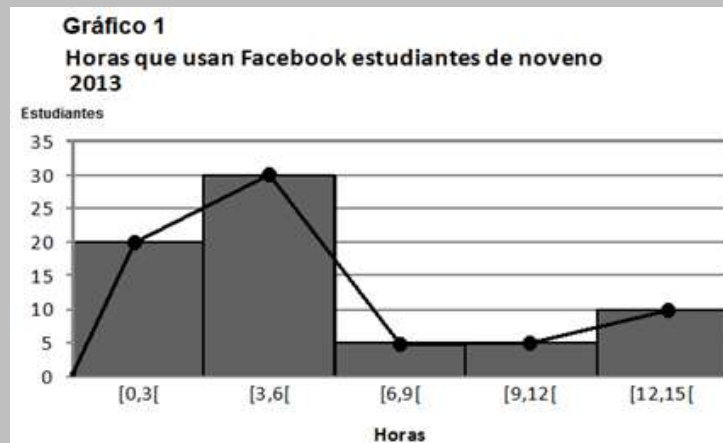
Use 6 intervalos y construya una tabla de datos agrupados (distribución de frecuencias). Deben aparecer las clases, marca de la clase, la frecuencia absoluta y porcentajes.

5. A continuación se proporciona una tabla de datos agrupados, complete correctamente cada uno de los **CUATRO** espacios que están en blanco, según corresponda.

Masa corporal de 40 estudiantes participantes en un seminario ambiental de la Universidad Nacional. 2009

Masa corporal	Frecuencia Absoluta	Porcentaje
[40,47[	12	
[47,54[	5	12,5
[54,61[		20
[61,68[	4	
	6	15
[75,82[	5	12,5

6. Con los datos proporcionados en la tabla de la pregunta 4, construya un histograma y un polígono de frecuencias.
7. Considere el histograma y polígono de frecuencias.



De acuerdo con la información proporcionada, complete:

- (a) El número de estudiantes entrevistados es el siguiente _____
 - (b) El número de estudiantes que usa el Facebook menos de 12 horas es el siguiente _____
 - (c) El porcentaje de estudiantes que usan menos de 3 horas el Facebook es el siguiente _____
 - (d) La amplitud utilizada para confeccionar el gráfico es la siguiente _____
 - (e) Construya una tabla de distribución de frecuencias con la información proporcionada.
8. En el Día de la Salud, en un centro educativo de Limón hicieron diversas actividades y competencias deportivas, entre ellas una prueba de velocidad. Participaron 42 estudiantes. Los tiempos obtenidos, en segundos, se dan a continuación.

10,2	8,1	11,4	12,7	8,7	15,3	19
9,1	10,9	13,3	16	16,3	9,8	11,3
13,8	14,4	15	13,9	14,9	10,4	13,8
14,5	13,9	11,6	15,3	15	14,4	11,9
17	16,9	9,9	10,3	11,8	13	11
10,7	12	12,3	15,6	13,9	17,2	14,8

Con la información dada, construya una tabla de distribución de frecuencias, un histograma y un polígono de frecuencias.

9. A continuación se presenta la cantidad de metros cúbicos que consumen las familias de un barrio de Alajuela por mes.

21	28,5	11	9	23	35	45	27	12	8,5
24,5	34,5	13	24,5	14	23	17	41	21	18
33	34	18,5	8,5	13,5	11,5	13	38,5	34,5	32
41,5	9,5	22,5	29	28,5	30	17	36,5	18	16,5
27	7,5	34	13	19,5	10,5	23,5	20	11,5	8,5
31	33,5	34,5	30	27,5	26	51	48	38,5	34

Con la información dada, construya una tabla de distribución de frecuencias, un histograma y un polígono de frecuencias.

10. Durante el mes de marzo, las temperaturas en grados Celsius registradas en el cantón de Pacallitas fueron de: 30, 25, 23, 31, 28, 32, 32, 26, 27, 24, 23, 22, 29, 30, 21, 19, 24, 29, 31, 33, 32, 30, 27, 26, 28, 31, 20, 24, 25, 21.

Con la información dada, construya una tabla de distribución de frecuencias, un histograma y un polígono de frecuencias.

Probabilidad



Habilidades específicas.

1. Identificar la importancia del azar en los procesos de muestreo estadístico.

Escenario de aprendizaje**Proyecto para enseñar mandarín.**

En un colegio de Cartago se desea iniciar un plan piloto para impartir mandarín en décimo nivel. Pero para diagnosticar la factibilidad y respuesta de los estudiantes, se desea empezar con una parte de la población, que sea representativa.

Entre todas las secciones de décimo hay 325 estudiantes y requieren 25 para iniciar.



Analice de qué forma se puede escoger a esos 25 alumnos.

Cuando en un estudio o proyecto, es difícil trabajar con toda la población (por factores de tiempo, costo, personal, o daño), se busca una muestra que sea representativa, es decir, un conjunto de elementos seleccionados que pongan de manifiesto las características de la población.

Aunque hay diversas maneras para escoger los 25 estudiantes, hay elecciones que son más justas que otras.

Por ejemplo, se podría hacer la selección de las siguientes formas:

- # Los 25 estudiantes con mejores promedios.
- # Hacer una lista con 325 estudiantes ordenada alfabéticamente y escoger los últimos de la lista.
- # Seleccionar una sección de décimo que tiene 25 estudiantes.
- # A cada estudiante se le asigna un número distinto, del 1 al 325 y se hace una rifa en la que sacan 25 números

A pesar de que en todas las situaciones descritas, se logra obtener 25 estudiantes de décimo nivel, la última opción es la única que garantiza la misma probabilidad a cada estudiante de ser elegido.

Con esta opción, cada estudiante tendrá una probabilidad de $\frac{1}{325}$ de ser seleccionado.

El azar resulta muy importante para garantizar que una muestra sea lo más representativa posible, en la realización de estudios estadísticos confiables.

Definición

Muestras aleatorias

Es una manera de seleccionar una muestra, en la que los elementos de la población se eligen de forma aleatoria, donde se usan mecanismos de azar que garantizan que todos los individuos de la población tengan la misma probabilidad de ser elegidos en la muestra y que los miembros de esta, se elijan de forma independiente.

Valores aleatorios en Excel

En el escenario de aprendizaje necesitamos escoger al azar 25 estudiantes, de modo que cada uno de los 325 tenga la misma probabilidad de ser elegidos. Una manera tradicional, sería hacer 325 papelitos numerados y extraer 25 de ellos, luego buscar en la lista numerada, a qué estudiante corresponde. Sin embargo, en Excel esto se puede hacer de forma muy sencilla y rápida.

Para ello, numeramos una columna del 1 al 25 que representa la cantidad de elementos de la muestra. En otra columna, aplicamos una fórmula que genere al azar 25 números de los 325 que hay en total.

Esto se logra con la función `=ALEATORIO.ENTRE()`, en la cual se escribe el primero y último valor, separados de “punto y coma”. En nuestro caso:

`=ALEATORIO.ENTRE(1;325)`

SUMA		:	X	✓	f _x	=ALEATORIO.ENTRE(1;325)	
	A	B	C	D	E	F	
1		Estudiante escogido					
2	1	=ALEATORIO.ENTRE(1;325)					
3	2						

Luego se “arrastra” hacia abajo la fórmula, con lo que se obtiene la muestra aleatoria que se buscaba.



=ALEATORIO.ENTRE(1;325)		
A	B	C
	Estudiante escogido	
1	37	
2	175	
3	9	
4	236	
5	46	
6	202	
7	274	
8	231	
9	35	
10	193	
11	105	
12	118	
13	123	
14	210	
15	253	
16	42	
17	44	
18	124	
19	275	
20	68	
21	103	
22	39	
23	277	
24	120	
25	4	



Hora de practicar

Ejercicios 9 Muestreo aleatorio.

1. Indique en cuáles situaciones se está seleccionando una muestra al azar representativa (muestreo aleatorio)
 - (a) En un colegio que tiene 1342, se desea conocer cuál deporte se puede incorporar en las clases de Educación Física, según las preferencias de los estudiantes. Para ello se escoge a 5 estudiantes de cada sección de séptimo y undécimo nivel.
 - (b) En un residencial con 210 personas, están analizando el grado de satisfacción de sus residentes. Para tal fin, van a entrevistar a 21 personas, las cuales se escogen de la siguiente manera: Se enumeran las personas del 1 al 210. Luego se divide el número de la población por la muestra ($210 \div 21 = 10$). Se saca al azar un valor entre 1 y 10. Si sale por ejemplo el 7, se escoge a esa persona y luego se elige al residente asociado con el 17, 27, 37...hasta completar la muestra.
 - (c) Se requiere conocer la opinión de los contribuyentes respecto al precio de la revisión técnica vehicular, para lo cual se busca en el registro de propiedad a 500 personas que tengan un carro con un modelo mayor a 2011.
 - (d) El dueño de una fábrica artesanal hace un estudio para diagnosticar la calidad de cierto producto. Para tal fin, examina los primeros 5 artículos que se fabrican cada día.
 - (e) Una operadora telefónica hace una encuesta para medir la satisfacción de sus usuarios. Para ello, escoge al azar 10 de cada 100 clientes que pagan una tarifa superior a 15 000 colones.
2. Con ayuda de Excel, obtenga una muestra representativa de 12 estudiantes de su sección.
3. Comente por qué es importante una muestra aleatoria.
4. Indique algún tema que le gustaría investigar en el colegio y explique de qué manera obtendría una muestra representativa.

Habilidades específicas.

2. Identificar eventos para los cuales su probabilidad no puede ser determinada empleando el concepto clásico.
3. Utilizar el concepto de frecuencia relativa como una aproximación al concepto de Probabilidad, en eventos en los cuales el espacio muestral es infinito o indeterminado.
4. Identificar que las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con evento seguro, probable e imposible también son válidas para la definición frecuencial.
5. Identificar que, para un evento particular, su frecuencia relativa de ocurrencia se aproxima hacia la probabilidad clásica conforme el número de observaciones aumenta.
6. Resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios dentro del contexto estudiantil.

Escenario de aprendizaje**Escudo o corona**

Para saber quién inicia un juego, Belarmino y Florinda lanzan una moneda al aire. Ella dice que saldrá corona. Y en efecto sale corona. Belarmino no está convencido y pide volver a lanzar la moneda. Lanza 4 veces la moneda, y 4 veces cae corona.

Supone que Florinda hace trampa, puesto que la probabilidad de que salga escudo debe ser de $1/2$ y eso no se ve reflejado en el experimento.

Analicemos la hipótesis de Belarmino. Para ello en parejas, lancen una moneda al aire unas 100 veces y vaya documentando el resultado.

¿Qué porcentaje de veces cayó escudo?



A medida que se van haciendo los lanzamientos al aire de la moneda, registre los resultados y calcule el cociente $\frac{\text{veces que cae escudo}}{\text{total de lanzamientos}}$. Puede ir llenando la siguiente tabla.

Lanzar la moneda	20 veces	50 veces	80 veces	100 veces
Número de escudos				
$\frac{\text{veces que cae escudo}}{\text{total de lanzamientos}}$				

Note que conforme aumenta el número de lanzamientos, dicho cociente se acerca a 0,5, que es la probabilidad clásica de que caiga escudo. $P(E) = \frac{1}{2}$

A este comportamiento se le conoce como la *Ley de los Grandes Números*.

Definición

Ley de los grandes números

Esta ley indica que la probabilidad de un suceso, es la constante a la que se aproxima la frecuencia relativa, cuando el experimento se repite muchísimas veces.

En el mismo ejemplo, considere los resultados de la siguiente tabla, en la que se aumenta la cantidad de veces que se hace el experimento.

Lanzar la moneda	50 veces	100 veces	150 veces	200 veces	400 veces	500 veces
Número de escudos	19	56	68	108	208	255
$\frac{\text{veces que cae escudo}}{\text{total de lanzamientos}}$	0,76	0,56	0,45	0,54	0,52	0,51

Otra forma de abordar esta situación, es mediante el uso de Excel, de modo que podamos simular el experimento. Si consideramos 500 lanzamientos, escribimos en una columna los números del 1 al 500. Asignamos el código 1 para escudo, y 2 para corona. En otra columna insertamos la función `=ALEATORIO.ENTRE(1;2)` con lo cual nos dará resultados al azar, que representan escudo o corona, según el número que salga.

A	B
Lanzamientos	
<code>=ALEATORIO.ENTRE(1;2)</code>	
2	1
3	2
4	1
5	2
6	2

Para contabilizar cuántos unos (escudos) hay, se usa la fórmula

`=CONTAR.SI(rango;1)`, de modo similar para las coronas: `=CONTAR.SI(rango;2)`

Por último, se hace el cociente entre la cantidad de escudos por 500 (total de lanzamientos), lo mismo que con las coronas. Cuanto más valores agregue en la primera columna, más se acerca la probabilidad a 0,5.

f_x	<code>=CONTAR.SI(B2:B501;1)</code>
C	D
	Observaciones
Escudo 1	233
Corona 2	232
	<code>=CONTAR.SI(B3:B502;1)</code>

f_x	=D2/500	
C	D	E
	Observaciones	Frec relativa
Escudo 1	233	0,466
Corona 2	232	0,464

Definición clásica o laplaciana de probabilidad

Recuerde que la probabilidad clásica o laplaciana es la relación entre el número de puntos muestrales a favor de un evento, entre el total de puntos muestrales.

Por ejemplo, la probabilidad de que salga un número primo, al lanzar un dado numerado del 1 al 6 es

$$\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Recuerde

Eventos Los eventos son agrupaciones de puntos muestrales en un espacio muestral. Son subconjuntos del espacio muestral.

Evento simple Contiene un único punto muestral.

Evento compuesto Es aquel que tiene más de un punto muestral.

Eventos seguros Se dan en aquellos casos en los que la ocurrencia está garantizada. Coinciden con el espacio muestral.

Eventos imposibles Son eventos imposibles aquellos que nunca pueden ocurrir. Se denota con el símbolo de conjunto vacío: $\emptyset$.

Probabilidad Posibilidad que existe entre varias posibilidades, de que un hecho o condición se produzca. Se simboliza con la letra P . Su valor está entre 0 y 1 y puede expresarse en forma de fracción o número decimal.

Frecuencia Relativa

En muchas situaciones en las que se involucra la probabilidad, el espacio muestral es muy grande, indefinido o infinito, por lo que la probabilidad clásica o laplaciana no puede ser aplicada. En estos casos, se utiliza la **probabilidad empírica, frecuencial o a posteriori** ya que solo se obtienen resultados confiables, después de realizar el experimento un gran número de veces.

Definición

Frecuencia relativa de una probabilidad

Se define como la frecuencia de un evento, al cociente que resulta de dividir el número de veces que sucedió el evento entre el número total de veces que se repitió el experimento, bajo el supuesto de que en cada repetición del experimento, el evento A tiene la misma oportunidad de ocurrir.

En el caso del lanzamiento de la moneda, se trabajó con esta **probabilidad frecuencial**, que está estrechamente relacionada con la Ley de los grandes números. Esta teoría fue expresada por Aristóteles hace aproximadamente 2 300 años a través de la frase:

“Lo probable es aquello que ocurre diariamente”

Es decir, la **frecuencia relativa** de un suceso se acerca hacia una constante, a medida que se repite el experimento, por lo que la probabilidad clásica y experimental tienden a ser similares.

Cuando se usa la definición frecuencial, es importante tomar en cuenta los siguientes aspectos:

- # La probabilidad obtenida de esta manera es únicamente una estimación del valor real.
- # Cuanto mayor sea el número de experimentos, mejor será la estimación de la probabilidad.
- # La validez de emplear esta definición depende de que las condiciones en que se realizó el experimento sean repetidas idénticamente.

Ejemplos

1) Analice la siguiente tabla y conteste lo que se solicita.

Tabla 2: Cantidad de viviendas que poseen diferentes TIC, según la región. Costa Rica, julio 2014.

TIC \ REGIÓN	Central	Chorotega	Pacífico Central	Brunca	Huetar Atlántica	Huetar Norte	Totales
Con electricidad	859 616	104 300	83 037	107 699	125 676	109 871	1 390 199
Con teléfono residencial	521 930	35 724	36 229	33 492	40 266	35 222	702 863
Con teléfono celular	809 548	98 655	77 773	101 926	120 556	107 022	1 315 480
Con teléfono residencial y sin teléfono celular	39 472	3 534	3 854	3 063	2 754	3 139	55 816
Con teléfono celular y sin teléfono residencial	327 090	66 465	45 398	71 497	83 044	74 939	668 433
Con teléfono residencial y con teléfono celular	482 458	32 190	32 375	30 429	37 512	32 083	647 047
Con fax	40 453	1 341	1 664	966	589	2 015	47 028
Con computadora	533 830	37 718	31 294	41 684	45 105	42 266	731 897
Con servicio de internet en la vivienda	531 252	41 451	37 548	45 313	56 977	57 716	770 257
Con televisor a color	851 145	99 853	81 410	104 287	122 086	103 809	1 362 590
Con televisión pagada	573 653	64 713	51 581	53 367	61 816	61 172	866 302
Con radio	659 080	60 573	50 269	70 680	75 428	55 711	971 741
Totales	860 898	105 542	83 156	108 893	128 380	112 402	1399 271

Tomado de INEC: Encuesta nacional de hogares.

Usando como referente esta información, estime:

a) La probabilidad de que una familia que vive en la región Chorotega tenga fax.

Como se encuestó a 105 524 familias de la región Chorotega, de las cuales 1 341 dijeron tener fax, la probabilidad de que una de esas familias tenga acceso a fax en su hogar es de $\frac{1\,341}{105\,524} \approx 0,0127$

Es decir, los datos indican que alrededor de 1 de cada 100 familias chorotegas tienen fax en sus casas.

- b) La probabilidad de que una familia que posee computadora, viva en la región Central.

Para determinar esta probabilidad se calcula: $\frac{533\ 830}{731\ 897} \approx 0,7293$

- c) ¿Cuántas veces más probable es que una familia de la región Central tenga electricidad, en comparación con una familia de la región Brunca?

Primero sacaremos las probabilidades de tener electricidad según cada región.

▣ Región Central: $\frac{859\ 616}{860\ 898} \approx 0,9985$

▣ Región Brunca: $\frac{107\ 699}{108\ 893} \approx 0,9890$

La razón entre ambas probabilidades es $\frac{\frac{859\ 616}{860\ 898}}{\frac{107\ 699}{108\ 893}} \approx 1,0095$. Es decir, la diferencia

entre el acceso a la electricidad en las regiones mencionadas es mínima.

- d) Analice en clase, otras probabilidades que se pueden estimar con la información de la tabla.

- e) La cobertura eléctrica en nuestro país es un gran logro. Analice esta afirmación y compárela con los datos proporcionados.



Hora de practicar

Ejercicios 10 **Probabilidad frecuencial.**

1. En una caja hay cuatro pelotas: roja, amarilla, azul y negra. Unos niños juegan a sacar una pelota al azar y analizar si alguna tiene mayor probabilidad de salir. Los resultados se resumen en la tabla.

Lanzamientos Color de pelota \	20	100	300	600	1000
Roja	3	20	71	144	237
Amarilla	1	19	68	154	251
Azul	10	36	84	149	258
Negra	6	25	77	153	254

Según la información, resuelva lo que se le solicita.

- (a) Construya una tabla que resuma las probabilidades de que salga cada color, según el número de lanzamientos
- (b) Construya un gráfico lineal con los datos obtenidos en la tabla de la pregunta (a)
- (c) Según la Ley de los grandes números, y la información obtenida en el punto (a), ¿cuál es la probabilidad de que salga una pelota negra?
- (d) De acuerdo con la información, indique un evento seguro y uno imposible.

Para cada una de las siguientes preguntas, se adjunta una tabla. Analícela y conteste lo que se le solicita

2. (a) ¿Cuál fue la probabilidad de estar desempleado en el 2008?

- (b) ¿Cuál fue la probabilidad de tener empleo en el 2007?

- (c) ¿En cuál año hubo más probabilidad de tener empleo, en el 2003 o 2005? Justifique.

- (d) Determine la probabilidad de estar desempleado según cada año, y construya un gráfico lineal.

Tabla 3. Distribución de personas con fuerza de trabajo, según su condición laboral. 2003-2009. Costa Rica

Año	Con empleo	Desempleados	Total
2003	1 640 387	117 191	1 757 578
2004	1 653 879	114 880	1 768 759
2005	1 776 903	126 165	1 903 068
2006	1 829 928	116 027	1 945 955
2007	1 925 652	92 792	2 018 444
2008	1 957 708	101 905	2 059 613
2009	1 955 507	165 944	2 121 451

Fuente: Adaptado del INEC. Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples.

3.

Tabla 4. Distribución de cantidad de viviendas, según ubicación rural o urbana. 2005-2009. Costa Rica

	2005	2006	2007	2008	2009
Urbano	666 126	695 609	710 272	731 175	749 198
Rural	448 084	460 317	471 836	491 954	507 503
Total	1 114 210	1 155 926	1 182 108	1 223 129	1 256 701

Fuente: Adaptado de Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples
Instituto Nacional de Estadística y Censos

Si se escogiera al azar una vivienda para un estudio determinado, calcule:

- (a) ¿Cuál hubiera sido la probabilidad de que en el 2008, la casa se ubicara en una zona rural?
- (b) ¿En cuál año se dio la mayor probabilidad de que una vivienda se ubicara en la zona urbana?

4.

(a) ¿Cuál fue la probabilidad que del total de incapacidades, una correspondiera al personal de odontología?

(b) ¿Cuántas veces más probable, fue que una incapacidad de los trabajadores de la CCSS correspondiera a auxiliares de enfermería, en comparación con los de radiodiagnóstico? ¿A qué se puede deber esto?

(c) ¿Cuál fue la probabilidad que, del total de incapacidades, una correspondiera al personal de farmacia?

(d) ¿Cuál fue la probabilidad que, del total de incapacidades, una correspondiera al personal de laboratorio clínico?

Tabla 5. Incapacidades de trabajadores de la CCSS. 2000

Descripción	Total de incapacidades
Auxiliares de enfermería	14860
Personal de hospitalización	7388
Personal de consulta externa	7092
Servicios domésticos	5821
Dirección y administración	5342
Enfermeras graduadas	5061
Dietética	4961
Farmacia	3412
Laboratorio clínico	2932
Médicos de consulta externa	2787
Servicios generales	1776
Lavandería y costurería	1760
Servicios de mantenimiento	1504
Odontología	1407
Médicos de hospitalización	1101
Radiodiagnóstico	751
Otros	10959
Total	78914

Fuente: Adaptado de Sistema de incapacidades.
Dirección Corporativa de Recursos Humanos. 2000.
CCSS. Costa Rica

Tabla 6. Casos de dengue por región. 2012-2013. Costa Rica

Región	2012	2013
Pacífica Central	225	2128
Chorotega	220	1498
Central Norte	243	1483
Huetar Atlántica	1385	1407
Central Sur	83	503
Brunca	46	1050
Central Este	13	128
Occidente	3	11
Huetar Norte	29	79
Total	2247	8287

5.

(a) ¿Cuál fue la probabilidad de que en el 2012 una persona infectada por Dengue viviera en la Región Central?

