

MUESTRA NO IMPRIMIR

MUESTRA NO IMPRIMIR

Tabla de contenidos

RELACIONES Y	4
ÁLGEBRA		
	Inversa de una función lineal	5
	Función raíz cuadrada	13
	Funciones exponenciales	19
	Ecuaciones exponenciales	28
	Función logarítmica	33
	Propiedades de los logaritmos	43
	Ecuaciones logarítmicas	47
	Ecuaciones exponenciales utilizando logaritmos	48
	Modelos matemáticos mediante funciones logarítmicas	53
	Funciones y modelización	56
ESTADÍSTICA Y	65
PROBABILIDAD		
	Medidas de variabilidad	66
	Diagrama de cajas	70
	Medidas relativas: Posición relativa estandarizada, variable relativa, coeficiente de variación	80
GEOMETRÍA	85
	Simetría axial	86
	Reflexiones	90
	Traslaciones	93
	Rotaciones	94
	Homotecias	96
	Visualización espacial: el cono	119
Respuestas	85

RELACIONES Y ÁLGEBRA



Dibujo realizado por el estudiante Kevin Jackson, 12-5, del CTP Mercedes Norte. 2015

Conocimiento:

**INVERSA DE LA
FUNCIÓN**

Habilidades:

1. Identificar las condiciones para que una función tenga inversa.
2. Relacionar la gráfica de una función con la gráfica de su inversa.
3. Determinar intervalos en los cuales una función representada gráficamente tiene inversa.
4. Determinar y graficar la función inversa de $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$.
5. Analizar gráfica y algebraicamente la función con criterio dado por $f(x) = a\sqrt{x+b} + c$

Escenario de aprendizaje

La medida de la temperatura, puede darse en grados Celsius, o bien, en grados Fahrenheit.

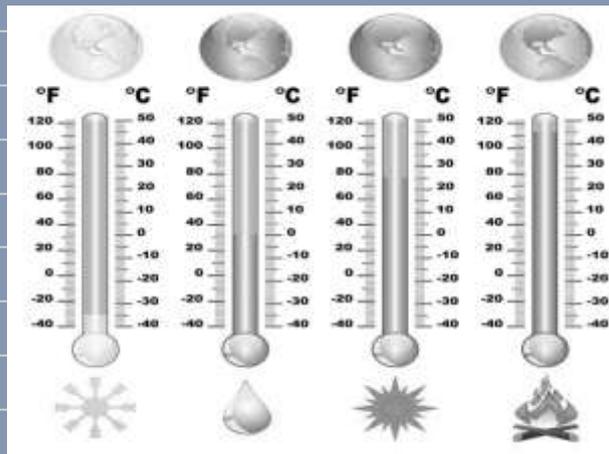
La función que modela una relación para convertir de grados Celsius a grados Fahrenheit está dada por $F(C) = 1,8C + 32$.

De este modo, 20°C puede convertirse a grados Fahrenheit sustituyendo en la fórmula: $1,8 \cdot 20 + 32 = 68^\circ\text{F}$. Si lo vemos como pares ordenados, se tiene que $(20, 68) \in G_f$

Pero ¿qué sucede si la conversión se desea hacer al revés?

Establezca un criterio que permita hacer la conversión de grados Fahrenheit a Celsius de forma directa.

MUESTRA



Definición: • Función Inversa

Sea $f: A \rightarrow B$ una función, donde B es su ámbito y f es inyectiva en A . Se define la función inversa de f como: $f^{-1}: B \rightarrow A$, tal que si $f(x) = y$, entonces $f^{-1}(y) = x$.