(b) ¿Cuántas veces fue más probable que se diera un caso de Dengue en el Pacífico Central en el 2013 con respecto al 2012?

(c) ¿Cuántas veces fue más probable que un caso de Dengue se registrara en la Región Huetar Atlántica en comparación con una de la Región Huetar Norte en el 2013?

6. (a) En 1999, del total de homicidios contra mujeres, ¿cuál fue la probabilidad de que el móvil se relacionara con problemas pasionales?

(b) En 1999, ¿cuál fue la probabilidad de que una mujer fuera asesinada por violencia familiar?

(c) En 1999, ¿cuál fue la probabilidad de que una mujer fuera asesinada por tener cargos políticos? ¿Cómo se llama a este evento?

(d) Comente con sus compañeros sobre este grave problema que aqueja a nuestro país y qué soluciones se pueden buscar para revertir estas estadísticas.

Tabla 7. Costa Rica: Homicidios de mujeres, según móvil. 1999

Causa	Número de decesos
Violencia Familiar	13
Problemas pasionales	6
Robo	4
Rencillas personales	4
Riñas	2
Otros	5
Total	34

Fuente: Adaptado de anuario de estadística del OIJ, 1999

7.

Tabla 8. Costa Rica: Muertes violentas atendidas por la Cruz Roja. 2009

Incidente	Cantidad
Agresión con arma	275
Accidentes acuáticos	101
Atropello	122
Urgencia traumática	138
Colisión	143
Vuelco	67
Caídas	43
Intoxicación	18
Electricidad/Quemaduras	16
Emergencia aérea	2
Otros	62
Total	987

Fuente: Prensa y comunicación de la Cruz Roja Costarricense

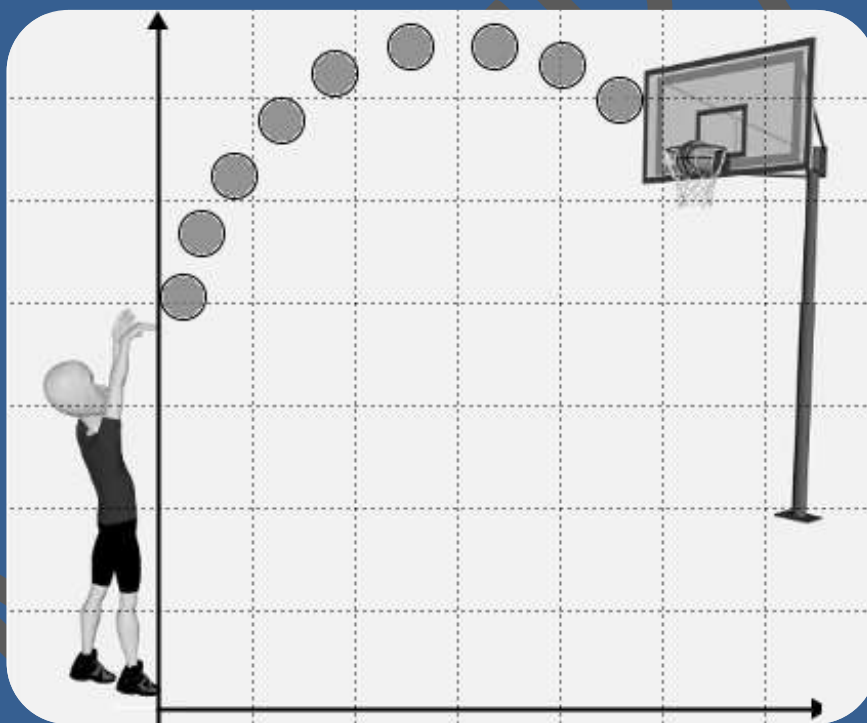
(a) En el 2009, ¿cuál fue la probabilidad que entre las muertes violentas, la Cruz Roja Costarricense atendiera una por atropello?

(b) En el 2009, de todas las muertes violentas atendidas por la Cruz Roja, ¿cuál fue la probabilidad de que se diera por una agresión con arma?

(c) Mencione un evento imposible

(d) Comente con sus compañeros la información contenida en esta tabla.

Relaciones y Álgebra



Habilidad específica.

1. Factorizar y simplificar expresiones algebraicas.

Escenario de aprendizaje

Armar y desarmar

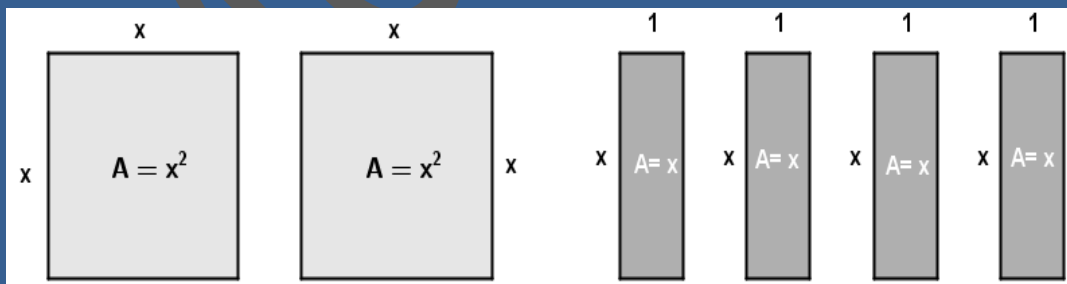
En un trabajo que realiza Engracia, determina que el área de un rectángulo está dada por el polinomio $2x^2 + 4x$. Sin embargo, no recuerda cuáles eran las dimensiones del largo y ancho de ese cuadrilátero.

¿Cómo se pueden expresar algebraicamente esas dimensiones?



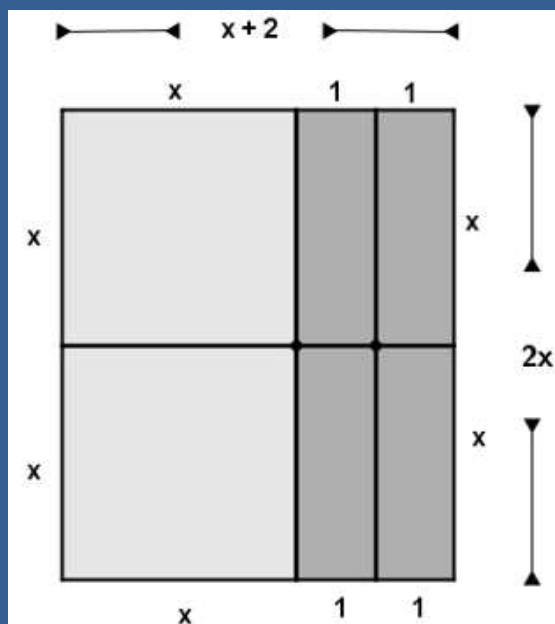
Una manera de dar respuesta a este escenario, es construyendo el rectángulo de Engracia. Sabemos que su área es de $2x^2 + 4x$, por lo que descompondremos el rectángulo en piezas que tengan las siguientes dimensiones:

- Dos cuadrados de “x” unidades de lado.
- Cuatro rectángulos, de largo “x” unidades y de ancho 1 unidad.



En efecto, si se suma el área de todos estos cuadriláteros, tendremos el área original de $2x^2 + 4x$

Ahora formemos un solo rectángulo con cada una de estas partes:



Observe que las dimensiones del rectángulo son “ $2x$ ” unidades de ancho y “ $x + 2$ ” unidades de largo.

Es fácil comprobar que $2x^2 + 4x = 2x(x + 2)$

A este proceso, en el que partimos de $2x^2 + 4x$ y obtuvimos el producto $2x(x + 2)$ se le conoce como **factorización de polinomios**.

Definición

Factorización

Factorizar un polinomio P consiste en expresarlo como el producto de dos o más polinomios de grado menor o igual que el grado de P.

Existen diversos métodos para determinar la factorización de un polinomio, y también se puede dar el caso de que el polinomio no sea factorizable. Seguidamente estudiaremos ciertos casos.

Factorización por factor común

Primero se obtiene el máximo factor común, que consiste en:

- # El MCD de los coeficientes numéricos de cada término.
- # El literal que se repita en todos los términos con menor exponente.

Se divide el polinomio entre el factor común.

Ejemplos: Factorice completamente cada polinomio.

(a) $6x^2y^7z - 18x^3y^3$

Se obtiene el MCD de los coeficientes numéricos.

$$\boxed{6}x^2y^7z - \boxed{18}x^3y^3$$

6	18	2
3	9	3
1	3	MCD = 2 · 3 = 6

En los literales, se saca a factor común los literales que se repiten con menor exponente.

$$6\boxed{x^2}y^7z - 18x^3\boxed{y^3}$$

De este modo el factor común será $6x^2y^3$

El siguiente paso es dividir el polinomio $6x^2y^7z - 18x^3y^3$ por $6x^2y^3$, así:

$$(6x^2y^7z - 18x^3y^3) \div (6x^2y^3) = \frac{6x^2y^7z}{6x^2y^3} - \frac{18x^3y^3}{6x^2y^3} = y^4z - 3x$$

Así la factorización queda:

$$6x^2y^3(y^4z - 3x)$$

$$(b) \quad \frac{3}{7}h^5km^9 - \frac{5k^7m^9}{49} + \frac{3m^{11}k}{343}$$

Se saca el MCD tanto para el numerador como para el denominador. Se observa que los números 3 y 5 son primos relativos, esto es que el MCD de esos números es 1, por tanto, no es necesario escribirlo.

$$\begin{aligned} & \frac{3}{7}h^5k^{13}m^9 - \frac{5k^7m^9}{49} + \frac{3m^{11}k}{343} \\ &= \frac{km^9}{7} \left(3h^5k^{12} - \frac{5k^6}{7} + \frac{3m^2}{49} \right) \end{aligned} \quad \begin{array}{r} 7 \quad 49 \quad 343 \\ 1 \quad 7 \quad 49 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} 7 \\ \text{MCD} = 7 \end{array}$$

Factorización por factor común con paréntesis

Cuando en una expresión hay polinomios comunes en cada término, se saca a factor la expresión (que está en paréntesis).

Si hay expresiones que únicamente difieren en el signo, se pueden transformar para que sean idénticas, esto se logra al sacar a factor común un signo negativo. Luego se sigue el mismo proceso.

Ejemplos: Factorice completamente cada polinomio.

$$(a) \quad 4x^2(a+2) - y(a+2) + (a+2)$$

El factor común es el polinomio $(a+2)$. Por tanto, se hace la división:

$$[4x^2(a+2) - y(a+2) + (a+2)] \div (a+2)$$

Con lo que se obtiene:

$$(a+2)(4x^2 - y + 1)$$

$$(b) \quad (b-3) - 5(a+4)(b-3)$$

$$= (b-3)(1 - 5(a+4)) \quad \text{Se saca a factor } (b-3) \text{ y se hace la división}$$

$$= (b-3)(1 - 5a - 20) \quad \text{Al distribuir el } -5$$

$$= (b-3)(-19 - 5a) \quad \text{Suma de términos semejantes}$$

$$(c) \quad 4(m+n) - 2n(m+n) - (m+n)^2$$

$$= (m+n)[4 - 2n - (m+n)]$$

$$= (m+n)(4 - 2n - m - n)$$

$$= (m+n)(4 - 3n - m)$$

$$(d) \quad a(a-b) + 4(b-a) - (-b+a)$$

En este ejercicio, los términos del binomio del centro tienen los signos contrarios al resto de binomios, entonces lo cambiamos de signo así:

$$a(a-b) + 4(b-a) - (-b+a)$$

$$= a(a-b) - 4(a-b) - (-b+a)$$

$$= (a-b)(a-4-1)$$

$$= (a-b)(a-5)$$



Factorización mediante fórmulas notables

En octavo nivel, se estudiaron algunas fórmulas o productos notables, entre los que destacaban:

$$\# \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\# \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\# \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Por tanto, factorizar mediante el método de fórmulas notables, consiste en partir del lado izquierdo de cada igualdad anterior, para llegar a la expresión de la derecha, así:

$$\# \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$\# \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$\# \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

Para identificar un trinomio cuadrado perfecto, luego de estar ordenado descendientemente, el primero y último término deben tener raíz cuadrada exacta, y el término del centro deberá ser el doble producto de esas raíces.

Por ejemplo:

$$25y^2 + 10xy + x^2$$

Su raíz cuadrada es $5y$ Doble producto de las raíces: $2 \cdot 5y \cdot x$ Su raíz cuadrada es x

Este polinomio cumple con las condiciones, por tanto, para factorizarlo, se extrae la raíz cuadrada del primer y último término. La factorización será el cuadrado de la suma o resta de esas raíces, según el signo del segundo término.

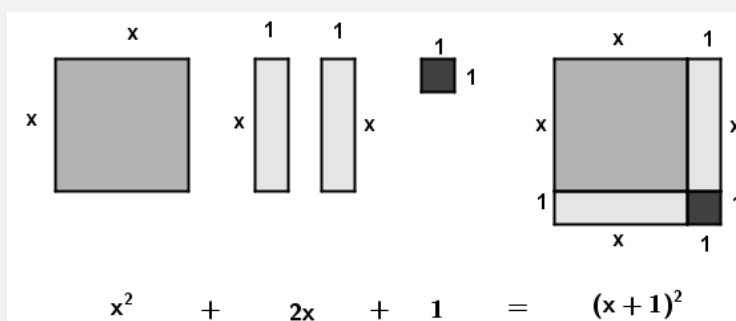
$$25y^2 + 10xy + x^2 = (5y + x)^2$$

Análisis geométrico

Considere un cuadrado de área $x^2 + 2x + 1$.

¿Qué expresión algebraica representa la medida del lado de ese cuadrado?

Se procede de modo similar al escenario de aprendizaje, considerando un cuadrado de lado "x", dos rectángulos de lados "x" y "1" y un cuadrado de lado "1", de modo que la suma de las áreas de esas 4 figuras geométricas sea de $x^2 + 2x + 1$



Ejemplos: Factorice completamente cada polinomio.

(a) $-12m + 9m^2 + 4$

Se ordena el polinomio $9m^2 - 12m + 4$ y se verifican las condiciones.

$$9m^2 - 12m + 4$$

$3m \quad -2 \cdot 3m \cdot 2 \quad -2$

Con lo cual se obtiene que: $9m^2 - 12m + 4 = (3m - 4)^2$

(b) $\frac{x^2}{4} - 2x + 4$

Como cumple las condiciones, la factorización de $\frac{x^2}{4} - 2x + 4$ es $\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$

(c) $(x+1)^2 - 4(x+1) + 4$

Se tiene $\underbrace{(x+1)^2}_{(x+1)^2} - 4(x+1) + 4$, con lo que se concluye que

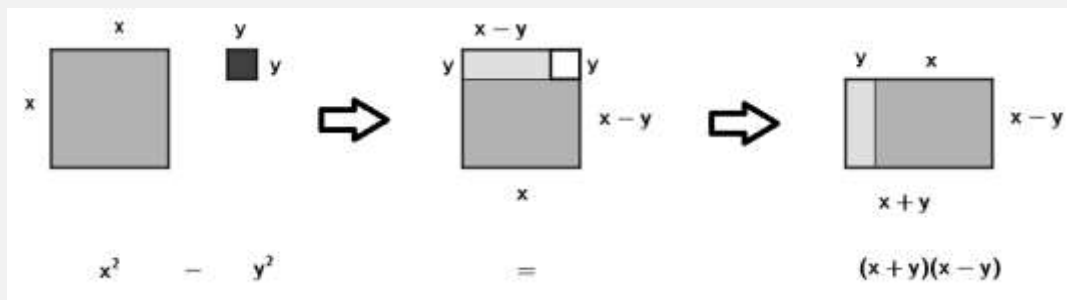
$$(x+1)^2 - 4(x+1) + 4 = [(x+1) - 2]^2 = (x-1)^2$$

Factorización por diferencia de cuadrados

La factorización de una diferencia de cuadrados consiste en obtener la raíz cuadrada de cada uno de los términos, luego se expresan estos resultados como el producto de la suma y la diferencia de ambas raíces.

Análisis geométrico

Considere un cuadrado de área x^2 al que se le resta un área de y^2 .



Ejemplos: Factorice completamente cada polinomio.

(a) $16x^2 - 25y^2$

Extracción de la raíz cuadrada de cada término

$$\begin{array}{ccc} 16x^2 & - & 25y^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rightarrow 4x & & 5y \end{array}$$

Se expresa como el producto de la suma y la diferencia de ambos.

$$16x^2 - 25y^2 = (4x + 5y)(4x - 5y)$$

(b) $16 - m^{16}$

$$= (4 + m^8) \cdot \underbrace{(4 - m^8)}_{\text{se vuelve a factorizar}}$$

$$= (4 + m^8) \overbrace{(2 + m^4)(2 - m^4)}$$

(c) $100 - (x - 5)^2$

$$\begin{array}{ccc} 100 - \underbrace{(x - 5)^2} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{\begin{array}{l} 10 + (x - 5) \\ 10 - (x - 5) \end{array}} & & \\ = [10 + (x - 5)][10 - (x - 5)] & & \\ = (10 + x - 5)(10 - x + 5) & & \\ = (5 + x)(15 - x) & & \end{array}$$

(d) $(a - 2b)^2 - (2a + 5b)^2$

$$\begin{array}{ccc} (a - 2b)^2 - (2a + 5b)^2 & & \\ \boxed{\begin{array}{l} (a - 2b) + (2a + 5b) \\ (a - 2b) - (2a + 5b) \end{array}} & & \\ = (a - 2b + 2a + 5b)(a - 2b - 2a - 5b) & & \\ = (3a + 3b)(-a - 7b) & & \\ = 3(a + b)(-a - 7b) & & \\ = -3(a + b)(a + 7b) & & \end{array}$$

Factorización por agrupamiento

Hay casos donde al factorizar el polinomio es necesario formar grupos, según características comunes. En este nivel estudiaremos dos situaciones:

Grupos y factor común

Consiste en agrupar términos de manera que al factorizar cada uno, se obtenga en los grupos resultantes, una **expresión común** para luego sacarla como factor y volver a factorizar.

Ejemplos: Factorice completamente cada polinomio.

(a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

Primero podemos observar que no es posible obtener un factor común de los cuatro términos, por lo cual, hacemos parejas de términos que sí tengan algún factor en común.

$$\begin{array}{l} \underbrace{x^3 - x^2 + 2x - 2}_{\text{Grupos}} \\ \\ \begin{array}{cc} \text{Al sacar F. Común} & \text{Al sacar F. Común} \\ = & x^2(x-1) + 2(x-1) \end{array} \end{array}$$

Y luego se toma $(x-1)$ como factor común: $(x-1)(x^2+2)$

(b) $3hn^2k - 8a + 2k - 12ahn^2$

Se agrupan aquellos términos que tienen factores comunes:

$$(3hn^2k - 12ahn^2) + (-8a + 2k)$$

Se saca el factor común en cada grupo:

$$(3hn^2k - 12ahn^2) + (-8a + 2k) = 3hn^2(k - 4a) + 2(-4a + k)$$

Se procede a factorizar mediante factor común con paréntesis

$$\begin{aligned} & 3hn^2(k - 4a) + 2(-4a + k) \\ & = (k - 4a)(3hn^2 + 2) \end{aligned}$$

(c) $2m^2 - 10hm - 7m + 35h$

Formamos las parejas:

$$(2m^2 - 10hm) + (-7m + 35h)$$

Se factoriza cada binomio:

$$2m(m - 5h) + 7(-m + 5h)$$

Se saca un signo negativo en el segundo término:

$$2m(m - 5h) - 7(m - 5h)$$

Se saca a factor común el polinomio:

$$(m - 5h)(2m - 7)$$

Grupos y diferencia de cuadrados

Este método de factorización se aplica cuando en un polinomio existe un trinomio cuadrado perfecto y un término con raíz cuadrada exacta, de modo que luego de aplicar la factorización del trinomio, se proceda a hacer diferencia de cuadrados.

Ejemplos: Factorice completamente cada polinomio.

(a) $x^2 + 9 - m^4 + 6x$

Se agrupa el trinomio:

$$(x^2 + 6x + 9) - m^4$$

Se factoriza como un trinomio cuadrado perfecto:

$$(x + 3)^2 - m^4$$

Y por último se realiza la diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} & [(x + 3) - m^2][(x + 3) + m^2] \\ &= (x + 3 - m^2)(x + 3 + m^2) \end{aligned}$$

(b) $8ab + 25 - 16a^2 - b^2$

Se agrupa el trinomio:

$$25 + (-16a^2 + 8ab - b^2)$$

Se saca un negativo a factor común del trinomio: $25 - (16a^2 - 8ab + b^2)$

Luego se procede como en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
 & 25 - (16a^2 - 8ab + b^2) \\
 &= 25 - (4a - b)^2 \\
 &= [5 + (4a - b)][5 - (4a - b)] \\
 &= (5 + 4a - b)(5 - 4a + b)
 \end{aligned}$$



Factorización por inspección

Para comprender mejor este método, analicemos el siguiente producto:

$$(x + m)(x + n) = x^2 + xn + mx + mn = x^2 + x(n + m) + mn$$

Por tanto, la factorización de un trinomio de la forma $x^2 + x(n + m) + mn$ es

$$(x + m)(x + n)$$

Esto se puede representar así:

$$\begin{array}{rcl}
 & x^2 + x(n + m) + mn & \\
 x & & + m \\
 x & & + n
 \end{array}$$

Donde:

- ✚ El producto $x \cdot x$ da el primer término x^2
- ✚ El producto $m \cdot n$ da como resultado el último término mn
- ✚ El coeficiente del segundo término es la suma de n y m : $m + n$

Ejemplos: Factorice completamente cada polinomio.

(a) $x^2 + 9x + 14$

Es necesario, para factorizar este polinomio, hallar dos números que multiplicados den 14 y sumados 9. Si por ejemplo, se escogieran 1 y 14, a pesar de que la multiplicación da 14, la suma no es 9.

Por tanto, los números que funcionan son 7 y 2, con lo cual se obtiene:

$$\begin{array}{rcl}
 & x^2 + 9x + 14 & \\
 x & & + 7 \\
 x & & + 2
 \end{array}$$

De este modo $x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$

(b) $x^2 + x - 20$

Debemos encontrar dos números cuyo producto sea -20 y su suma dé 1 .
Estos son -4 y 5 .

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 20 \\ x \quad -4 \\ x \quad +5 \\ \hline = (x - 4)(x + 5) \end{array}$$

(c) $-x^2 + 7x - 6$

Es recomendable, que cuando el coeficiente de x^2 es negativo, se saque a factor común el negativo y luego se factorice como en los ejemplos anteriores.

$$\begin{array}{r} -x^2 + 7x - 6 \\ = -(x^2 - 7x + 6) \\ \quad x \quad -6 \\ \quad x \quad -1 \\ \hline = -(x - 6)(x - 1) \end{array}$$

En el caso de que el coeficiente del x^2 no sea 1 , el polinomio $ax^2 + bx + c$ debe ser expresado como $(mn)x^2 + (mq + np)x + (pq)$, de modo que se pueda factorizar así:

$$\begin{array}{r} (mn)x^2 + (mq + np)x + (pq) \\ \quad mx \quad + \quad p \\ \quad nx \quad + \quad q \end{array}$$

Ejemplos: Factorice completamente cada polinomio.

(d) $6x^2 - 7x - 3$

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 7x - 3 \\ 3x \quad +1 \\ 2x \quad -3 \end{array} \quad \text{Note que } \boxed{3x \cdot 2x = 6x^2} \quad \boxed{1 \cdot -3 = -3} \quad \boxed{3 \cdot -3 + 2 \cdot 1 = -7}$$

Por lo cual, la factorización de $6x^2 - 7x - 3$ es $(3x + 1)(2x - 3)$

(e) $13m + 5m^2 - 6$

Primero se ordena el trinomio $5m^2 + 13m - 6$

$$5m^2 + 13m - 6$$

$$5m \quad -2 \quad \text{Se cumple que}$$

$$m \quad +3$$

$$5m \cdot m = 5m^2$$

$$-2 \cdot 3 = -6$$

$$5 \cdot 3 + 1 \cdot -2 = 13$$

Se concluye que la factorización de $5m^2 + 13m - 6$ es $(5m - 2)(m + 3)$



Factorización por combinación de métodos

Ejemplos: Factorice completamente cada polinomio.

(a) $3ax^2 - 12ax - 63a$

Se obtiene el factor "3a" y se factoriza

$$\rightarrow 3a(x^2 - 4x - 21)$$

Se factoriza por inspección

$$\rightarrow 3a(x - 7)(x + 3)$$

(b) $x^2a - 4a - x^2b + 4b$

Se agrupa: $(x^2a - x^2b) + (-4a + 4b)$

Se saca factor común: $x^2(a - b) + 4(-a + b)$

Se hace cambio de signo: $x^2(a - b) - 4(a - b)$

Se factoriza por factor común: $(a - b)(x^2 - 4)$

Se realiza diferencia de cuadrados $(a - b)(x + 2)(x - 2)$

Habilidad específica.

2. Expresar $x^2 + px + q$ como $(x + h)^2 + k$

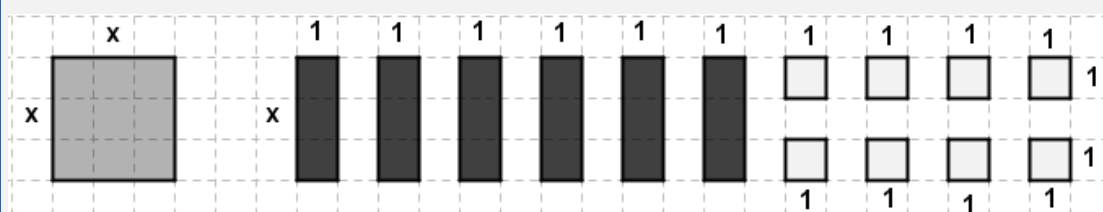
Escenario de aprendizaje

¡A completar!

Tal como se ha desarrollado en el tema de factorización de polinomios, diversos procesos algebraicos tienen una explicación geométrica.

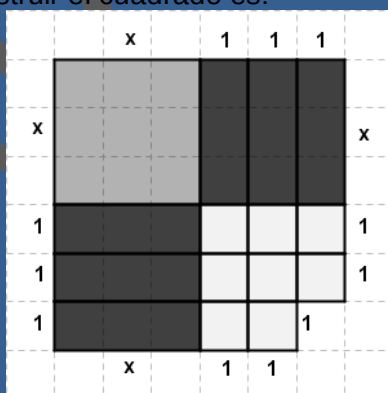
Uno de esos procesos, se conoce como **completar de cuadrados**.

Por ejemplo, consideremos el polinomio $x^2 + 6x + 8$, y tratemos de formar un cuadrado.



Puede ayudarse con las piezas que hay al final del libro.

Una manera de intentar construir el cuadrado es:



Note que para completar el cuadrado de lado $(x + 3)$ hace falta un cuadrado de área 1. Por tanto, el área de esta figura es $(x + 3)^2 - 1^2 = (x + 3)^2 - 1$

Se logra concluir que $x^2 + 6x + 8 = (x + 3)^2 - 1$

Completar cuadrados

Completar cuadrados es el proceso por el cual un trinomio de la forma $x^2 + px + q$ se expresa como $(x + h)^2 + k$

Un algoritmo para completar cuadrados en una expresión de la forma $x^2 + px + q$ consiste en:

- # Resolver $\left(\frac{p}{2}\right)^2$
- # Sumar un cero de la forma $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ en el polinomio $x^2 + px + q$
- # Expresar el polinomio como $\left(x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$
- # Factorizar de la forma $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$

Ejemplos: Expresar el trinomio a la forma $(x + h)^2 + k$

(a) $x^2 - 14x + 10$

Seguimos los pasos indicados anteriormente.

- # $\left(\frac{-14}{2}\right)^2 = 49$
- # Se suma el cero $49 - 49$ al polinomio: $x^2 - 14x + 10 + 49 - 49$
- # Se agrupa el trinomio cuadrado perfecto: $(x^2 - 14x + 49) - 49 + 10$
- # Se factoriza el trinomio $(x - 7)^2 - 39$
- # De este modo, el trinomio $x^2 - 14x + 10$ queda expresado como $(x - 7)^2 - 39$

(b) $m^2 + 3m + 2$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Se suma el cero $\frac{9}{4} - \frac{9}{4}$ al polinomio: $m^2 + 3m + 2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$

Se agrupa el trinomio cuadrado perfecto: $\left(m^2 + 3m + \frac{9}{4}\right) + 2 - \frac{9}{4}$

Se factoriza el trinomio $\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + 2 - \frac{9}{4}$

De este modo, el trinomio $m^2 + 3m + 2$ queda expresado como $\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

(c) $6x^2 + 4x + 5$

En este caso, el coeficiente “a” es distinto de cero, por lo cual, primero se saca este a factor. $6\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}\right)$

Se determina el cero. $\left(\frac{2}{3} \div 2\right)^2 = \frac{1}{9}$

Se suma el cero $\frac{1}{9} - \frac{1}{9}$ al polinomio. $6\left[\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}\right]$

Se factoriza el trinomio y suman términos semejantes. $6\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{13}{18}\right]$

Se distribuye el seis. $6\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{13}{3}$



Hora de practicar

Ejercicios 11 Factorización

1. Halle la factorización completa de los siguientes polinomios mediante factor común.

(a) $10x + 5y$

(b) $by^2 - y$

(c) $24m^5 - 18m^2$

(d) $2a - 6b + 4c$

(e) $3y^2 - 3y + xy$

(f) $4d^3 - 2d^2 + 2d$

(g) $\frac{3x}{2} - \frac{9x^2}{4}$

(h) $30w^9z^3 - 42w^4z^4 + 54w^8z^5$

(i) $-x - x^2$

(j) $\frac{25k^5}{8} - \frac{5k^{25}}{3}$

(k) $\frac{ab^2}{36} - \frac{b^2}{18}$

(l) $-7y^6h^8 + 343h^7y^{11} - 49y^{15}x^4$

(m) $4x^{n+2} - 2x^n$

(n) $3d(g+h) - 4m(g+h)$

(o) $m(y-a) + f(-a+y)$

(p) $a(3x-2) - 7x(2-3x)$

(q) $2xy(5-x) + 4(x-5) - x(5-x)$

(r) $m(1+u) + 3n(-u-1) - (u+1)$

(s) $2(a^2 - 3b) - y(-3b + a^2)$

(t) $3(h-k) + 5x(k-h)(p-g)$

(u) $(a+b)(m+h) - 3(m+h)^2$

(v) $2(p-w)^3 + p(p-w)^2$

2. Halle la factorización completa de los siguientes polinomios mediante diferencia de cuadrados.

(a) $9x^6 - 16$

(b) $x^6 - \frac{1}{4}$

(c) $121k^{100} - 900c^2$

(d) $0,0001x^2 - n^2$

(e) $1 - 256m^8$

(f) $144x^4 - y^8$

(g) $0,25 - h^{10}$

(h) $\frac{49}{100} - \frac{36}{81}d^2$

(i) $18a^3 - \frac{8}{25}a$

(j) $x^{6n} - 1$

(k) $4d^2 - (d+f)^2$

(l) $(x+2)^2 - 9x^2$

(m) $(a-b)^2 - b^2$

(n) $(2x-1)^2 - (y+2)^2$

(o) $2(x-1)^2 - 8$

(p) $(y-3)^2 - y^2$

3. Halle la factorización completa de los siguientes polinomios mediante inspección.

$$(a) a^2 + 2a + 1$$

$$(b) b^2 - 2b + 1$$

$$(c) n^2 + 4n + 4$$

$$(d) -n^2 - 4n - 4$$

$$(e) y^2 - 12y + 36$$

$$(f) \frac{1}{4} + 5x + 25x^2$$

$$(g) 12x - 4x^2 - 9$$

$$(h) 12x^2 - 36x + 27$$

$$(i) 4b^2 - 12b + 9$$

$$(j) 40xy - 16x^2 - 25y^2$$

$$(k) 4 + 121x^2 - 44x$$

$$(l) x^2 + 8xy + 16y^2$$

$$(m) \frac{1}{4} - \frac{h}{3} + \frac{h^2}{9}$$

$$(n) -9a^2 - 96ab - 256b^2$$

$$(\tilde{n}) 6x^2 + 7x + 2$$

$$(o) a^2 - 22a + 121$$

$$(p) 3y - 18 + y^2$$

$$(q) 4x^2 + 100 + 40x$$

$$(r) 10x^2 - 3x + 8x^3$$

$$(s) 7x + 10 + x^2$$

$$(t) 25 + 9x^2 - 30x$$

$$(u) 20m^2 + 12m + 1$$

$$(v) 3 - 5h + 2h^2$$

$$(w) 6k^2 + 5k - 21$$

4. Halle la factorización completa de los siguientes polinomios mediante agrupación.

$$(a) 3m^2 - 6mn + 4m - 8n$$

$$(b) x - 2x - 1 + 2x^2$$

$$(c) 3a - 9ab^2 - b + 3b^3$$

$$(d) 4a - 4h - ah + h^2$$

$$(e) a^2 + ab + ay + by$$

$$(f) 3x^2w^2 - 4y + 3x^2 - 4w^2y$$

$$(g) 5 + m^2 + 5h^2m^2 + 25h^2$$

$$(h) 6bc - 2c - 12bd + 4d$$

$$(i) wy + 2w - y - 2$$

$$(j) 4m^2 + 4m + 1 - n^2$$

$$(k) 9w^2 + n^2 - 9 - 6wn$$

$$(l) z^2 - x^2 + 10xy - 25y^2$$

$$(m) 2m - 1 - m^2 + k^2$$

$$(n) 16 - 49x^2 + 8y + y^2$$

$$(o) -4b^2 - 20b + 100a^2 - 25$$

$$(p) x^2y^2 - 6xy + 9 - y^2$$

$$(q) 64 - 16a + a^2 - b^2$$

$$(r) 2mn - n^2 + y^2 - m^2$$

5. Halle la factorización completa de los siguientes polinomios.

$$(a) 5x^2ym^6 - 25x^3m^9 + 125xym^7$$

$$(b) \frac{121m^7}{9x^2y} - \frac{11m^{15}}{3x}$$

$$(c) 3a(m - n) - 5x(m - n) + (n - m)$$

$$(d) (4a - 7)(x + y) - 2x(x + y) + (x + y)^2$$

$$(e) 32m - 2m^3$$

$$(f) \frac{2x^2}{27} - \frac{50}{3}$$

$$(g) 8x^2z - 24xz^2 + 18z^3$$

$$(h) 20a - 4a^2 - 25$$

$$(i) 9(x + 2y)^2 - (x - y)^2$$

$$(j) \frac{-6x}{5} + \frac{36x^2}{5} + \frac{1}{20}$$

$$(k) x^5 - 40x^3 + 144x$$

$$(l) 2y^2 + 10yx - 48y$$

6. Expresa cada trinomio de la forma $a(x+h)^2 + k$. [Método de completar cuadrados]

(a) $x^2 - 2x + 4$

(e) $y^2 + 18 + 8y$

(b) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

(f) $-x^2 + 3x - 2$

(c) $b^2 - \frac{b}{2} - \frac{15}{16}$

(g) $2x^2 + 6x + 1$

(h) $3x^2 - x + 9$

(d) $a^2 + 10a - \frac{51}{2}$

(i) $5a^2 + 10a - 2$

(j) $-4x^2 + 12x + 5$

7. Ejercicios de selección única.

i) Al factorizar $\frac{25}{4} + 4x^2 - 10x$ uno de los factores corresponde a

(A) $2x - \frac{5}{2}$

(B) $4x + 5$

(C) $2x + \frac{5}{2}$

(D) $x - \frac{5}{4}$

ii) Al factorizar $25 + 3x(3x + 10)$ uno de los factores es

(A) $3x - 5$

(B) $x - 25$

(C) $3x + 10$

(D) $3x + 5$

iii) Al factorizar $2x(x-2) + (4-x^2)$ uno de los factores corresponde a

(A) $4 + x$

(B) $x - 2$

(C) $x - 4$

(D) $16 - x$

iv) Al factorizar $5x^3 - 50x^4 + 125x^5$ uno de los factores es

(A) $5x^4$

(B) $5x - 1$

(C) $25x^3$

(D) $1 + 5x$

v) Al factorizar $8x^3 - 3 + 12x - 2x^2$ uno de los factores es

(A) $4x + 1$

(B) $2x - 1$

(C) $x + 3$

(D) $2x^2 + 3$

vi) Al factorizar $80x^6 - 45x^2$ uno de los factores corresponde a

(A) $20x^3 - 3$

(B) $4x^2 + 3$

(C) $5x^3$

(D) $35x^4$

- vii) Al factorizar $\frac{25}{49} - 169x^6$ uno de los factores es
- (A) $\frac{5}{7} + 13x^2$ (B) $\frac{5}{7} - 13x^3$
(C) $\frac{5}{7} - 13x^2$ (D) $\frac{5}{7} + 13x$
- viii) Al factorizar $16 - m^{16}$ uno de los factores corresponde a
- (A) $2 + m^4$ (B) $4 - m^4$
(C) $2 + m^2$ (D) $1 - m^2$
- ix) La factorización completa de $(x + 3)^2 - (y - 2)^2$ corresponde a
- (A) $(x + y + 1)(x - y + 1)$ (B) $(x - y + 5)(x + y + 1)$
(C) $(x + y + 1)(x + y + 1)$ (D) $(x - y + 5)(x + y - 1)$
- x) Al factorizar $1 - (x - 3)^2$ uno de los factores es
- (A) $4 - x$ (B) $x + 2$
(C) $-2 - x$ (D) $x + 4$
- xi) Al factorizar $7x(x - y) - (2x + 1)(x - y)$ uno de los factores es
- (A) $x + y$ (B) $5x - 1$
(C) $2x + 1$ (D) $7x$
- xii) Al factorizar $2a(a - b) + (b - a)$ uno de los factores es
- (A) $2a + 1$ (B) $a + b$
(C) $2a^2 - b$ (D) $2a - 1$
- xiii) Al factorizar $\frac{5x}{7} - \frac{20x^3}{343}$ uno de los factores corresponde a
- (A) $\frac{7}{5}x$ (B) $1 - \frac{2x}{7}$
(C) $1 + 2x$ (D) $1 - 2x$
- xiv) Al factorizar $10x^3 - 40x^5$ uno de los factores es
- (A) $-x^5$ (B) $-8x^2$
(C) $1 + 2x$ (D) $(1 + 2x)^2$

- xv) En la factorización completa de $(2x+1)^2 - 6(2x+1) + 9$ uno de los factores es
 (A) $x+1$ (B) $2x-1$
 (C) $x-1$ (D) $2x+1$
- xvi) Un factor del polinomio $\frac{8x}{5}(3x-2) - (3x-2)^2$ es
 (A) $\frac{23}{5}x - 2$ (B) $3x + 2$
 (C) $\frac{8}{5}x - 1$ (D) $2 - \frac{7}{5}x$
- xvii) Al factorizar $(2a-5)^2 - (3b+6)^2$ uno de los factores corresponde a
 (A) $2a+3b-1$ (B) $2a-3b-11$
 (C) $2a-3b+1$ (D) $2a-5$
- xviii) Al factorizar $m^2(a-b) + (b-a)$, uno de los factores corresponde a
 (A) $m+1$ (B) m^4+1
 (C) $a+b$ (D) m^2+1
- xix) Al factorizar $\frac{50}{121} - 2a^{100}$, uno de los factores corresponde a
 (A) $\frac{5}{11} - a^{10}$ (B) $\frac{5}{11} + a^{50}$
 (C) $\frac{5}{11} - a^{10}$ (D) $\frac{5-a^{50}}{11}$
- xx) Al factorizar $-18xy + 2x^3y$ uno de los factores es
 (A) $(x-3)^2$ (B) $(x+3)^2$
 (C) $x+3$ (D) $9-x$
- xxi) Uno de los factores de $3x^3 - \frac{x^2}{2} - x$ corresponde a
 (A) $2x-1$ (B) $3x+2$
 (C) $-3x-2$ (D) $3x-2$
- xxii) En la factorización completa de $x^2 + x - 2$, uno de los factores corresponde a

- (A) x (B) $x - 1$
 (C) $x + 1$ (D) $x - 2$

xxiii) En la factorización completa de $x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2$, uno de los factores corresponde a

- (A) $(x + y)^2$ (B) $(x - y)^2$
 (C) $x^2 + y^2 - 2$ (D) $x^2 - y^2 + 2$

Habilidad específica.

- 3.** Efectuar operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Escenario de aprendizaje

Simplifiquemos

Para simplificar la fracción $\frac{50700}{1300}$, hay caminos rápidos para dar la respuesta.

Por ejemplo, esta fracción se puede simplificar de manera más fácil si factorizamos tanto el 50 700 como el 1 300, así:

$$\frac{169 \cdot 3 \cdot 100}{13 \cdot 100}$$

Con lo cual, al simplificar se obtiene

$$\frac{\overset{13}{\cancel{169}} \cdot 3 \cdot \cancel{100}}{\underset{1}{\cancel{13}} \cdot \cancel{100}} = 13 \cdot 3 = 39.$$

¿Cómo usar este razonamiento para simplificar $\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 6x}$?

Así como se procedió en el ejemplo del escenario, para simplificar la expresión $\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 6x}$, basta con factorizar el numerador y el denominador y luego cancelar los factores iguales:

$$\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 6x} = \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{2x\cancel{(x+3)}} = \frac{x-3}{2x}$$

También se puede hacer una analogía entre la aritmética y el álgebra, para resolver multiplicaciones, divisiones, sumas y restas de expresiones algebraicas racionales.

Multiplicación y división de expresiones algebraicas racionales

Operación	En aritmética	Proceso	En álgebra
Multiplicación	$\frac{18}{25} \cdot \frac{125}{28}$ $= \frac{18 \cdot 125}{25 \cdot 28}$ $= \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 7}$ $= \frac{45}{14}$	Se expresa el producto de numerador con numerador, y denominador con denominador. Luego se factoriza y se cancelan factores comunes.	$\frac{m^2 - 81}{4m} \cdot \frac{8m^2}{m^2 + 9m}$ $= \frac{(m+9)(m-9)}{4m} \cdot \frac{8m^2}{m(m+9)}$ $= \frac{\cancel{8} \cancel{m^2} (m+9)(m-9)}{4 \cancel{m^2} (m+9)}$ $= 2(m-9)$ $= 2m - 18$
División	$\frac{-49}{6} \div \frac{7}{3}$ $= \frac{-49}{6} \cdot \frac{3}{7}$ $= \frac{-49 \cdot 3}{6 \cdot 7}$ $= \frac{-\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{3}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{7}}$ $= \frac{-7}{2}$	La división se expresa como la multiplicación de la primera fracción por el recíproco de la segunda. Después se sigue el proceso anterior	$\frac{a^2 - 11a + 30}{a^2 - 25} \div \frac{a^2 - 6a}{2a + 10}$ $= \frac{a^2 - 11a + 30}{a^2 - 25} \cdot \frac{2a + 10}{a^2 - 6a}$ $= \frac{(\cancel{a} - 5)(\cancel{a} - 6) \cdot 2(\cancel{a} + 5)}{(\cancel{a} + 5)(\cancel{a} - 5) \cdot a(\cancel{a} - 6)}$ $= \frac{2}{a}$

Ejemplos: Efectúe cada operación y simplifique al máximo.

(a)
$$\frac{36x^2 + 60x + 25}{a^2 - 25} \cdot \frac{a^2 - 11a + 30}{36x^2 - 25}$$

Se factoriza y cancelan factores comunes (siempre y cuando estén uno en el numerador y el otro en el denominador)

$$= \frac{(\cancel{6x+5})(6x+5)}{(a+5)(\cancel{a-5})} \cdot \frac{(\cancel{a-5})(a-6)}{(\cancel{6x+5})(6x-5)}$$

$$= \frac{(6x+5)(a-6)}{(a+5)(6x-5)}$$

$$(b) \quad \frac{4m}{m^2 - 81} \div \frac{8m^2}{m^2 - 9m}$$

Expresamos la división como un producto, para lo cual usamos el recíproco de

$$\frac{8m^2}{m^2 - 9m} :$$

$$\frac{4m}{m^2 - 81} \cdot \frac{m^2 - 9m}{8m^2}. \text{ Y luego se resuelve la multiplicación:}$$

$$= \frac{4\cancel{m} \cdot \cancel{m} (m - 9)}{8\cancel{m}^2 (m + 9) (\cancel{m} - 9)} = \frac{1}{2(m + 9)} = \frac{1}{2m + 18}$$

Suma y resta de expresiones algebraicas racionales

Operación	En aritmética	Proceso	En álgebra
Fracciones homogéneas	$\frac{8}{15} + \frac{2}{15}$ $= \frac{8 + 2}{15}$ $= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$	Se suman o restan los numeradores, según el caso y el denominador se mantiene. De ser posible se simplifica el resultado.	$\frac{3x + 2}{x - 2} + \frac{x - 10}{x - 2}$ $= \frac{3x + 2 + x - 10}{x - 2}$ $= \frac{4x - 8}{x - 2} = \frac{4(x - 2)}{x - 2} = 4$
Fracciones heterogéneas	$\frac{1}{6} - \frac{3}{8}$ $\text{m.c.m}(6, 8) = 24$ $= \frac{(24 \div 6) \cdot 1 - (24 \div 8) \cdot 3}{24}$ $= \frac{4 \cdot 1 - 3 \cdot 3}{24}$ $= \frac{4 - 9}{24}$ $= \frac{-5}{24}$	Primero se deben homogenizar los denominadores y luego se procede como en el caso anterior. Para homogenizar el denominador se siguen los siguientes pasos: 1. Se saca el m.c.m entre los denominadores. 2. El m.c.m se divide entre cada denominador y ese resultado se multiplica por el numerador respectivo.	$\frac{x}{x - 3} + \frac{2}{x + 5}$ $\text{m.c.m} = (x - 3)(x + 5)$ $\frac{(x + 5) \cdot x + (x - 3) \cdot 2}{(x - 3)(x + 5)}$ $= \frac{x^2 + 5x + 2x - 6}{(x - 3)(x + 5)}$ $= \frac{x^2 + 7x - 6}{(x - 3)(x + 5)}$

Ejemplos: Efectúe cada operación y simplifique al máximo.

$$(a) \quad \frac{4m-3}{5-2m} - \frac{7m-9}{5-2m}$$

Como los denominadores son iguales, se procede a resolver la resta de numeradores:

$$\frac{4m-3-(7m-9)}{5-2m}. \text{ Se procede al cambio de signos:}$$

$$\frac{4m-3+7m+9}{5-2m}$$

Y se suman términos semejantes: $\frac{-3m+6}{5-2m}$

$$(b) \quad \frac{x+1}{x^2-4} + \frac{2}{x-2}$$

En este caso, se factorizan primero los denominadores, para poder sacar el m.c.m entre ellos.

$\frac{x+1}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{x-2}$	$\begin{array}{c} (x+2) \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{c} (x-2) \\ (x-2) \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{c} (x-2) \\ (x-2) \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{c} (x+2) \\ (x-2) \\ \hline \text{m.c.m} = (x+2)(x-2) \end{array}$
--	---	--	--	---

De este modo el m.c.m es $(x+2)(x-2)$

Ahora $(x+2)(x-2)$ se divide por cada denominador y el resultado se multiplica por el numerador correspondiente:

$$\begin{aligned} &= \frac{x+1+2(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{x+1+2x+4}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{3x+5}{(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

$$(c) \quad \frac{5}{2x-1} + \frac{3x+2}{(2x-1)^2}$$

Obtenemos el m. c. m de los denominadores

$2x-1$	$(2x-1)^2$	$2x-1$
1	$2x-1$	$2x-1$
1	1	$\begin{aligned} \text{m.c.m} &= (2x-1)(2x-1) \\ &= (2x-1)^2 \end{aligned}$

Ahora la expresión $(2x-1)^2$ se divide por cada denominador y el resultado se multiplica por el numerador correspondiente:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2x-1} + \frac{3x+2}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{5(2x-1) + 3x+2}{(2x-1)^2} = \frac{10x-5+3x+2}{(2x-1)^2} = \frac{13x-3}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$



Hora de practicar

Ejercicios 12 **Simplificación**

1. Simplifique al máximo cada expresión.

$$(a) \quad \frac{4x-4y}{x^2-y^2}$$

$$(f) \quad \frac{3a^2+5a-2}{15ax-5x}$$

$$(b) \quad \frac{6d^2+7d-10}{6d^2+13d-15}$$

$$(g) \quad \frac{x^2y+10xy+25y}{xy+5y}$$

$$(c) \quad \frac{a^2-5a-24}{a^2-64}$$

$$(h) \quad \frac{16-(x+1)^2}{15-2x-x^2}$$

$$(d) \quad \frac{5xg-10xg^2}{1-4g^2}$$

$$(i) \quad \frac{x-7}{49-x^2}$$

$$(e) \quad \frac{2x+xm-2m-m^2}{x^3-xm^2}$$

$$(j) \quad \frac{x^2+2xy-3y^2}{x^2+6xy+9y^2}$$

2. Resuelva las siguientes operaciones y simplifique al máximo.

$$(a) \frac{5a^2 + 25}{a^2 - 4a + 4} \cdot \frac{a^2 - 4}{a^2 + 5}$$

$$(b) \frac{x^2 - 4}{2x + x^2} \cdot \frac{7x^2}{7x^2 - 14x}$$

$$(c) \frac{m^2 + 4mn + 4n^2}{m^2 - m} \cdot \frac{m^2}{m^2 - 4n^2}$$

$$(d) \frac{2a - b}{3b - 6a} \cdot \frac{3}{4a^2 - b^2}$$

$$(e) \frac{x^2}{5} \cdot \frac{10}{x^4 - x^3}$$

$$(f) \frac{x^2 - 5x}{5x + 35} \div \frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 49}$$

$$(g) \frac{a^2 - 16b^4}{b - 5a} \div \frac{a - 4b^2}{b^2 - 5ab}$$

$$(h) y^7 \div \frac{y^5 - y^7}{y + 1}$$

$$(i) \frac{3a^2 - a + 3ab - b}{15a^2 - 5a} \div \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + ab}$$

$$(j) \frac{10x^2 + 49x + 18}{4x^2 - 81} \div \frac{30xy + 12y}{24y^2x - 108y^2}$$

3. El área de un rectángulo está dada por $12x^2 + 2x - 2$ y su ancho por $3x - 1$. Determine la expresión algebraica que representa el largo de ese rectángulo.

4. Resuelva las siguientes operaciones y simplifique al máximo.

$$(a) \frac{3m + 1}{m - 2} - \frac{m}{m - 2}$$

$$(b) \frac{2a - 4}{a + 5b^2} - \frac{7a - 2}{a + 5b^2}$$

$$(c) \frac{2x + 1}{x} - \frac{x - 2}{x + 1}$$

$$(d) \frac{3}{x + 5} + \frac{2 - 3x}{x^2 - 25}$$

$$(e) \frac{2a - 1}{a^2 - 3a} - \frac{3}{a - 3}$$

$$(f) \frac{4}{5x - 1} + \frac{-3}{x + 1}$$

$$(g) \frac{2 - x}{x^2 - 2x - 15} + \frac{x}{x - 5}$$

$$(h) \frac{2m - 1}{m + 3} + \frac{4m}{m^2 - 9}$$

$$(i) \frac{-5b}{a - b} + \frac{a}{a + 2b}$$

$$(k) \frac{2x + 3}{mx + m} - \frac{5mx - 1}{x + 1}$$

$$(l) \frac{5x + 2}{x^2 - 2x - 3} - \frac{3}{x - 3}$$

$$(m) \frac{a + 5}{3a^2 + 7ab + 2b^2} - \frac{3a}{2a + 4b} + \frac{5b}{12a + 4b}$$

$$(n) \frac{x + 2}{4x^2 - 20x + 25} + \frac{3x + 1}{4x^2 - 25}$$

$$(ñ) \frac{y + 1}{6x^2y} + \frac{7}{18xy^5} + \frac{y^2}{3x^5}$$

$$(o) \frac{4 - x}{4x^2y - 12xy} + \frac{2x}{-x^2 + 5x - 6}$$

$$(p) \frac{m - 3}{25m^2 - 10m + 1} - \frac{2m + 7}{5m^2 + 11m + 2}$$

Habilidad específica.

4. Efectuar división de polinomios.

Escenario de aprendizaje

¿Cuál es su largo?

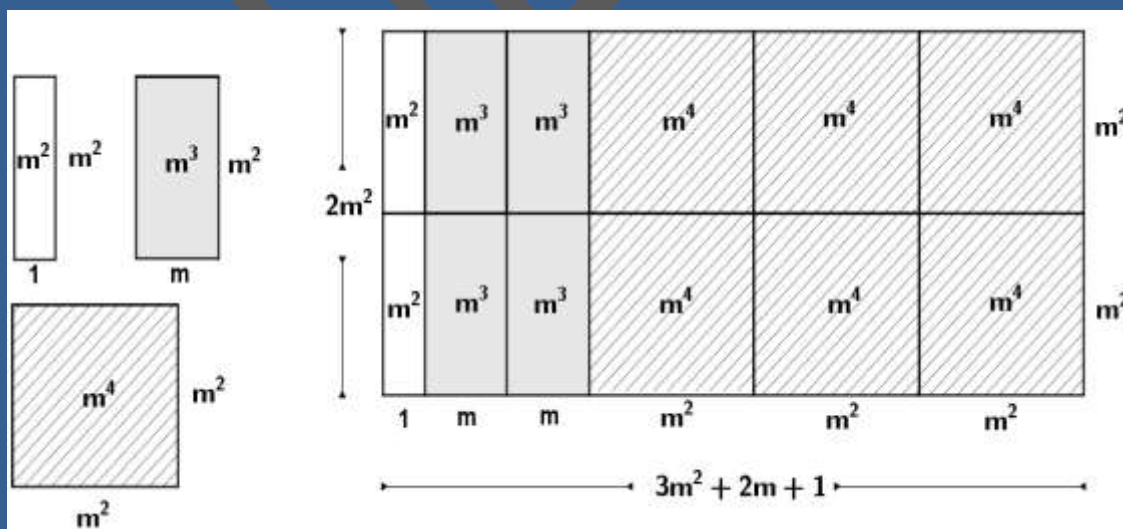
Un rectángulo tiene de área $6m^4 + 4m^3 + 2m^2$ y de ancho $2m^2$

¿Cuál expresión representa la medida de su largo?

Como el área de un rectángulo está dada por: $A = \ell \cdot a$, entonces la longitud del largo se obtiene al resolver $\frac{A}{a} = \ell$

Por tanto, se efectúa la siguiente división: $\ell = \frac{6m^4 + 4m^3 + 2m^2}{2m^2}$

Gráficamente, esta situación se puede representar así:



Note que el rectángulo efectivamente tiene área de $6m^4 + 4m^3 + 2m^2$ y su ancho es de $2m^2$. Además el largo se representa por $3m^2 + 2m + 1$

Para obtener la expresión algebraica que representa el largo del rectángulo, sin necesidad de la construcción geométrica, se resuelve de la siguiente manera:

$$\ell = \frac{6m^4 + 4m^3 + 2m^2}{2m^2}$$

Se divide a cada término del numerador por el monomio del denominador.

$$\ell = \frac{6m^4}{2m^2} + \frac{4m^3}{2m^2} + \frac{2m^2}{2m^2}$$

$$\ell = 3m^2 + 2m + 1$$

División de polinomio por monomio

Para dividir un polinomio por un monomio se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio.

Ejemplos: Efectúe cada división y simplifique al máximo.

(a) $(-18x^2y^5 + 21x^6y - 9x^5y) \div (9x^2y)$

$$\begin{aligned} & (-18x^2y^5 + 21x^6y - 9x^5y) \div (9x^2y) \\ &= \frac{-18x^2y^5}{9x^2y} + \frac{21x^6y}{9x^2y} - \frac{9x^5y}{9x^2y} \\ &= -2y^4 + \frac{7}{3}x^4 - x^3 \end{aligned}$$

(b) $\left(\frac{a^6b^2}{2} - \frac{3}{4}a^4b^8\right) \div \left(\frac{1}{2}a^3b\right)$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^6b^2}{2} - \frac{3}{4}a^4b^8\right) \div \left(\frac{1}{2}a^3b\right) \\ &= \frac{\frac{a^6b^2}{2}}{\frac{1}{2}a^3b} - \frac{\frac{3}{4}a^4b^8}{\frac{1}{2}a^3b} = a^3b - \frac{3}{2}ab^7 \end{aligned}$$

División de polinomio por polinomio

Para dividir un polinomio por otro polinomio, se seguirá un proceso similar al ejecutado en aritmética.

Antes de resolver una división algebraica de este tipo, recordemos cómo se resuelve una división aritmética:

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo} \\
 4854 \overline{) 23} \rightarrow \text{divisor} \\
 \underline{-46} \\
 25 \\
 \underline{-23} \\
 24 \\
 \underline{-23} \\
 1 \rightarrow \text{residuo}
 \end{array}$$

De modo similar se resuelven polinomios, mediante los

$$211 \cdot 23 + 1 = 4854$$

las divisiones entre siguientes pasos:

- Primero se ordenan los polinomios de forma descendente. Si no hay algún término, se agrega “cero”.
- Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor, y se obtiene así el término inicial del cociente.
- Se multiplica el primer término del cociente por todo el divisor y el producto así obtenido se resta del dividendo, para lo cual se hace un cambio de signo.
- Se repite el proceso hasta que el residuo sea de menor grado que el del divisor.
- Para comprobar la respuesta, se verifica que:

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \cdot \text{divisor} + \text{residuo}$$

Ejemplos: Efectúe cada división y simplifique al máximo.

(a) $(2x^2 + x - 4) \div (2x - 1)$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 4 \quad | 2x - 1 \\ -2x^2 + x \quad \quad x + 1 \\ \hline / \quad 2x - 4 \\ \quad -2x + 1 \\ \hline / \quad -3 \end{array}$$

Comprobación

$$2x^2 + x - 4 = (2x - 1)(x + 1) - 3$$

(b) $(15x^2 - 5x - 4) \div (3x^2 - x - 1)$

$$\begin{array}{r} 15x^2 - 5x - 4 \quad | 3x^2 - x - 1 \\ -15x^2 + 5x + 5 \quad \quad 5 \\ \hline / \quad / \quad 1 \end{array}$$

Comprobación

$$15x^2 - 5x - 4 = 5(3x^2 - x - 1) + 1$$

(c) $(10a^2 - a + 2) \div (2a + 1)$

$$\begin{array}{r} 10a^2 - a + 2 \quad | -2a + 1 \\ -10a^2 + 5a \quad \quad -5a - 2 \\ \hline / \quad 4a + 2 \\ \quad -4a + 2 \\ \hline / \quad 4 \end{array}$$

Comprobación

$$10a^2 - a + 2 = (-5a - 2)(-2a + 1) + 4$$



Hora de practicar

Ejercicios 13

División de polinomios

1. Resuelva cada división y simplifique al máximo. Indique el cociente y el residuo.

- (a) $(6m^4 - 4m^3) \div (2m^3)$
- (b) $(-25x^4 - 5x + 20x^3) \div (5x)$
- (c) $(26d^2h^5 - 13d^2h + d^5h^{10}) \div (13hd^2)$
- (d) $\left(\frac{18}{5}x^5y - \frac{27}{10}y^4x + \frac{xy}{5}\right) \div \left(\frac{9xy^3}{5}\right)$
- (e) $(-12m^{11}n^3 + 24n^3m^7 - 48n^{10}m^8) \div (-24n^3m^5)$
- (f) $(11y^9z^7 + 33z^5y^9 - 44z^8y^{10}) \div (11y^4z^7)$
- (g) $\left(\frac{-a^2}{3} + \frac{2}{9}a - \frac{a^3}{27}\right) \div \left(\frac{-a}{3}\right)$
- (h) $\frac{15d^7m^4n^7 + 5n^3d^5 - 20n^4d^7}{5d^5n^3}$

2. Resuelva cada división y simplifique al máximo.

- (a) $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$
- (b) $(2x^2 + 5x + 3) \div (2x - 1)$
- (c) $(3 + 5x^2 - 20x) \div (x^2 - 4x + 1)$
- (d) $(x^2 + x - 7) \div (x + 3)$
- (e) $(5x + x^2 + 4) \div (x - 1)$
- (f) $(2x^2 + x - 13) \div (x - 2)$
- (g) $(5m^2 - 3 + 14m) \div (m + 3)$
- (h) $(-10a^2 - 2 + 5a) \div (-1 + 2a)$
- (i) $(9m^2 - 1) \div (3m + 2)$
- (j) $(h^2 - 5h) \div (h - 1)$
- (k) $(x^3 - 2x^2 - 2x + 4) \div (x + 1)$
- (l) $(2x^3 + x^2 - 10x - 6) \div (x^2 - 5)$

3. Determine la expresión que represente el ancho del rectángulo sabiendo que su área está dada por $15d^2 + 7d - 2$

$$15d^2 + 7d - 2$$

$$5d - 1$$

Habilidad específica.

5. Racionalizar denominador o numerador de expresiones algebraicas.

Escenario de aprendizaje

Cambio radical

En diversas situaciones, es necesario que una expresión algebraica que tiene radicales en el denominador, se convierta en una equivalente, pero cuyo radical quede en el numerador o viceversa.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

- # **Racionalizar una fracción con radicales en el denominador**, es encontrar otra expresión equivalente que no tenga raíces en el denominador. Para ello se multiplica el numerador y el denominador por una expresión adecuada, de forma que al operar, se elimine la raíz del denominador.
- # **Racionalizar una fracción con radicales en el numerador**, es encontrar otra expresión equivalente que no tenga raíces en el numerador. Para ello, se multiplica el numerador y el denominador por una expresión adecuada, de forma que al operar, se elimine la raíz del numerador.

Según el tipo de radical o la forma de la expresión que aparece, el proceso es diferente. Se pueden dar varios casos:

Si sólo hay un término con una raíz de índice “n”.

Se multiplica numerador y denominador por otra raíz de índice “n” que complete una potencia de exponente “n”.

Ejemplos:

(a) Racionalice el denominador de $\frac{4}{\sqrt[5]{2x^3y^4}}$

En este ejercicio, se deben multiplicar tanto el numerador como el denominador por una raíz de índice 5. Las cantidades exponenciales del subradical serán el número del exponente que falta para completar el índice (en este caso 5)

Esto es:

$$\frac{4}{\sqrt[5]{2x^3y^4}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2x^3y^4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^4x^2y}}{\sqrt[5]{2^4x^2y}} = \frac{4\sqrt[5]{2^4x^2y}}{\sqrt[5]{2^5x^5y^5}} = \frac{4\sqrt[5]{16x^2y}}{2xy} = \frac{2\sqrt[5]{16x^2y}}{xy}$$

(b) Racionalice el numerador de $\frac{\sqrt{5a}}{3}$

En este caso, se multiplica tanto numerador como denominador por $\sqrt{5a}$, de modo que al resolver $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{5a}$ pueda salir el factor "5a" de la raíz.

Así:

$$\frac{\sqrt{5a}}{3} = \frac{\sqrt{5a}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5a}}{\sqrt{5a}} = \frac{\sqrt{5^2a^2}}{3\sqrt{5a}} = \frac{5a}{3\sqrt{5a}}$$

(c) Racionalice el denominador de $\sqrt[3]{\frac{7}{9n}}$

Es recomendable separar la fracción en dos radicales, y descomponer el 9 de modo que quede en potencia.

$$\sqrt[3]{\frac{7}{9n}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{3^2n}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{3^2n}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3n^2}}{\sqrt[3]{3n^2}} = \frac{\sqrt[3]{21n^2}}{\sqrt[3]{3^3n^3}} = \frac{\sqrt[3]{21n^2}}{3n}$$

Racionalización de un binomio con radical de índice dos

Para racionalizar un binomio que contiene al menos un radical de índice dos, se debe multiplicar tanto el numerador como el denominador por el conjugado de dicho binomio.

El conjugado de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ y viceversa.

Ejemplos:

(a) Racionalice el denominador de $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\underbrace{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}_{\text{Fórmula Notable}}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3^2} - \sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{18} + \sqrt{12}}{3 - 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

(b) Racionalice el numerador de $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{x}}{4}$

$$\frac{\sqrt{7} + \sqrt{x}}{4} = \frac{\overbrace{\sqrt{7} + \sqrt{x}}^{\text{Fórmula notable}} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{x}}{4 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{x}} = \frac{7 - x}{4\sqrt{7} - 4\sqrt{x}}$$

(c) Racionalice el denominador de $\frac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}$

$$\frac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}} = \frac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}} \cdot \frac{1 - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}} = \frac{(1 - \sqrt{7})^2}{1^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{1 - 2\sqrt{7} + 7}{1 - 7} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{-6} = \frac{-4 + \sqrt{7}}{3}$$



Hora de practicar

Ejercicios 14 Racionalización

1. Racionalice el denominador en cada caso.

$$(a) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(b) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$(c) \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(d) \frac{5}{\sqrt[3]{49ab^2}}$$

$$(e) \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(f) \frac{1}{8\sqrt[3]{4}}$$

$$(g) \frac{x^2y}{\sqrt[5]{x^3yz^4}}$$

$$(h) \frac{10\sqrt{b}}{\sqrt{5a}}$$

2. Racionalice el numerador en cada caso.

$$(a) \frac{\sqrt[3]{5}}{3}$$

$$(b) \frac{\sqrt[5]{8x^2y}}{5n}$$

$$(c) \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(d) \frac{\sqrt[3]{25h^2}}{h}$$

$$(e) \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{3}}$$

$$(f) \frac{\sqrt[4]{9k^3}}{3k}$$

$$(g) \frac{x\sqrt{7x}}{49}$$

$$(h) \frac{\sqrt{3ab}}{b^2}$$

3. Racionalice el denominador en cada caso.

$$(a) \frac{3}{\sqrt{x}-5}$$

$$(b) \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}$$

$$(c) \frac{5-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$(d) \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$(e) \frac{4a-1}{2\sqrt{a}-1}$$

$$(f) \frac{-8}{\sqrt{m}-\sqrt{5b}}$$

$$(g) \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w}+5}$$

$$(h) \frac{-6h}{3-\sqrt{2h}}$$

4. Racionalice el numerador en cada caso.

$$(a) \frac{3-2\sqrt{3}}{5}$$

$$(b) \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

$$(c) \frac{\sqrt{m}+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$$

$$(d) \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$$

$$(e) \frac{\sqrt{2m}+3}{2}$$

$$(f) \sqrt{2}+1$$

$$(g) \frac{x\sqrt{x}+y}{y}$$

$$(h) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4}$$

Habilidades específicas

6. Identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la forma $y = ax^2 + bx + cx$
7. Representar tabular, algebraica y gráficamente una función cuadrática.

Función Cuadrática.

Escenario de aprendizaje

¡Qué pelotazo!

La altura " h " en metros, a la que se encuentra un balón lanzado hacia arriba desde la azotea de un edificio, según la distancia horizontal " x " en metros, a la que se encuentra dicha pelota del edificio, está dada por la fórmula .

$$h(x) = -0,008x^2 + x + 50$$

- (b) ¿Cuál es la variable dependiente en esta fórmula?
- (c) ¿Cuál es la variable independiente en esta fórmula?
- (d) ¿Cuál es la altura del edificio?
- (e) Determine la altura de la pelota cuando está a una distancia horizontal de:
 - i) 20m
 - ii) 40m
 - iii) 60m
 - iv) 100m
 - v) 120m
 - vi) 140m
 - vii) 160m
- (f) Construya una tabla de valores con la información de los puntos (c) y (d)
- (g) Grafique los pares ordenados del punto (e) y una los puntos.

⚡ La variable dependiente en esta función es la altura y , la independiente, la distancia horizontal " x ".

⚡ Para determinar la altura del edificio, se toma en cuenta que la distancia horizontal del balón en ese momento es de cero. Por lo cual se calcula:

$$h(0) = -0,008 \cdot 0^2 + 0 + 50 = 50m$$

La altura del edificio es de 50 metros.

De modo similar se calcula la altura en cada caso del punto (d)

$$h(20) = -0,008 \cdot 20^2 + 20 + 50 = 66,8m$$

$$h(40) = -0,008 \cdot 40^2 + 40 + 50 = 77,2m$$

$$h(60) = -0,008 \cdot 60^2 + 60 + 50 = 81,2m$$

$$h(100) = -0,008 \cdot 100^2 + 100 + 50 = 70m$$

$$h(120) = -0,008 \cdot 120^2 + 120 + 50 = 54,8$$

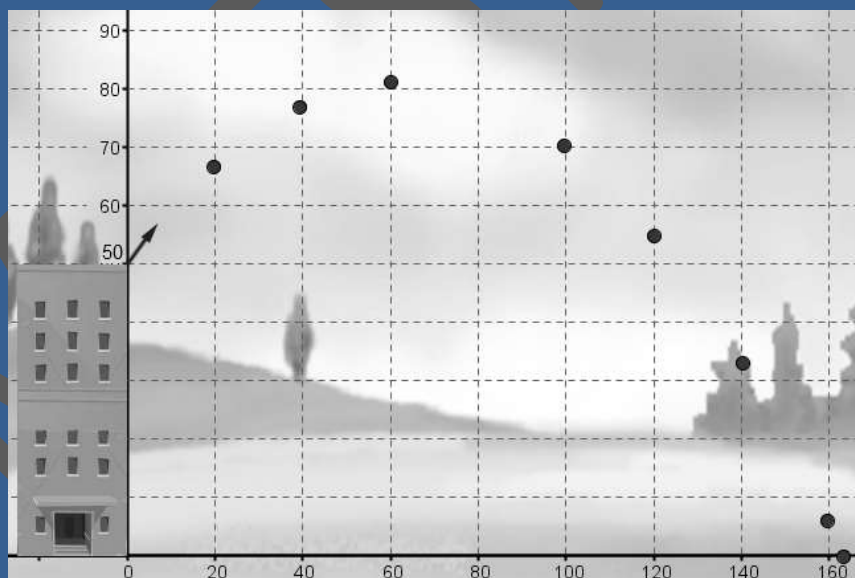
$$h(140) = -0,008 \cdot 140^2 + 140 + 50 = 33,2m$$

$$h(160) = -0,008 \cdot 160^2 + 160 + 50 = 5,2m$$

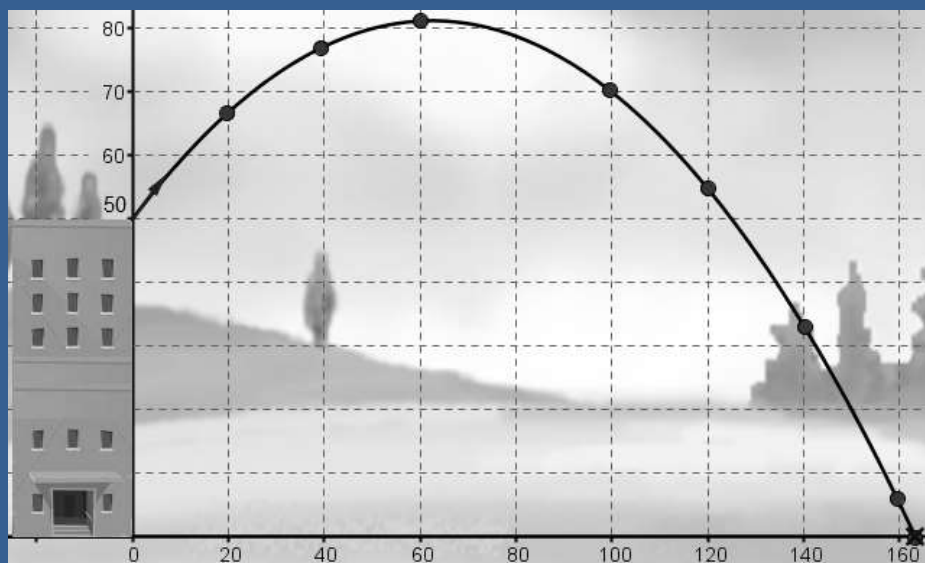
Tabulación

x	0	20	40	60	100	120	140	160
h(x)	50	66,8	77,2	81,2	70	54,8	33,2	5,2

Para graficar la función cuadrática, vamos a ubicar los puntos en el plano cartesiano.



Trazamos una curva que una los puntos.



En este caso, estamos ante una función llamada cuadrática, cuya trayectoria describe una parábola.

Diversas situaciones son modeladas con estas funciones y tienen aplicaciones en áreas como física, economía y arquitectura.

Definición

Función cuadrática

Una función cuadrática f es aquella que está dada por el criterio

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0$$

Ejemplos

El área de un cuadrado "A" en cm^2 depende de la longitud de su lado " ℓ ", y está dada por $A(\ell) = \ell^2$.

(a) Construya la gráfica de esta función.

Para ello tabulamos algunos valores, considerando solo números mayores o iguales que cero, al tratarse de unidades de medida.

ℓ	0	1	2	3	4	5
$A(\ell)$	0	1	4	9	16	25

b) Si el área de un cuadrado es de 169 cm^2 , ¿cuál es la longitud de su lado?

Para esto, resolvemos:

$$169 = \ell^2$$

$$\sqrt{169} = \ell$$

$$13 = \ell$$

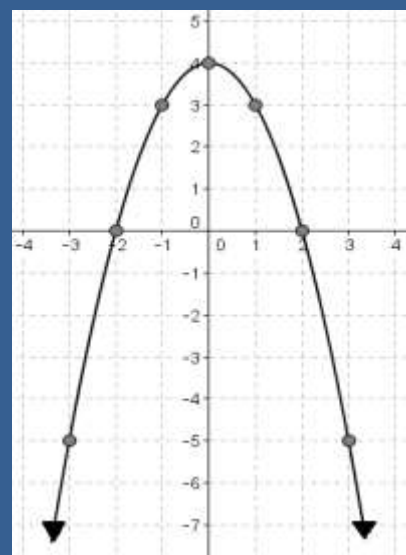
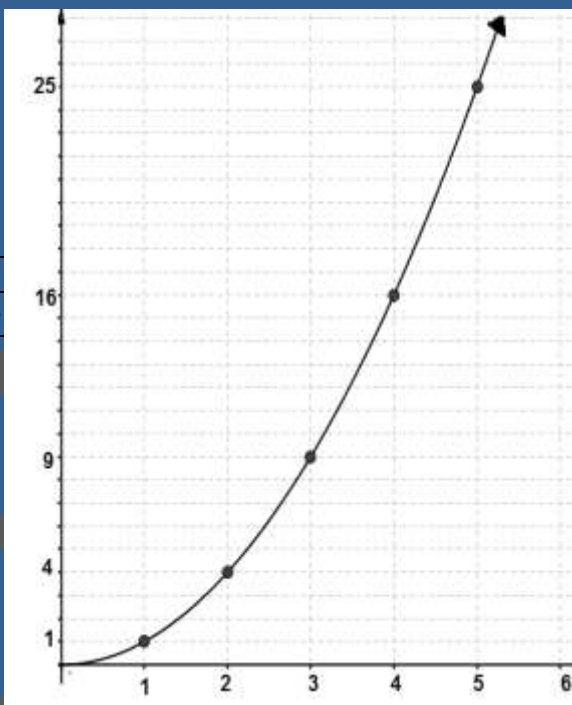
Por tanto, el lado mide 13 cm

En esta función, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$

Grafique la función dada por $h(x) = 4 - x^2$, definida en IR

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
h(x)	-5	0	3	4	3	0	-5

En este caso, $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$





Hora de practicar

Ejercicios 15 Función cuadrática (A)

1. Indique en el espacio respectivo, si las fórmulas corresponden al criterio de una función cuadrática o no.

(a) $d(x) = 2x - 1$ _____

(b) $y = 7 + x^2 - 5x$ _____

(c) $f(m) = \frac{3m^2}{7}$ _____

(d) $h(x) = 2^x + x$ _____

(e) $y = x(5 - x) + 2$ _____

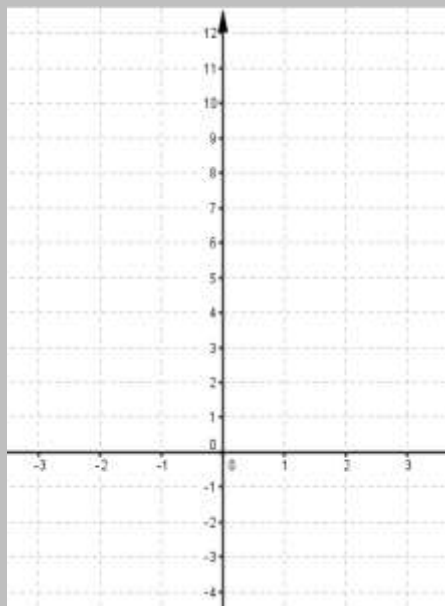
(f) $f(x) = (x - 1)(x + 1) - x^2 + x$ _____

(g) $A(r) = \pi r^2$ _____

2. Dado el criterio de cada función cuadrática, complete la tabla de valores y grafique

(a) $y = x^2 + x - 2$

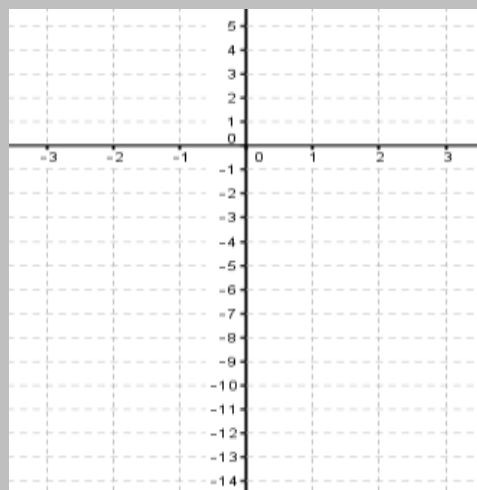
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



(b) $y = -3x^2 + 5x$

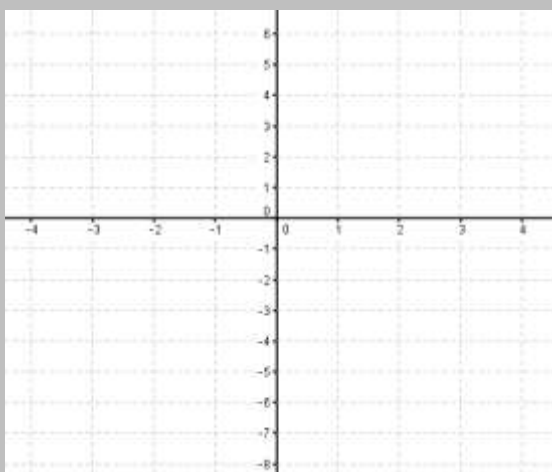
x	-1	0	1	2	3
y					

(c)



(c) $f(x) = \frac{9 - x^2}{2}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									



3. En una competencia de *snowboard*, un deportista hace un salto, cuya altura en metros, está dada por la fórmula: $h(t) = -2t^2 + 8t$, donde "t" es el tiempo en segundos.

- (a) ¿Cuál es la altura que alcanza el deportista a los 2 segundos?
- (b) Construya la gráfica de la función.
- (c) Según la gráfica, ¿en cuánto tiempo toca suelo nuevamente el deportista?
- (d) ¿En qué tiempo el deportista alcanza la altura máxima?



4. La función de ingreso “I” se obtiene al multiplicar la cantidad de unidades “x” de producto vendido por su precio de venta “P” en colones. Si el precio de venta está dado por $P(x) = \frac{-x}{3} + 900$, determine:
- (a) El criterio de la función de ingreso.
 - (b) El ingreso al vender 30 unidades.
5. La temperatura T en grados Fahrenheit del radiador de un automóvil durante los primeros 4 minutos de conducción, depende del tiempo en que está encendido el vehículo, y se puede determinar mediante la fórmula $T = 6,2x^2 + 12x + 32$, donde “x” es el tiempo en minutos.
- (a) ¿Cuál es la temperatura del radiador en el momento que el automóvil arranca?
 - (b) ¿Cuál es la temperatura del radiador a los 3,5 minutos?

Habilidad específica.

- 12. Trazar la gráfica de una función cuadrática cuyo criterio es $y = ax^2 + bx + c$
- 13. Analizar la influencia de los parámetros a, b, c en la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ utilizando software.

Escenario de aprendizaje

Grficar funciones cuadráticas

Al inicio de este capítulo, se construyó la gráfica de algunas funciones cuadráticas, mediante una tabla de valores. Sin embargo, hay métodos más efectivos para poder realizar dichas gráficas.

A partir de la gráfica de la función dada por $y = x^2$, vamos a aprender a realizar diversas gráficas cuadráticas, para lo cual expresaremos la función $y = ax^2 + bx + c$ de la forma $y = a(x - h)^2 + k$ tal como aprendimos al completar cuadrados.

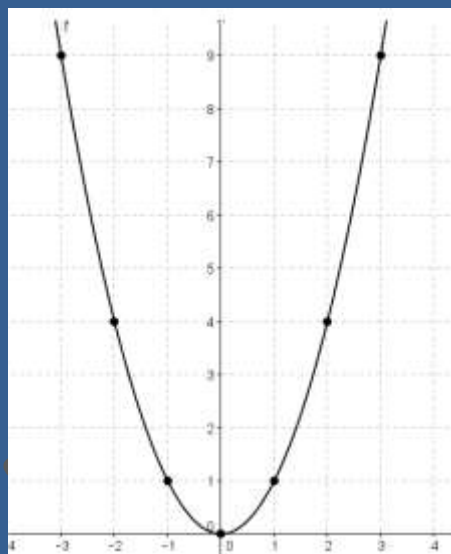
Se puede usar papel cuadrículado, y si existe la posibilidad, se sugiere el uso del software libre *Geogebra*, que se puede descargar en www.geogebra.org

Grafiquemos mediante tabla de valores la función con criterio $y = x^2$

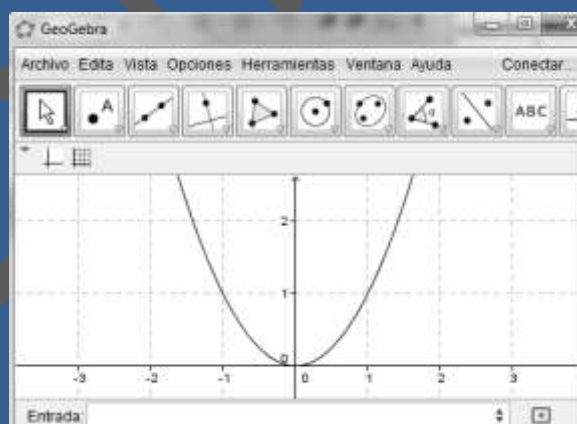
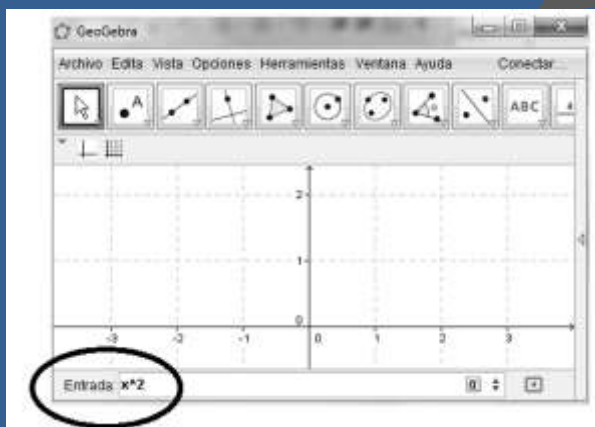
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

Recuerde que ubicamos los puntos y luego trazamos la línea curva que describe la función, en el caso de ser real.

En el *Geogebra*, simplemente en la “*Entrada*” escribimos la función que deseamos graficar, en este caso como es x^2 , entonces digitamos x^2



Luego tecleamos “*Enter*” y aparece la gráfica deseada:



En el caso anterior, la función cuadrática $y = x^2$ tiene como parámetros $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, de acuerdo con la notación que hemos estado trabajando: $y = ax^2 + bx + c$

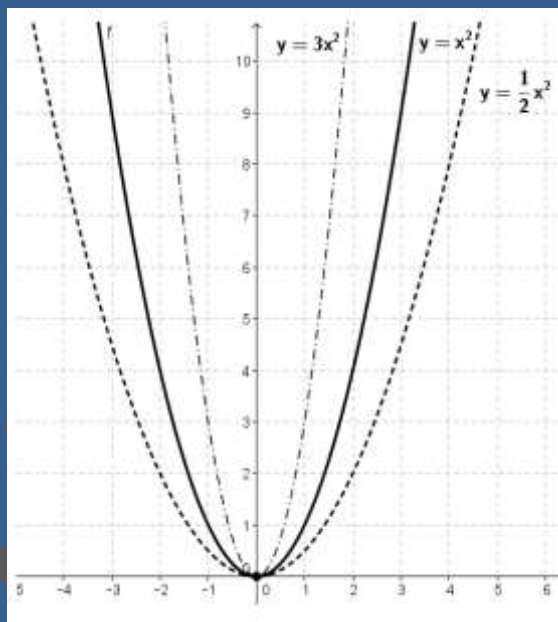
$$y = ax^2$$

- # Analicemos qué sucede con las gráficas, si modificamos el parámetro “a”.
Para ello grafiquemos las funciones dadas por

$$\begin{aligned} \oplus \quad y &= x^2 \\ \oplus \quad y &= 3x^2 \\ \oplus \quad y &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

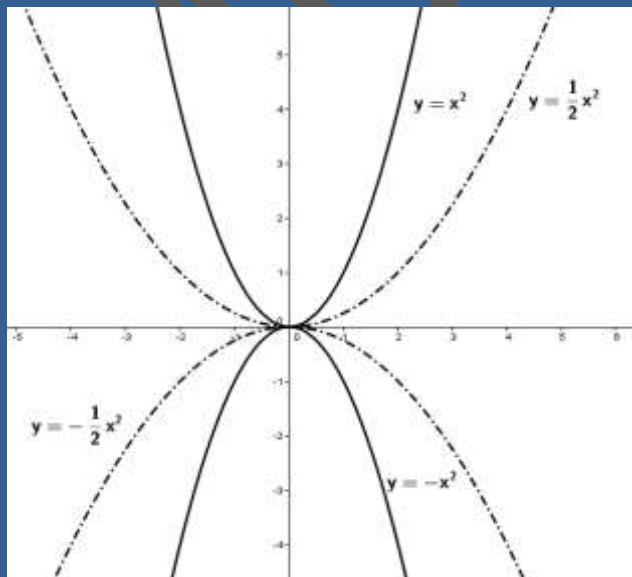
Note en la figura adjunta, que la gráfica de la función $y = 3x^2$ es una **contracción** con respecto a $y = x^2$

Por su parte, la gráfica de la función $y = \frac{1}{2}x^2$ se **dilató** en comparación con $y = x^2$



En $y = ax^2$ $\begin{cases} \text{Si } a > 1 & \text{la gráfica se contrae} \\ \text{Si } 0 < a < 1 & \text{la gráfica se dilata} \end{cases}$

- # Seguidamente comparemos el comportamiento de las gráficas de las funciones dadas por



$$\begin{aligned} \oplus \quad y &= x^2 \\ \oplus \quad y &= -x^2 \\ \oplus \quad y &= \frac{1}{2}x^2 \\ \oplus \quad y &= -\frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Se puede usar tablas de valores o bien el *Geogebra*. La figura adjunta muestra dichas gráficas.

Observe que la gráfica de $y = -x^2$ es el reflejo de $y = x^2$, respecto al eje “x”. De la misma forma $y = -\frac{1}{2}x^2$ con $y = \frac{1}{2}x^2$.

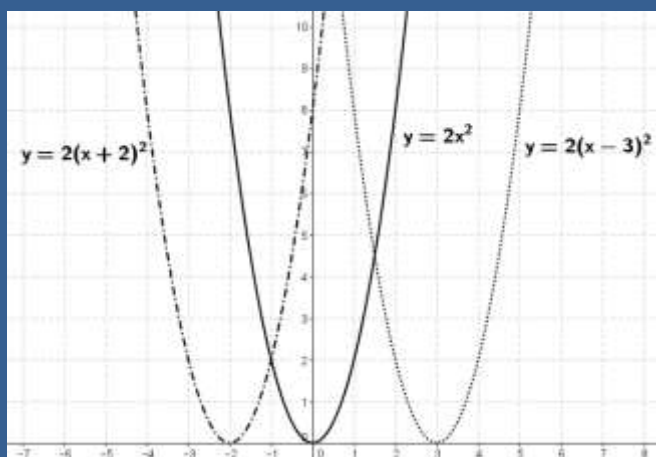
Para $y = ax^2$ $\begin{cases} \text{Si } a > 0 & \text{se dice que la gráfica es cóncava hacia arriba} \\ \text{Si } a < 0 & \text{se dice que la gráfica es cóncava hacia abajo} \end{cases}$

Vértice: $(0,0)$

$$y = a(x - h)^2$$

⌘ Comparemos las gráficas de las funciones dadas por

- ⊕ $y = 2x^2$
- ⊕ $y = 2(x - 3)^2$
- ⊕ $y = 2(x + 2)^2$



Note que la gráfica de $y = 2(x - 3)^2$ se trasladó 3

unidades a la derecha con respecto a la gráfica $y = 2x^2$

Por su parte, la gráfica de $y = 2(x + 2)^2$ es una traslación de dos unidades a la izquierda de la gráfica $y = 2x^2$.

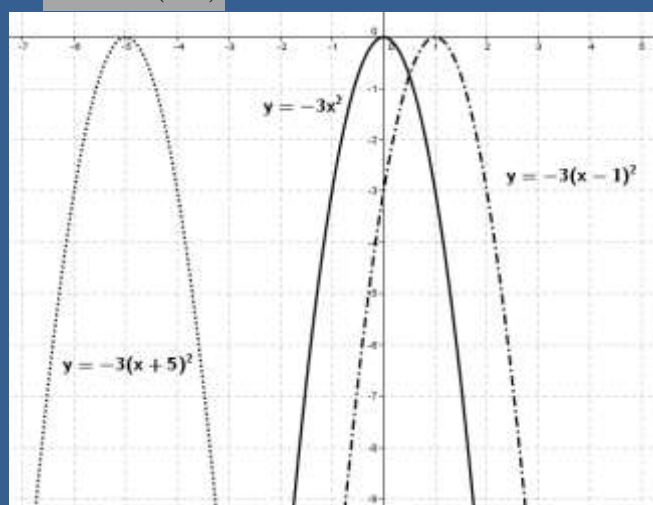
- La gráfica de $y = a(x - h)^2, h > 0$ es una traslación de “ h ” unidades a la derecha de la curva dada por $y = ax^2$
- La gráfica de $y = a(x - h)^2, h < 0$ es una traslación de “ h ” unidades a la izquierda de la curva dada por la función $y = ax^2$

Vértice: $(h,0)$

⌘ Analicemos las gráficas de las funciones, según los criterios dados.

- ⊕ $y = -3x^2$
- ⊕ $y = -3(x - 1)^2$
- ⊕ $y = -3(x + 5)^2$

Observe cómo se trasladaron las gráficas hacia la izquierda o derecha.



$$y = a(x - h)^2 + k$$

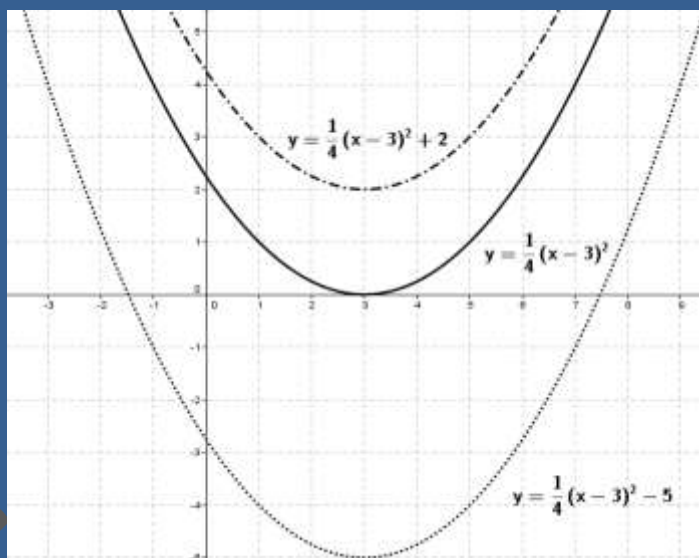
✚ Consideremos las gráficas de las funciones, según los criterios dados.

$$\oplus y = \frac{1}{4}(x - 3)^2$$

$$\oplus y = \frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2$$

$$\oplus y = \frac{1}{4}(x + 5)^2 - 5$$

Observe que la función dada por $y = \frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2$ se trasladó dos unidades hacia arriba con respecto a la gráfica de $y = \frac{1}{4}(x - 3)^2$, mientras que la de $y = \frac{1}{4}(x + 5)^2 - 5$ se trasladó 5 unidades hacia abajo.



- La gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$, $k > 0$ es una traslación de “ k ” unidades hacia arriba de la curva dada por $y = a(x - h)^2$
- La gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$, $k < 0$ es una traslación de “ k ” unidades hacia abajo de la curva dada por $y = a(x - h)^2$

Vértice: (h, k)

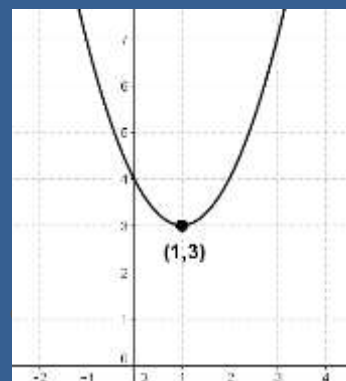
Aclaraciones

- ✚ Para las funciones dadas por $y = a(x - h)^2 + k$, el punto máximo o mínimo de sus gráficas está determinado por el par ordenado (h, k) y recibe el nombre de **vértice**.
- ✚ Si $a > 0$, el vértice es el punto mínimo y si $a < 0$, es el punto máximo.

Ejemplos: Grafique cada función según el criterio dado

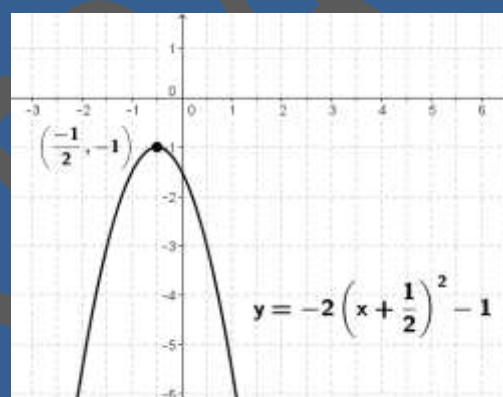
(a) $y = (x-1)^2 + 3$

El vértice de la gráfica es (1,3) y es cóncava hacia arriba.



(b) $y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$

El vértice de la gráfica es $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ y es cóncava hacia abajo.



(c) $y = 2x^2 - 4x + 5$

Primero se completan cuadrados de modo que se pueda expresar el criterio de la forma

$$y = a(x-h)^2 + k$$

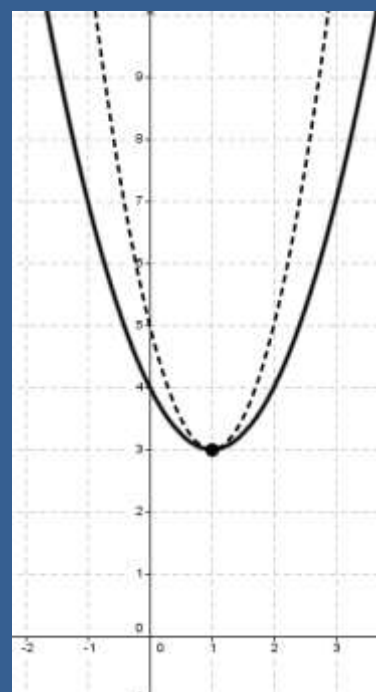
$$y = 2x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y = 2\left(x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = 2\left[\left(x^2 - 2x + 1\right) + \frac{5}{2} - 1\right] \Rightarrow y = 2\left[\left(x-1\right)^2 + \frac{3}{2}\right]$$

$$\Rightarrow y = 2(x-1)^2 + 3$$

Por tanto, la parábola es cóncava hacia arriba con vértice (1,3). Esta gráfica es una contracción con respecto al ejemplo (a)

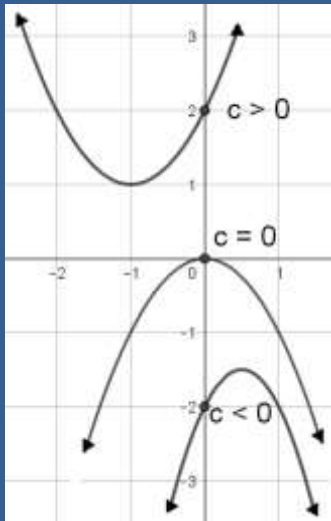
En la figura adjunta, la curva punteada representa la gráfica de la función $y = 2x^2 - 4x + 5$



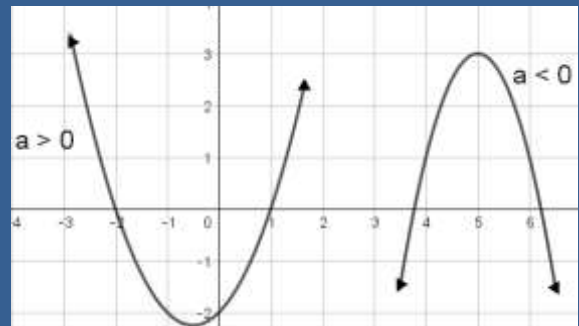
$$y = ax^2 + bx + c$$

Cuando la función está dada por $y = ax^2 + bx + c$, también se puede analizar la influencia de los parámetros “a”, “b” y “c” sin necesidad de completar cuadrados.

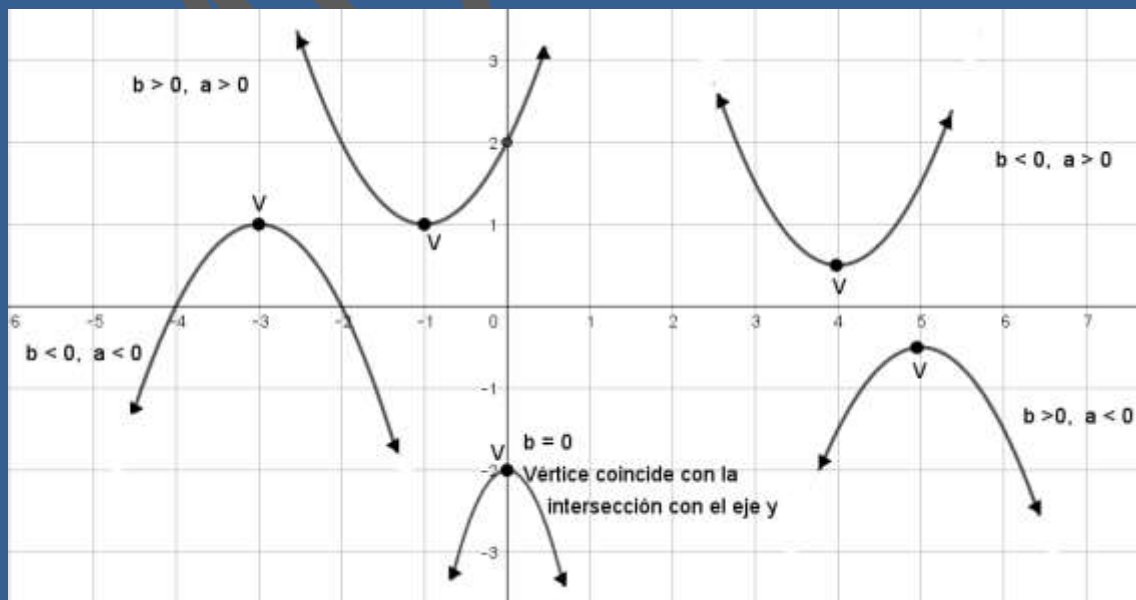
El valor de “a” nos determina la concavidad



El valor de “c” nos determina el valor en que interseca la gráfica al eje “y”



El valor de “b” se ejemplifica en las siguientes gráficas





Hora de practicar

Ejercicios 16 Función cuadrática(B)

1. En cada caso, determine el vértice de la gráfica de la función, según el criterio dado e indique la concavidad.

(a) $f(x) = (x - 7)^2 + 8$ (b) $f(x) = (x + 1)^2 - 6$ (c) $f(x) = x^2 - 5$

(d) $f(x) = (x - 4)^2$ (e) $f(x) = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + 9$ (f) $f(x) = -x^2$

(g) $f(x) = -(x + 9)^2$ (h) $f(x) = x^2 - 16x + 62$ (i) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

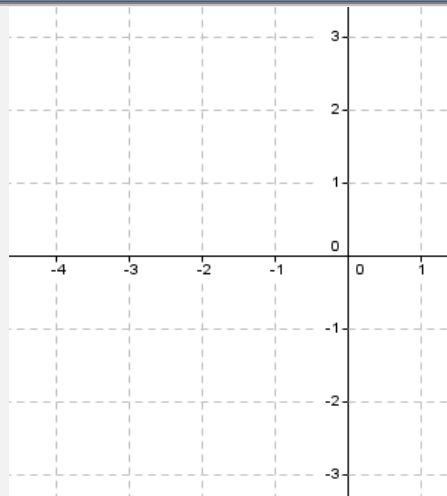
(j) $f(x) = -3(x - 1)^2 + 1$ (k) $f(x) = -(x + 9)^2 - 4$ (l) $f(x) = x^2 - 14x + 44$

2. Dado el criterio de cada función cuadrática, determine lo que se le solicita y grafique.

Criterio	Concavidad	Vértice	Gráfica
(a) $y = 3x^2$			
(b) $y = -\frac{1}{4}x^2$			

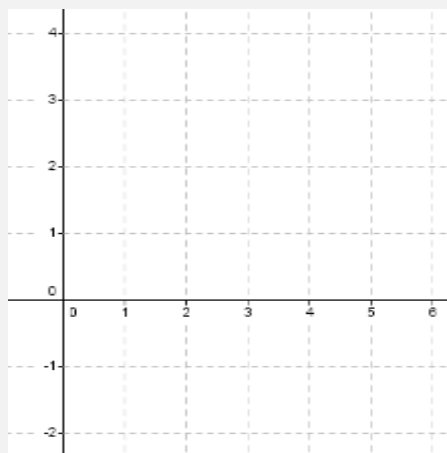
(c)

$$y = (x + 4)^2 - 2$$



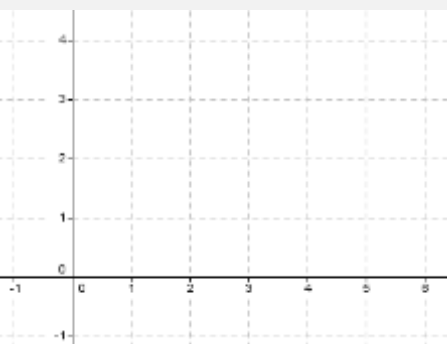
(d)

$$y = -2(x - 5)^2 + 3$$

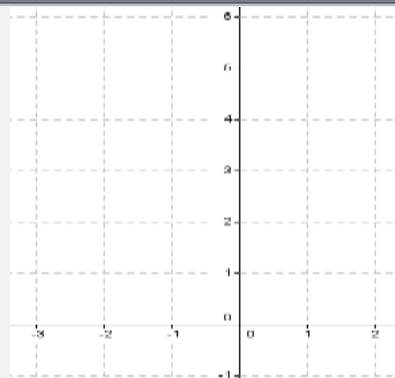


(e)

$$y = x^2 - 8x + 17$$

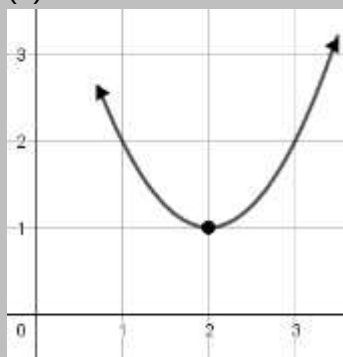


(f)
 $y = -x^2 - 2x + 5$

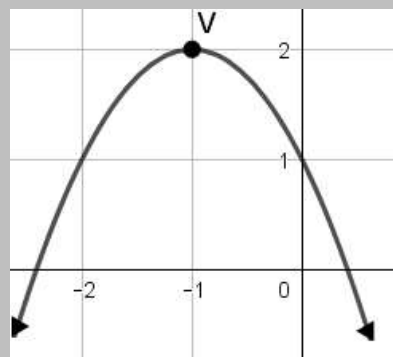


3. Cada gráfica representa a una función cuyo criterio está dado por $h(x) = a(x - h)^2 + k$, con $a = \pm 1$. Indique para cada caso, el criterio. Luego expréselo de la forma $h(x) = ax^2 + bx + c$

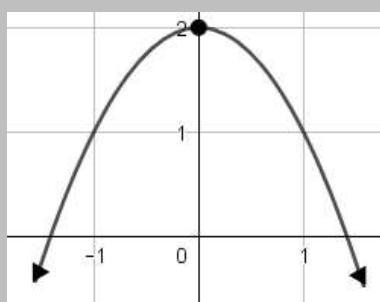
(a)



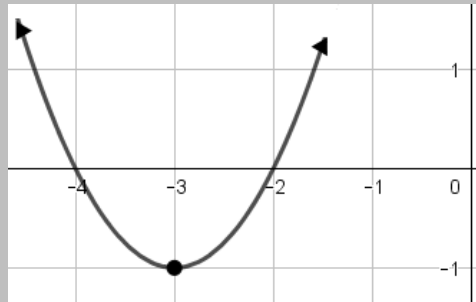
(b)



(c)



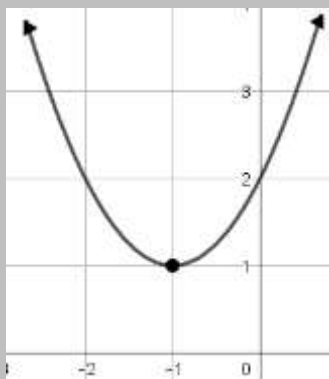
(d)



4. Cada gráfica, representa una función de criterio $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Escriba $<$, $>$, $=$ según el análisis de los parámetros a , b y c

(a)

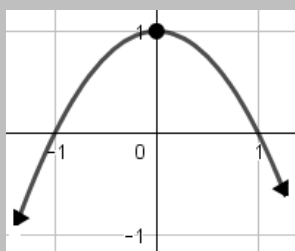


a ___ 0

b ___ 0

c ___ 0

(b)

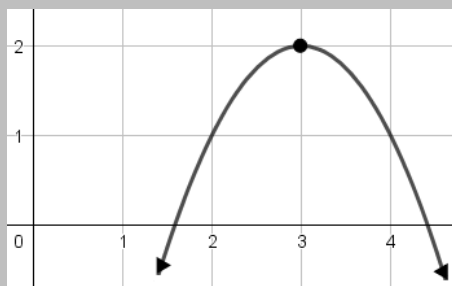


a ___ 0

b ___ 0

c ___ 0

(c)

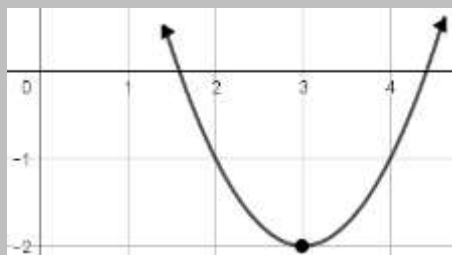


a ___ 0

b ___ 0

c ___ 0

(d)



a ___ 0

b ___ 0

c ___ 0

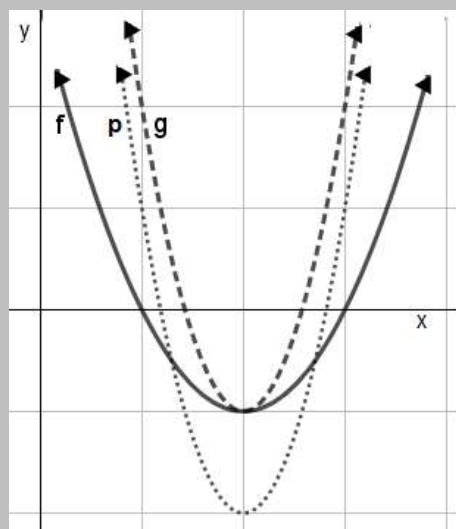
5. Considere las gráficas f , p y g (las cuales aparecen con diferentes tipos de línea, con el fin de que se diferencien más fácilmente), y cuyos criterios están expresados por:

$$f(x) = a_1(x - h_1)^2 + k_1$$

$$p(x) = a_2(x - h_2)^2 + k_2$$

$$g(x) = a_3(x - h_3)^2 + k_3$$

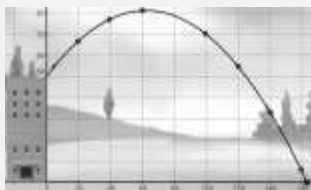
Según la información proporcionada, indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.



- _____ Si $a_2 > 1$ entonces $a_2 > a_3$
- _____ $h_2 > h_3$
- _____ $h_1 = h_3$
- _____ k_2 es una unidad menor que k_3
- _____ $a_3 > 0$
- _____ El vértice en la gráfica de f coincide con el vértice de la gráfica de g
6. Si la función f está dada por $f(x) = 2(x - 5)^2 + 3$, determine el criterio de una función g donde el vértice de su gráfica, se traslada dos unidades a la derecha y una hacia abajo, con respecto al vértice de la gráfica f .
7. Si la función f está dada por $f(x) = -6(x + 9)^2 + 1$, determine el criterio de una función g donde el vértice de su gráfica, se traslada tres unidades a la derecha y cuatro hacia arriba, con respecto al vértice de la gráfica f .
8. Si la función f está dada por $f(x) = 5(x - 7)^2$, determine el criterio de una función g donde el vértice de su gráfica, se traslada seis unidades a la izquierda y dos hacia arriba, con respecto al vértice de la gráfica f .

Habilidad específica.

8. Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
9. Resolver ecuaciones que se reducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
12. Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Escenario de aprendizaje**El pelotazo**

Retomemos el escenario con el cual se inició este capítulo, en donde se da un criterio para determinar la altura h en metros, a la que se encuentra un balón lanzado desde la azotea de un edificio hacia arriba, dada la distancia horizontal “ x ” en metros, a la que se encuentra dicha pelota del edificio.

La fórmula que modula este fenómeno es $h(x) = -0,008x^2 + x + 50$.

En su momento, determinábamos la altura, según la medida de “ x ”. Pero también podemos realizar el proceso contrario, esto es, determinar la distancia horizontal, conociendo la altura.

Determine la altura a la que se encuentra el balón cuando la distancia horizontal es de 50 metros.

Para este escenario, tenemos el valor de “ x ” y necesitamos calcular la altura a la que se encuentra el balón. Es decir, se cumple la siguiente relación:

$$50 = -0,008x^2 + x + 50$$

Estamos ante una ecuación de segundo grado con una incógnita. Tal como se estudió en octavo, la ecuación es como una balanza equilibrada, por lo cual se puede restar 50 a ambos lados, y la igualdad se mantiene:

$$0 = -0,008x^2 + x$$

Ahora podemos usar los conocimientos de factorización y obtener:

$$0 = x(-0,008x + 1)$$

Para resolver esta ecuación es necesario usar un resultado muy importante que indica que:

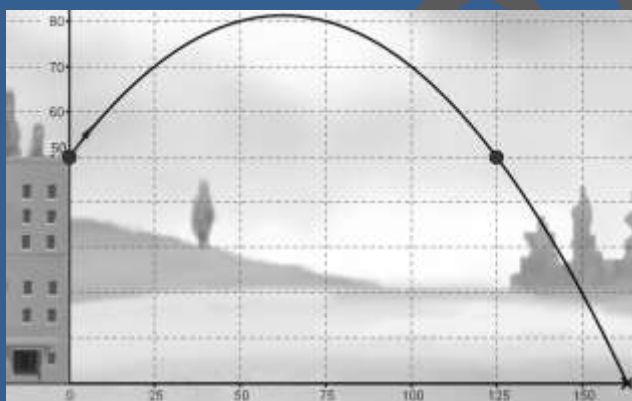
$$\text{Si } a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

De este modo, $x = 0$ o $-0,008x + 1 = 0$

Evidentemente, cuando la distancia horizontal es cero, la altura es de 50. Pero

también se da en el caso que $-0,008x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{-0,008} = 125$

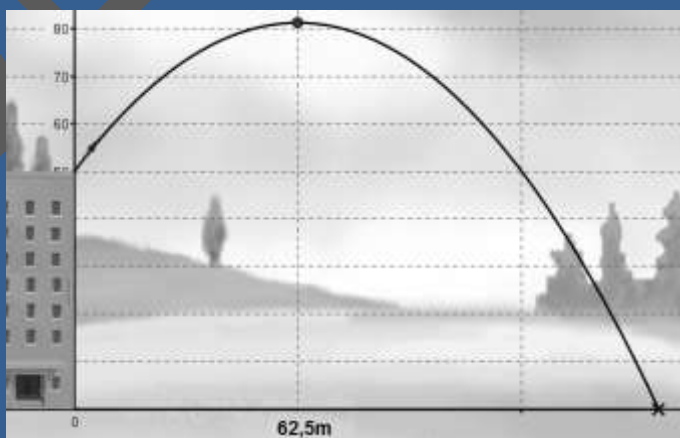
Por tanto, la altura del balón es de 50 metros, cuando la distancia horizontal es de 0 metros o de 125 metros.



Observe que la ecuación tiene **dos soluciones**, a diferencia de las ecuaciones lineales, que solo admiten una.

Si analizamos la gráfica, podemos notar que habrá valores para los cuales no tiene sentido resolver la ecuación. Por ejemplo, si la longitud horizontal es de 200 metros, ya el balón ha caído, por lo cual, la ecuación $200 = -0,008x^2 + x + 50$ **no tendrá solución real**. También

puede suceder que la ecuación **solo tenga una solución**, en este caso, se dará cuando el balón alcanza la altura máxima (81,25 metros). El valor de "x" será de 62,5 metros.



Ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática es aquella de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

Hay diversos métodos para resolver este tipo de ecuaciones, a continuación se abordan algunas.

Cuando $c = 0$, la ecuación se puede resolver factorizando mediante factor común:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ \Rightarrow x(ax + b) &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad ax + b &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad x &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Ejemplo:

(a) Halle el conjunto solución de $3x - 8x^2 = 0$

$$\begin{aligned} 3x - 8x^2 &= 0 \\ \Rightarrow x(3 - 8x) &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad 3 - 8x &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad x &= \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$C_s = \left\{ 0, \frac{3}{8} \right\}$$

Cuando $b = 0$ y $c < 0$, la ecuación se puede resolver factorizando mediante diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} ax^2 - c &= 0 \\ \Rightarrow (\sqrt{a}x + \sqrt{c})(\sqrt{a}x - \sqrt{c}) &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{a}x + \sqrt{c} = 0 \quad \text{ó} \quad \sqrt{a}x - \sqrt{c} &= 0 \\ \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \quad \text{ó} \quad x &= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

También puede resolverse así:

$$ax^2 - c = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow x = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{ó} \quad x = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Ejemplo:

(b) Determine los valores de “x” que satisfacen la ecuación $9x^2 - 16 = 0$

$$9x^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (3x - 4)(3x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 4 = 0 \quad \text{ó} \quad 3x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{4}{3}$$

(c) Halle el conjunto solución de $2x^2 - 5 = 0$

$$2x^2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{ó} \quad x = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad C_s = \left\{ -\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}} \right\}$$

Por inspección

Hay casos en los que para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, el polinomio $ax^2 + bx + c$ es factorizable en los racionales mediante inspección. Veamos:

(d) Determine los valores de “x” que satisfacen la ecuación $2x^2 + 11x - 40 = 0$

$$2x^2 + 11x - 40 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 2x & -5 \\ x & 8 \end{array}$$

$$\Rightarrow (2x - 5)(x + 8) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \quad \text{ó} \quad x = -8$$

Por fórmula general f

No siempre es posible factorizar el polinomio $ax^2 + bx + c$ de modo que queden coeficientes racionales. Es por ello, que resulta necesario otro método para resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática, sin necesidad de factorizar. Este método se conoce como fórmula general.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0 \quad \text{Al sacar "a" a factor}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Se completa cuadrados, sumando y restando $\left(\frac{\frac{b}{a}}{2} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Se factoriza el trinomio y se homogenizan las fracciones:

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se hace la operación inversa de la potencia:

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Se extrae factores del radical:

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De este modo, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aclaración

A la expresión $b^2 - 4ac$ se le conoce como discriminante, y tiene como símbolo Δ .

Por tanto, el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ queda expresado como

$$C_s = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\} \text{ siempre que } \Delta \geq 0$$

Ejemplos: Determine el conjunto solución de:

(e) $3x^2 + x - 1 = 0$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot -1}}{2 \cdot 3} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot -1}}{2 \cdot 3} \quad \Delta = 13$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} \quad C_s = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} \right\}$$

(f) $x(2x + 3) - 3(1 - x) = -5$

Primero expresamos la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$\begin{aligned} x(2x + 3) - 3(1 - x) &= -5 \\ \Rightarrow 2x^2 + 3x - 3 + 3x + 5 &= 0 \\ \Rightarrow 2x^2 + 6x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} \quad x_2 = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} \quad \Delta = 20$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{20}}{4} \quad x_2 = \frac{-6 - \sqrt{20}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$C_s = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

(g) $2x^2 - 3x + 3 = 0$

En este caso, al determinar el discriminante se obtiene: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -15$, por tanto la expresión $\sqrt{-15}$ no tiene sentido en $\mathbb{R}$. Se concluye que no existe valor para "x" que satisfaga la ecuación, de tal modo que el conjunto solución es vacío. Esto se simboliza $C_s = \{ \}$, o bien $C_s = \phi$

(h) $25x^2 - 10x + 1 = 0$

$$x_1 = \frac{-(-10) + \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1}}{2 \cdot 25}$$

$$x_1 = \frac{10 + 0}{50}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{5} \quad C_s = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$$

$$x_2 = \frac{-(-10) - \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1}}{2 \cdot 25}$$

$$x_2 = \frac{10 - 0}{50}$$

$$\Delta = 0$$

Note que al ser el discriminante igual a cero, solo existe una solución para la ecuación.

Análisis del discriminante

En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, el discriminante Δ está dado por $b^2 - 4ac$ y se cumple que:

- ✚ Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
- ✚ Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales.
- ✚ Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

Aplicación de las ecuaciones cuadráticas

Escenario de aprendizaje

Negociando

En una compañía, las utilidades mensuales (en miles de dólares), obtenidas al invertir “x” dólares en publicidad, están dadas por la función cuyo criterio es

$$U(x) = -x^2 + 10x - 5$$

El encargado de la publicidad desea invertir 3000 dólares, pero su compañero le cuestiona el porqué no invierte más, para así obtener mejores ganancias, por lo que le sugiere invertir 9000 dólares.

- (a) ¿Cuál será la mejor estrategia, la del encargado o la de su compañero?
 (b) ¿Cuál inversión en publicidad logra producir la máxima ganancia?

La utilidad al invertir 3000 y 9000 dólares se calcula:

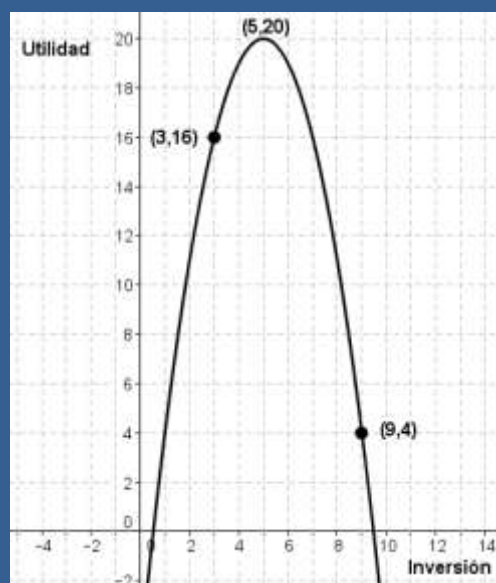
$$\# \quad U(3) = -(3)^2 + 10 \cdot 3 - 5 = 16 \quad \text{La utilidad es de 16 000 dólares}$$

$$\# \quad U(9) = -(9)^2 + 10 \cdot 9 - 5 = 4 \quad \text{La utilidad es de \$9 000}$$

Note que no necesariamente la utilidad aumenta al incrementar la inversión. En este caso, es más provechoso invertir \$3 000 en lugar de \$9 000.

Para analizar el comportamiento de esta función, es conveniente determinar el vértice y construir la gráfica.

$$\begin{aligned} U(x) &= -x^2 + 10x - 5 \\ &= -(x^2 - 10x + 5) \\ &= -[(x^2 - 10x + 25) + 5 - 25] \\ &= -[(x - 5)^2 - 20] \\ &= -(x - 5)^2 + 20 \end{aligned}$$



De este modo, el vértice es (5, 20), el cual es punto máximo, ya que la gráfica es cóncava hacia abajo. Por lo tanto, para obtener la mayor utilidad debe invertirse \$5 000, con lo que se obtendrá una ganancia de \$20 000.

Ejemplos:

(a) Se lanza una pelota desde el suelo hacia arriba. La altura “h” en metros, que alcanza esa pelota en función del tiempo “t” medido en segundos, está dada por $h(t) = -t^2 + 10t$. Determine la altura máxima de la pelota y en el tiempo que se alcanza.

Expresamos el criterio de la función de la forma $a(t - h)^2 + k$, mediante el proceso de completar cuadrados.

$$-t^2 + 10t = -(t - 5)^2 + 25$$

Observe que el vértice es (5,25), por lo cual la altura máxima alcanzada es de 25 metros, lo cual ocurre a los 5 segundos de haberse lanzado el balón.

(b) El dueño de un automóvil determina que el costo en colones por kilómetro, al conducir su vehículo a una velocidad de v km/h, está dado por $C(x) = 0,015v^2 - 2,5v + 120$. Determine la velocidad en la cual el automóvil consume el costo mínimo.

Completamos cuadrados:

$$\begin{aligned} C(x) &= 0,015v^2 - 2,5v + 120 = 0,015 \left(v^2 - \frac{530}{3}v + 8000 \right) \\ &= 0,015 \left[\left(v^2 - \frac{530}{3}v + \frac{62500}{9} \right) + 8000 - 62500 \right] \\ &= 0,015 \left[\left(v - \frac{250}{3} \right)^2 + \frac{9500}{9} \right] \\ &= 0,015 \left(v - \frac{250}{3} \right)^2 + \frac{95}{6} \end{aligned}$$

Como la parábola es cóncava hacia arriba, el vértice $\left(\frac{250}{3}, \frac{95}{6} \right)$ corresponde al punto mínimo. Por tanto, la velocidad con la que se consume menos combustible es de $\frac{250}{3}$ km/h, un aproximado de 83,3 km/h.

Diversas estructuras tienen forma parabólica, que corresponde a una función cuadrática.



Problemas:

(a) La medida de la base de un triángulo es tres unidades mayor que la medida de la altura. Si el área del triángulo es 119 cm^2 , entonces ¿cuál es la medida de esas dos dimensiones del triángulo?

Datos

x: medida de la altura

$x + 3$: medida de la base

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ecuación

$$\frac{x(x+3)}{2} = 119 \Rightarrow x(x+3) = 238 \Rightarrow x^2 + 3x - 238 = 0$$

$$\Rightarrow (x-14)(x+17) = 0 \Rightarrow x_1 = 14; x_2 = -17$$

Se descarta el valor negativo, por lo cual la altura mide 14 cm. Como la base está dada por $x + 3$, entonces mide $14 + 3 = 17 \text{ cm}$.

Respuesta

La base mide 17 cm y la altura 14 cm.

(b) Si a un número se le aumenta el recíproco de 3, resulta el recíproco del número, aumentado en 3. ¿Cuál es el número?

Datos

x: número

$\frac{1}{x}$: recíproco del número

Ecuación

$$x + \frac{1}{3} = \frac{1}{x} + 3 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 3 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{8}{3} \Rightarrow x^2 - 1 = \frac{8}{3}x$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{8}{3}x - 1 = 0 \quad \Delta = \left(\frac{-8}{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = \frac{100}{9}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\frac{8}{3} + \sqrt{\frac{100}{9}}}{2 \cdot 1} = 3 \quad x_2 = \frac{\frac{8}{3} - \sqrt{\frac{100}{9}}}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{3}$$

Respuesta Existen dos números que cumplen esta condición: 3 y $-1/3$

(c) El perímetro de un rectángulo es de 76 cm y su área es 360 cm². ¿Cuál es la medida del ancho del rectángulo?

Datos

P: perímetro $P = 2\ell + 2a$ ℓ : medida del largo
a: medida del ancho $A = \ell \cdot a$

Se reemplazan los datos en la igualdad correspondiente al perímetro del rectángulo:

$$\Rightarrow 76 = 2\ell + 2a \quad \text{Al despejar la variable } \ell:$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{2a - 76}{2} \Rightarrow \ell = a - 38$$

Ecuación

Ahora bien, como el área debe ser de 360cm², se plantea: $A = \ell \cdot a = 360$

Al sustituir $\ell = a - 38$ en $\ell \cdot a = 360$, se obtiene la ecuación cuadrática que permite resolver el problema:

$$a \cdot (38 - a) = 360 \Rightarrow 38a - a^2 = 360 \Rightarrow -a^2 + 38a - 360 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 18 \text{ y } a_2 = 20$$

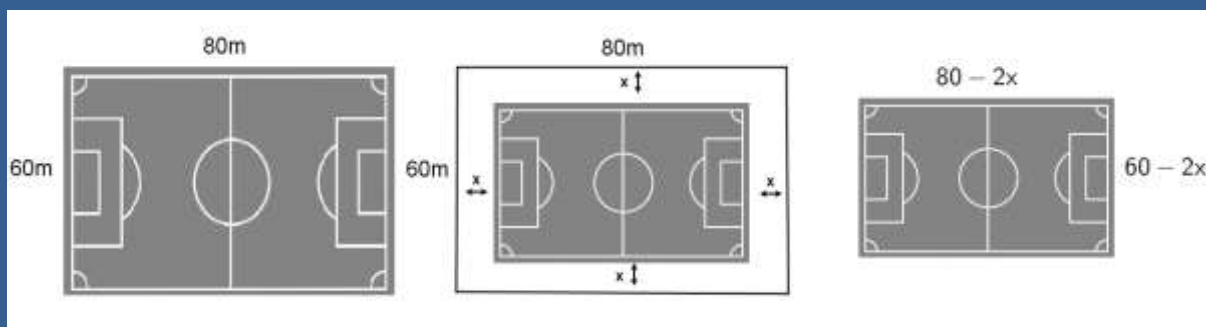
Tomando $a = 18$ se obtiene: $\ell = 38 - 18 = 20 \Rightarrow \ell = 20$

Así el ancho mide 18 cm y el largo 20 cm. (Nota: si se toma $a = 20$ se obtiene $\ell = 18$ y no es congruente con la definición de variables, pues el largo es mayor que el ancho)

Respuesta: La medida del ancho del rectángulo es de 18 cm.

(d) Una cancha multiuso mide 60 metros por 80 metros. En un proyecto comunal, se decide reducir un poco la cancha para construir una acera de ancho uniforme alrededor de esta, de modo que el área de la nueva cancha sea $\frac{1}{2}$ de la anterior. Determine la medida del ancho de la acera.

El siguiente dibujo nos ayudará a entender mejor el problema:



Según los datos del problema, se llega a plantear la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 (80 - 2x)(60 - 2x) &= \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 60 \\
 \Rightarrow 4800 - 160x - 120x + 4x^2 &= 2400 \\
 \Rightarrow 4x^2 - 280x + 4800 - 2400 &= 0 \\
 \Rightarrow 4x^2 - 280x + 2400 &= 0 \\
 \Rightarrow 4(x^2 - 70x + 600) &= 0 \\
 x &= -60 \\
 x &= -10 \\
 \Rightarrow x_1 = 60 \quad x_2 = 10
 \end{aligned}$$

La primera solución ($x = 60\text{m}$) no tiene sentido en el problema, puesto que indicaría que el ancho es negativo. Por tanto, la medida del ancho de la acera debe ser de 10 metros.



Hora de practicar

Ejercicios 17 **Ecuaciones cuadráticas**

1. Dé el conjunto solución de las siguientes ecuaciones. [Se sugiere no usar fórmula general]

$$\begin{array}{lll}
 (a) \ x^2 - 5x = 4 - 5x & (b) \ 10x^2 - 18 = 32 & (c) \ x^2 - 7 = 0 \\
 (d) \ x^2 - 169 + 2x = 2x & (e) \ \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}x - 1\right) = 0 & (f) \ 3x(x+1) = \frac{6x-1}{2} \\
 (g) \ 3x^2 - 5x = 0 & (h) \ 5x^2 = 9x & (i) \ -5x^2 - 5x + 9 = 2x + 9 \\
 (j) \ (x-1)^2 - (2x+1)^2 = 0 & (k) \ -6m + 4 = (m-2)^2 & (l) \ \frac{w^2}{4} = 7 \\
 (m) \ 2(10n^2 - 7) = 27n & (n) \ \frac{2x^2 - x}{3} - (2x - 1) = 0 & (o) \ 3p^2 + 3p = -2(p-1) \\
 (p) \ 2x(2x-5) + 1 = 1 - 3x & (q) \ \frac{x^2}{2} - \frac{x-4}{4} = 1 & (r) \ x^2 + x(3x-1) = 5 - (3x^2 - x)
 \end{array}$$

2. Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones. [Use la fórmula general]

$$\begin{array}{lll}
 (a) \ 3x^2 - 9x + 3 = 0 & (b) \ x^2 - 4x + 1 = 0 & (c) \ 5c^2 + 3c = 2 \\
 (d) \ (2x-5)^2 = 1 & (e) \ 5x^2 + x = 3 & (f) \ 2x^2 - 71 = 1 \\
 (g) \ x^2 + 9x = -8 + 3x & (h) \ \frac{2x^2 - x}{2} = 6 - \left(\frac{3x-1}{2}\right) & (i) \ 4m(m-3) = -9 \\
 (j) \ x(x-3) = x-5 & (k) \ (3x-1)^2 - (x-3)^2 = x & (l) \ 3x^2 - 2x + 1 = 0 \\
 (m) \ \frac{x}{2} \left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{5-5x}{6} & (n) \ 5h^2 + 3 = 1 & (o) \ x + (3x^2 - 5x + 1) = -x(x-5)
 \end{array}$$

3. Resuelva cada uno de los siguientes problemas, mediante ecuaciones cuadráticas.

(a) Hipólito y Genaro a su corta edad son grandes amigos. La suma de sus edades es de 13 años y su producto de 40. ¿Qué edad tiene cada uno?

(b) Eliodora disfruta un día libre en un parque, y vuela un papalote que tiene forma de rombo, cuya área es de 40 cm^2 y la longitud de una diagonal es cinco cuartas partes de la otra ¿cuál es la medida de cada diagonal del papalote?

(c) Si la longitud de cada lado de un primer cuadrado se aumenta en 6, entonces el área del cuadrado que se forma es cuatro veces el área del cuadrado original. ¿Cuál es el área del cuadrado original?

(d) Segismundo tiene un terreno en forma rectangular en el cual va a sembrar hortalizas. El área del terreno es de 203 m^2 . Si la medida del largo es el triple de la medida del ancho aumentado en ocho; determine la medida del largo y del ancho de esa propiedad.

(e) Pancracia tiene 3 cartas numeradas. Su hermana quiere saber los números, pues estos son la contraseña de la computadora. Pancracia le dice que la suma de los cuadrados de los tres números de las tarjetas es de 1313. El segundo, es igual al primero disminuido en cinco y el tercero, el triple del primero aumentado en uno. ¿Cuáles son los números de las tres tarjetas que necesita conocer la hermana de Pancracia?

(f) Si la diferencia entre las edades de un niño y su abuelita es de 53 años y el producto 1020, ¿Cuál es la edad de la abuelita?

(g) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos impares es 290. Determine cada número.

(h) Un número positivo disminuido de 53 es igual al cuadrado de la suma de dicho número y tres. Determine el número.

(i) Los lados de un triángulo miden 9cm, 16cm y 17cm. ¿Qué cantidad fija hay que restar a cada lado de ese triángulo para obtener un triángulo que sea rectángulo?

(j) Al producto de dos números pares consecutivos se le aumenta el triple del número mayor de ellos y se obtiene 156. Determine el número menor.

(k) Determine un número entero positivo tal que al aumentarse en 6 sea equivalente a 40 veces el recíproco del mismo número.

(l) Sean tres números impares consecutivos positivos, tales que el producto de los dos mayores excede en uno, al doble del cuadrado del menor. Determine cada número.

(m) El producto de dos números naturales consecutivos equivale a la suma de estos números aumentada en 29. Determine el número mayor.

(n) Calcule las dimensiones de un trapecio cuya superficie es de 52 cm^2 , donde la longitud de la base mayor es el triple de longitud de la base menor aumentada en dos y la altura es dos terceras partes de la base menor.

(o) Plutarco desea construir con un pliego cuadrado de cartulina una caja sin tapa y de base cuadrada, con el fin de colocar arena que necesita para su proyecto científico. Para ello, corta un cuadrado de 3,5 cm de lado en cada esquina de la cartulina y los dobla hacia arriba. Si el volumen de la caja es de $283,5 \text{ cm}^3$, cuáles son las dimensiones de la cartulina.

4. Resuelva cada problema.

(a) La ganancia G en millones de colones por vender cierto artículo, está dada por $G(x) = 7250x - 5x^2$, donde “ x ” es la cantidad (en miles) de artículos vendidos por mes. ¿Cuántos artículos se deben vender por mes para obtener la mayor ganancia? ¿De cuánto será esa ganancia?

(b) Un objeto es lanzado al aire. Su altura “ h ” en metros, depende del tiempo “ t ” en segundos y se modela mediante el criterio $h(t) = 14t - 5t^2$. Determine la altura máxima que alcanza el objeto.

(c) La temperatura T en grados Fahrenheit del radiador de un automóvil, durante los primeros 4 minutos de conducción, depende del tiempo “ t ”, mediante la relación

$$T(t) = 6,2t^2 + 12t + 32$$

i) ¿Cuál es la temperatura del radiador al arrancar el automóvil?

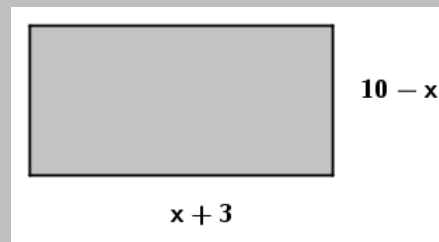
ii) A los tres minutos, ¿cuál es la temperatura el radiador?

(d) Considere el rectángulo.

i) Exprese el área A del rectángulo, en función del valor de “ x ”

ii) ¿Cuál debe ser el valor de “ x ” para obtener el área mayor?

iii) ¿Cuál sería esa área máxima?



(e) La fórmula para calcular la distancia d , en pies, que se requiere para detener un automóvil está dada por $d(v) = \frac{1}{10}v^2$, donde v es la velocidad del automóvil en millas por hora. Si la distancia que se necesitó para detener el vehículo fue de 35 pies, ¿qué velocidad llevaba este?

AFRONTANDO RETOS

Determine el valor de: $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$

Practiquemos con cuadros mágicos.



Un cuadro mágico es un arreglo cuadrado de números cuyas columnas, filas y diagonales suman el mismo total.

Resuelva cada una de las ecuaciones cuadráticas y **sume las raíces (soluciones)**. Escriba la respuesta en el espacio correspondiente. Verifique al final que el cuadro resultante sea en efecto un cuadro mágico. Por ejemplo, para un recuadro que tiene como operación $x^2 - 16 = 0$, las raíces son 4 y -4 ; por lo que se escribirá en el recuadro correspondiente el resultado de $4 + -4$, que sería 0 en este caso. Si solo hay una solución, se coloca ese resultado.

Ecuaciones:

- (1) $x^2 - 5x = -4$
- (2) $\frac{x^2 + 7x}{5} = 0$
- (3) $x^2 - 3x = x - 4$
- (4) $4x(x + 3) = 7$
- (5) $\frac{x^2}{9} = 0$
- (6) $-3 + x^2 - x = -(-1 - 2x)$
- (7) $\frac{5x^2}{2} + 5x = 0$
- (8) $-10x + x^2 + 49 = 4x$
- (9) $5x + x^2 = -6$

1.	2.	3.
4..	5.	6
7.	8.	9.

Respuestas

Ejercicios 1: Números reales

- (1) (a) $\approx 263,93 \in \mathbb{I}$ (b) $\approx 3694,52 \in \mathbb{I}$
 (c) $3\text{cm}^2 \in \mathbb{Q}$ (d) $\approx \text{€}760799,64 \in \mathbb{I}$
 (e) $\approx 2,14\text{m}^3 \in \mathbb{I}$ (f) $\approx 1,61 \in \mathbb{I}$
 (g) $\approx 0,6 \in \mathbb{I}$ (h) $2/5\text{m}^2 \in \mathbb{Q}$
 (2) 3,1415926535 897932384
 (3) 7π
 (4)

Expresión	Racional	Irracional	Expresión	Racional	Irracional
1,61	x		e^2		x
6π		x	4,67	x	
$4\sqrt{5}$		x	2,7134023	x	
3,14	x		$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$	x	
$-\frac{\pi}{2}$	x		$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$	x	
$4\Phi - 4\Phi$	x		2,333...	x	
$\frac{\pi-1}{4}$		x	$-\frac{3}{7}$	x	
$\frac{2}{7^2}$		x	-0,8	x	

(5)

Expresión	IP	INP	F	Expresión	IP	INP	F
-8,67392			x	$3\Phi - \Phi$		x	
$-\frac{7}{3}e$		x		$\frac{1}{\sqrt{81}}$	x		
$\frac{\sqrt{169}}{26}$			x	2			x
$\pi - 1$		x		$\frac{1}{4}$		x	
1,252525...	x			π^3		x	
$7^{\frac{2}{3}}$		x		-7,3	x		

- (6) (a) < (b) > (c) = (d) < (e) > (f) >
 (7)

$$\sqrt[3]{-7}, -\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4}\Phi, \frac{e}{2}, \sqrt[6]{25}, \frac{\sqrt{24}}{2}$$

- (8) El círculo (9) (a) entre 3 y 4
 (b) entre -5 y -4 (c) entre -2 y -1
 (d) entre 3 y 4
 (10) (a) 1 y 2 (b) -16 y -15 (c) -1 y 0
 (d) -7 y -6 (e) 0 y 1 (f) 4 y 5
 (11) 3
 (12) (a) $\approx -0,31$ (b) $\approx 7,23$ (c) $\approx 3,17$
 (d) $\approx 12,61$ (e) $\approx 2,16$ (f) $\approx 2,13$
 (g) $\approx 1,31$ (h) $\approx -4,66$
 (13) $\approx 75,71\text{m}$ (14) 71 (15) 50m^2
 (16) $\approx 15,79\text{dm}^2$
 (17) 29cm (18) $40\pi \in \mathbb{I}$
 (19) $\approx \text{€}190\,687,37$
 (20) (a) 5cm (b) $\approx 2,51$ (21) 34m

Ejercicios 2: Sistema Internacional de medidas

- (1) $\approx 81,63$ (2) $\approx 3,5 \times 10^{12}$
 (3) 1 377 250 000m

- (4) $\approx 10,92$ (5) glóbulo rojo

- (6) 2 920 000

- (7) (a) 2,345 (b) 0,053456 (c) 2000
 (d) 23 000 (e) 98,763 (f) 2 700
 (g) 3,423 234 (h) 0,000182
 (8) 3×10^{10} (9) 100 000 km

Ejercicios 3: Teorema de Pitágoras

- (1) (a) $\sqrt{58}$ (b) $5\sqrt{2}$ (c) 2 (d) 6
 (e) 13 (f) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (2) (a) 4m (b) 8cm

- (c) $2\sqrt{3}\text{m}$ (d) 5 (e) $\sqrt{3}$ (f) $\frac{\sqrt{851}}{2}\text{cm}$

- (3) (a) $\sqrt{106}\text{cm}$ (b) 2dm (c) $\sqrt{10}\text{cm}$

- (d) $\frac{\sqrt{311}}{4}\text{cm}$ (e) 10cm (f) $4\sqrt{2}\text{cm}$

- (g) $\frac{h}{\sqrt{5}}$ (h) $\sqrt{2}\text{cm}$ (l) $\frac{\sqrt{82}}{3}\text{cm}$

- (4) (a) $d = 5\sqrt{15}\text{cm}$ $A = \frac{25\sqrt{15}}{2}\text{cm}^2$

- (b) 10cm (c) $\approx 3,23\text{m}$ (d) $5\sqrt{3}\text{m}$

- (5) $\frac{33}{2}$ (6) A (7) A (8) C (9) B

- (10) $\approx 11,21\text{m}$ (11) 17 pulgadas

- (12) $\approx 1,52\text{m}$ (13) $12\sqrt{10}\text{cm}$

- (14) $5\sqrt{3}$ (15) (a) $\sqrt{34}$ (b) $2\sqrt{5}$

- (c) $\sqrt{13}$ (d) $2\sqrt{5}$ (16) (a) $\frac{\sqrt{149}}{2}$ (b) 2

- (c) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (16) (d) $\sqrt{10}$ (e) $4\sqrt{13}$ (f) 1 (g)

- $\sqrt{67}$ (h) $6\sqrt{6}$

- (17) (a) Equilátero (b) y (c): isósceles

- (18) Aprox: (a) 360,5m (b) 854,4m

- (c) 282,8m (d) 583,09m (e) 640,3m

- (f) 721,1m (19) Aprox: (a) 2,2 km

- (b) 2,2 km (c) Igual (d) 1,4km

Ejercicios 4: Ángulos y razones trigonométricas

PARTE A

(1) (a) $\frac{2}{3}\pi$ (b) $\frac{7}{6}\pi$ (c) $\frac{1}{12}\pi$ (d) π

(e) $\frac{\pi}{2}$ (f) $\frac{5}{3}\pi$ (g) $\frac{7}{4}\pi$

(2) (a) 130° (b) 320° (c) 15° (d) 200°

(e) 180° (f) 225° (g) 135°

(3)

	(a)	(b)	(c)	(d)
$\text{sen}\alpha$	$\frac{2}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$	$\frac{12}{3\sqrt{21}}$	$\frac{3}{5}$
$\text{cos}\alpha$	$\frac{\sqrt{21}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$	$\frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{21}}$	$\frac{4}{5}$
$\text{tan}\alpha$	$\frac{2}{\sqrt{21}}$	1	$\frac{12}{3\sqrt{5}}$	$\frac{3}{4}$
$\text{sen}\beta$	$\frac{\sqrt{21}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$	$\frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{21}}$	$\frac{4}{5}$
$\text{cos}\beta$	$\frac{2}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$	$\frac{12}{3\sqrt{21}}$	$\frac{3}{5}$
$\text{tan}\beta$	$\frac{\sqrt{21}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{5}}{12}$	$\frac{4}{3}$

(4) A (5) C (6) C (7) B (8) C (9) C (10) D (11) B (12) C (13) D

PARTE B

(1) (a) $x = 4,01$, $y = 5,73$ (b) $x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,

$y = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ (c) $x = 0,14$, $y = 0,36$

(d) $x = 4\sqrt{2}$, $y = 4\sqrt{2}$ (e) $x = 0,66$,
 $y = 1,05$ (f) $x = 3,37$, $y = 4,4$ (g) $x = 66$,
 42 (h) $x = 27,03$ (i) $x = 23,19$

(2) (a) 5,63 (b) 97,12 (c) $12\sqrt{3}$ (d) 3,02

(e) 3,45m (f) 32,96 (g) 11,51m

(h) 39,69 (i) 6,84 (j) 25,23

(k) 141,7 (l) 5,25

(3) 25,7 (4) 10,44 (5) 7,94cm

PARTE C

(1) (a) 8,66m (b) 28,15m (c) 16,23m
 (d) 254,28m (e) 442,99m (f) 86,09m
 (g) 3 146,25m (h) 34,84m
 (i) 5,8m (j) 4,84m (k) 45,9m (l) 321,71m
 (m) 223,37m (n) 6 954,66m (o) 8,38m
 (p) 6,63m

Afrontando retos: 154,28m

Ejercicios 5: Ley de senos

(1) (a) 1,29 (b) 4,17 (c) 63,09
 (d) 61,98 (e) $\sqrt{6}$ (f) $8\sqrt{2}$ (g) 27,57dm
 (h) 73,85cm (i) 30,71 (j) 7,49 (k) 6,65
 (l) 6,91cm
 (2) 22,19 (3) 7,61km (4) $3,9^\circ$
 (5) 2 339,3m

Ejercicios 6: Prisma y pirámide

(1) 640cm² (2) $18\sqrt{3}$ cm² (3) 216cm²
 (4) 287,53 cm² (5) (a) 576 cm²
 (b) 768 cm² (6) (a) 72 cm² (b) 72 cm²
 (7) 0,5625 m² (8) (a) 392cm² (b) 196cm²
 (c) 588 cm² (9) (a) 210cm² (b) 86,6cm²
 (c) 296,6cm²
 (10) (a) 160 cm² (b) 50cm² (c) 120cm²
 (11) (a) 192cm² (b) 96cm² (c) 288cm²
 (12) (a) 169cm² (b) 84,5cm²
 (c) 253,5 cm²
 (13) 888 000 (14) 5,16cm²
 (15) 10,44 cm² (16) 4,86 cm²
 (17) 144 cm² (18) 227,21 dm²
 (19) 51,58 m² (20) 105 cm²
 (21) 1892,08 m² (22) 288 cm²
 (23) 113,84 cm² (24) 102,62 cm²

Ejercicios 7: Variables discretas y continuas

(1) (a) D (b) C (c) D (d) C (e) D (f) D
 (g) C (h) C (i) D (j) C (k) D (l) D (m) D
 (n) C (o) D (p) D (q) C (r) D (s) D

Ejercicios 8: Variables discretas y continuas

- (1) (a) V(b)V (c)V (d)F (e)V (f) F
 (2) (a) 43(b)11 (c) 4
 (3) (a) F (b)F (c)F (d)V (e)V (f)V
 (5) [68, 75[, 8, 30, 10 (7) (a) 70
 (b) 60 (c) 28,7 (d) 3

Ejercicios 9: Variables discretas y continuas

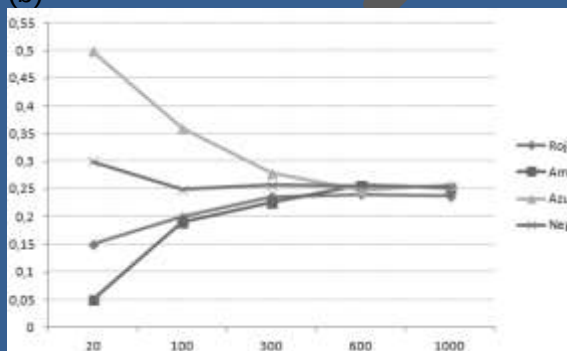
- (1) (a) no (b)sí (c) no (d)no (e) no

Ejercicios 10: Probabilidad Frecuencial

- (1)
 (a)

Lanzamiento Color de pelota	20	100	300	600	1000
Roja	0,15	0,2	0,24	0,24	0,24
Amarilla	0,05	0,19	0,23	0,26	0,25
Azul	0,5	0,36	0,28	0,25	0,26
Negra	0,3	0,25	0,26	0,26	0,25

- (b)



(c) 0,25 (d) Seguro: salga una pelota roja, azul, amarilla o negra. Imposible: que salga una pelota negra

- (2) (a) 0,0494 (b) 0,954 (c) en 2005 pero por una diferencia muy pequeña
 (3) (a) 0,4022 (b) 2006
 (4) (a) 0,0178 (b) 19,78 veces
 (5) (a) 0,1001 (b) 2, 56 veces
 (c) 17, 81 veces
 (6) (a) 0,1764 (b) 0,3823
 (7) (a) 0,1236 (b) 0, 2786

Ejercicios 11: Factorización

- (1) (a) $5(2x + y)$ (b) $y(by - 1)$
 (c) $6m^2(4m^3 - 3)$
 (d) $2(a - 3b + 2c)$
 (e) $y(3y - 3 + x)$
 (f) $2d(2d^2 - d + 1)$
 (g) $\frac{3}{2}x\left(1 - \frac{3}{2}x\right)$
 (h) $6w^4z^3(5w^5 - 7z + 9w^4z^2)$
 (i) $x(-1 - x)$ (j) $5k^5\left(\frac{5}{8} - \frac{k^{20}}{3}\right)$
 (k) $\frac{b^2}{18}\left(\frac{a}{2} - 1\right)$
 (l) $7y^6(-h^8 + 49h^7y^5 - 7y^9x^4)$
 (m) $2x^n(2x^2 - 1)$ (n) $(g + h)(3d - 4m)$
 (o) $(y - a)(m + f)$ (p) $(a + 7x)(3x - 2)$
 (q) $(5 - x)(2xy - 4 - x)$
 (r) $(1 + u)(m - 3n - 1)$ (s) $(a^2 - 3b)(2 - y)$
 (t) $(h - k)(3 - 5xp + 5xg)$
 (u) $(m + h)(a + b - 3m - 3h)$
 (v) $(p - w)^2(3p - 2w)$
 (2)
 (a) $(3x^3 - 4)(3x^3 + 4)$
 (b) $(x^3 - 1/2)(x^3 + 1/2)$
 (c) $(11k^{50} - 30c)(11k^{50} + 30c)$
 (d) $(0,01x - n)(0,01x + n)$
 (e) $(1 + 16m^4)(1 + 4m^2)(1 + 2m)(1 - 2m)$
 (f) $(12x^2 - y^4)(12x^2 + y^4)$
 (g) $(0,5 + y^4)(0,5 - y^4)$
 (h) $\left(\frac{7}{10} + \frac{6}{9}d\right)\left(\frac{7}{10} - \frac{6}{9}d\right)$
 (i) $2a\left(3a - \frac{2}{5}\right)\left(3a + \frac{2}{5}\right)$
 (j) $(x^{3n} + 1)(x^{3n} - 1)$ (k) $(d - f)(3d + f)$

(l) $4(-x+1)(2x+1)$ (m) $a(a-2b)$

(n) $(2x-y-3)(2x+y+1)$ (o)

$2(x-3)(x+1)$

(p) $-3(2y-3)$

(3)

(a) $(a+1)^2$ (b) $(b-1)^2$ (c) $(n+2)^2$

(d) $-(n+2)^2$ (e) $(y-6)^2$ (f) $\left(\frac{1}{2}+5x\right)^2$

(g) $-(2x-3)^2$ (h) $3(2x-3)^2$

(i) $(2b-3)^2$ (j) $-(4x-5y)^2$

(k) $(11x-2)^2$ (l) $(x+4y)^2$

(m) $\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{3}\right)^2$ (n) $-(3a+16b)^2$

(ñ) $(2x+1)(3x+2)$ (o) $(a-11)^2$

(p) $(y-3)(y+6)$

(q) $4(x+5)^2$ (r) $(4x-1)(2x+3)$

(s) $(x+2)(x+5)$ (t) $(3x-5)^2$

(u) $(10m+1)(2m+1)$ (v) $(2h-3)(h-1)$

(w) $(2k-3)(3k+7)$

(4) (a) $(m-2n)(3m+4)$

(b) $(x-1)(1+2x)$

(c) $(1-3b^2)(3a-b)$ (d) $(a-h)(4-h)$

(e) $(a+b)(a+y)$ (f) $(w^2+1)(5x^2-4y)$

(g) $(5+m^2)(1+5h^2)$

(h) $2(c-2d)(3b-1)$ (i) $(w-1)(y+2)$

(j) $(2m+1+n)(2m+1-n)$

(k) $(3w-n-3)(3w-n+3)$

(l) $(z+x-5y)(z-x+5y)$

(m) $(k+m-1)(k-m+1)$

(n) $(4+y-7x)(4+y+7x)$

(o) $(10a-2b-5)(10a+2b+5)$

(p) $(xy-3+y)(xy-3-y)$

(q) $(8-a-b)(8-a+b)$

(r) $(y+m-n)(y-m+n)$

(5)

(a) $5m^6x(-5x^2m^3+25ym+xy)$

(b) $\frac{11m^7}{3x}\left(\frac{11}{3xy}-m^8\right)$

(c) $(m-n)(3a-5x-1)$

(d) $(x+y)(4a-7-x+y)$

(e) $2m(4+m)(4-m)$

(f) $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}-5\right)\left(\frac{x}{3}+5\right)$

(g) $2z(2x-3z)^2$

(h) $-(2a-5)^2$

(i) $(2x+7y)(4x+5y)$

(j) $\frac{1}{5}\left(6x-\frac{1}{2}\right)^2$

(k) $x(x+6)(x-6)(x+2)(x-2)$

(l) $2y(y+5x-24)$

(6)

(a) $(x-1)^2+3$

(b) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{38}{9}$

(c) $\left(b-\frac{1}{4}\right)^2-1$

(d) $(a+5)^2-\frac{101}{2}$

(e) $(y+4)^2+2$

(f) $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

(g) $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$

(h) $3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{107}{12}$

(i) $5(a+1)^2-7$

(j) $-4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+14$

(7) (i) C (ii) D (iii) B (iv) B (v) D (vi) B
(vii) B (viii) A (ix) B (x) A (xi) B (xii) D
(xiii) B (xiv) C (xv) C (xvi) D (xvii) B
(xviii) A (xix) B (xx) C (xxi) A (xxii) B
(xxiii) C

Ejercicios 12: Simplificación

(1) (a) $\frac{4}{x+y}$ (b) $\frac{d+2}{d+3}$ (c) $\frac{1}{a+8}$
(d) $\frac{5xg}{1+2g}$ (e) $\frac{2+m}{x(x+m)}$ (f) $\frac{a+2}{5x}$ (g)
 $x+5$ (h) -1 (i) $\frac{-1}{7+x}$ (j) $\frac{x-y}{x+3y}$

(2) (a) $\frac{5(a+2)}{a-2}$ (b) 1 (c)
 $\frac{m(m+2n)}{(m-1)(m-2n)}$ (d) $\frac{1}{(b-2a)(2a+b)}$ (e)

$\frac{1}{x(x-1)}$ (f) $\frac{x}{5}$ (g) $b(a+4b^2)$

(h) $\frac{y^2}{1-y}$ (i) $\frac{1}{5}$ (j) 2

(3) $6x-2$ (4) (a) $\frac{2m+1}{m-2}$ (b) $\frac{-5a-2}{a+5b^2}$

(c) $\frac{x^2+5x+1}{x(x+1)}$ (d) $\frac{-13}{(x+5)(x-5)}$

(e) $\frac{-a-1}{a(a-3)}$ (f) $\frac{-11x+7}{(5x-1)(x+1)}$

(g) $\frac{x^2+3x+2}{(x-5)(x+3)}$ (h) $\frac{2m^2-3m+3}{(m+3)(m-3)}$

(i) $\frac{-6ab-10b^2+a^2}{(a-b)(a+2b)}$

(j) $\frac{2x+3-5m^2x+m}{m(x+1)}$

Ejercicios 13: División de polinomios

(1) (a) $3m-2$ (b) $-5x^3-1+4x^2$

(c) $2h^4-1+\frac{d^3h^9}{13}$ (d) $\frac{2x^4}{y^2}-\frac{3}{2}y+\frac{1}{9y^2}$

(e) $\frac{1}{2}m^6-m^2+2n^7m^3$

(f) $y^5+\frac{3y^5}{2z^2}-4zy^6$ (g) $a-\frac{2}{3}+\frac{a^2}{9}$

(2) (a) $C: x+2$ $R: 0$ (b)

$C: x+3$ $R: 6$ (c)

$C: 5$ $R: -2$ (d) $C: x-2$ $R: -1$

(e) $C: x+6$ $R: 10$ (f)

$C: 2x+5$ $R: -3$ (g) $C: 5m-1$ $R: 0$

(h) $C: -5a$ $R: -2$ (i) $C: 3m-2$ $R: 3$

(j) $C: h-4$ $R: -4$

(3) $3d+2$

Ejercicios 14: Racionalización

(1) (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(d) $\frac{5\sqrt[3]{7a^2b}}{7ab}$ (e) $\frac{\sqrt{5my}}{5m^2}$ (f) $\frac{\sqrt[3]{9mb}}{3b}$

(2) (a) $\frac{5}{3\sqrt[3]{25}}$ (b) $\frac{2xy}{5n\sqrt[5]{4x^3y^4}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

(d) $\frac{5}{\sqrt[3]{5h}}$ (e) $\frac{2m}{\sqrt{6m}}$ (f) $\frac{1}{\sqrt[4]{9k}}$

(3) (a) $\frac{3\sqrt{x}+15}{x-25}$ (b) $\frac{a\sqrt{2}-2\sqrt{ab}}{a+2b}$

(c) $13-7\sqrt{3}$ (d) $\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

(e) $2\sqrt{a}+1$ (f) $\frac{-8\sqrt{m}-8\sqrt{5b}}{m-5b}$

(4) (a) $\frac{-3}{15+10\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$

(c) $\frac{m-2n}{\sqrt{mn}-n\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$

(e) $\frac{2m-9}{2\sqrt{2m}-6}$ (f) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

Ejercicios 15: Función cuadrática

(1) b, c, e. g.

(2)

(a)

-3	-2	-1	0	1	2	3
4	0	-2	-2	0	4	10

(b)

-1	0	1	2	3
-9	0	2	-2	-12

(c)

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-7/2	0	5/2	4	5/2	4	5/2	0	-7/2

(3) (a) 8m

(c) $t = 4s$ (d) $t = 2s$

(4)

(a) $I(x) = \frac{-x^2}{3} + 900x$ (b) \$ 240000(5) (a) $32^\circ F$ (b) $149,95^\circ F$ **Ejercicios 16: Función cuadrática**

(B)

(1)

Criterio	Concavidad	Vértice
(a) $y = 3x^2$	Hacia arriba	(0,0)
(b) $y = -\frac{1}{4}x^2$	Hacia abajo	(0,0)
(c) $y = (x+4)^2 - 2$	Hacia arriba	(-4,-2)
(d) $y = -2(x-5)^2 + 3$	Hacia abajo	(5,3)
(e) $y = x^2 - 8x + 17$	Hacia arriba	(4,1)
(f) $y = -x^2 - 2x + 5$	Hacia abajo	(-1,6)

(2) (a) 725 000 artículos, \$ 2 628 125

(b) 9,8 m

(c) i) $32^\circ F$ ii) $123,8^\circ F$ (d) i) $A(x) = -x^2 + 7x + 30$ ii) 3,5 iii) 42,25(ul)² (e) 18,7 millas/h**Ejercicios 17: Ecuaciones cuadráticas**(1) (a) $\{-2, 2\}$ (b) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$ (c) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$ (d) $\{-13, 13\}$ (e) $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ (f) $\{ \}$ (g) $\left\{0, \frac{5}{3}\right\}$ (h) $\left\{0, \frac{9}{5}\right\}$ (i) $\left\{\frac{-7}{5}, 0\right\}$ (j) $\{-2\}$ (k) $\{-2, 0\}$ (l) $\{-2\sqrt{7}, 2\sqrt{7}\}$ (m) $\left\{-\frac{2}{5}, \frac{7}{4}\right\}$ (n) $\left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$ (o) $\left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$ (p) $\left\{0, \frac{7}{4}\right\}$ (q) $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ (r) $\left\{-\frac{5}{7}, 1\right\}$ (2) (a) $\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ (b) $\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$ (c) $\left\{-1, \frac{-2}{5}\right\}$ (d) $\{2, 3\}$ (e) $\left\{\frac{-1-\sqrt{61}}{10}, \frac{-1+\sqrt{61}}{10}\right\}$ (f) $\{-6, 6\}$ (g) $\{-4, -2\}$ (h) $\left\{\frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right\}$ (i) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ (j) ϕ (k) $\left\{\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+3\sqrt{3}}{2}\right\}$ (l) $\{ \}$ (m) $\left\{\frac{-2-\sqrt{19}}{3}, \frac{-2+\sqrt{19}}{3}\right\}$ (n) ϕ (o) $\left\{\frac{9-\sqrt{65}}{8}, \frac{9+\sqrt{65}}{8}\right\}$ (3) (a) 8 y 5 años (b) 8cm y 10cm (c) 36cm^2 (d) ancho 7m y largo 29m (e) 11, 6 y 34 (f) 15 y 68 años (g) 11 y 13 (h) 4 (i) 4cm (j) 10 (k) 4 (l) 7, 9 y 11 (m) 7 (n) $B = 20\text{cm}$, $b = 6\text{cm}$, $h = 4\text{cm}$ (o) 16cm

MUESTRA