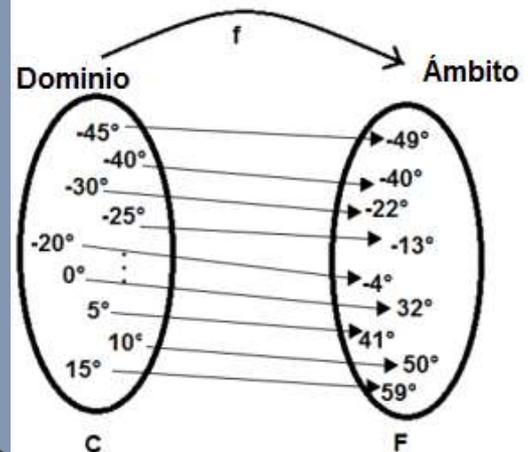
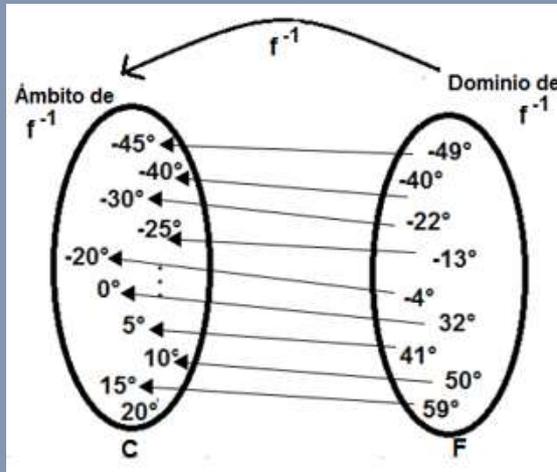


Diagrama de Venn, con algunos elementos de los conjuntos C y F de la función f



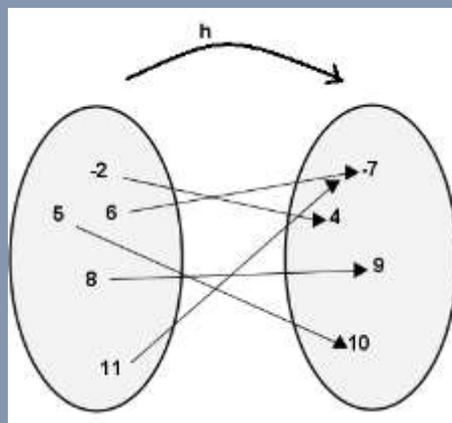
¿Por qué la función debe ser inyectiva para que tenga inversa?



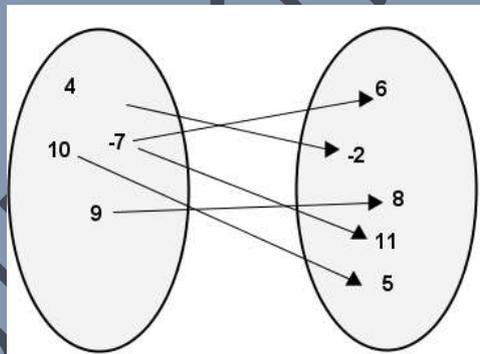
Ejemplo 1

Considere la función $h: \{-2, 5, 6, 8, 11\} \rightarrow \{-7, 4, 9, 10\}$:
donde $G_h : \{(-2, 4), (6, -7), (5, 10), (8, 9), (11, -7)\}$
¿La función h tiene inversa?

Representemos esta función con diagramas de Venn:



Si intentamos hacer la correspondencia inversa, obtenemos:



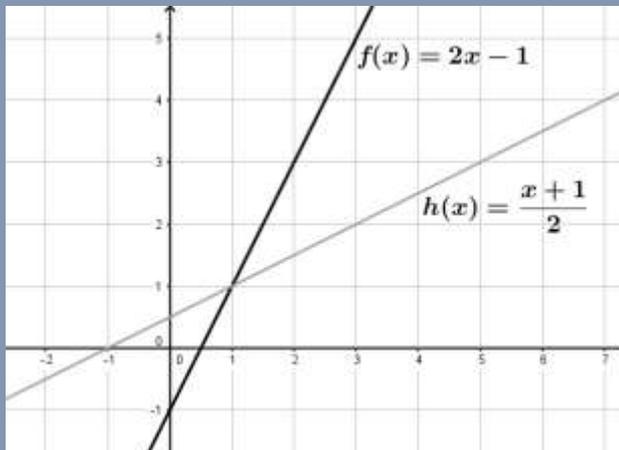
Note que este caso no corresponde a una función, ya que -7 está asociado tanto a 6 como a 11 . Esto sucede porque la función " h " no es inyectiva.



Ejemplo 2

Analice las gráficas dadas y determine si la función h es inversa de f

A.



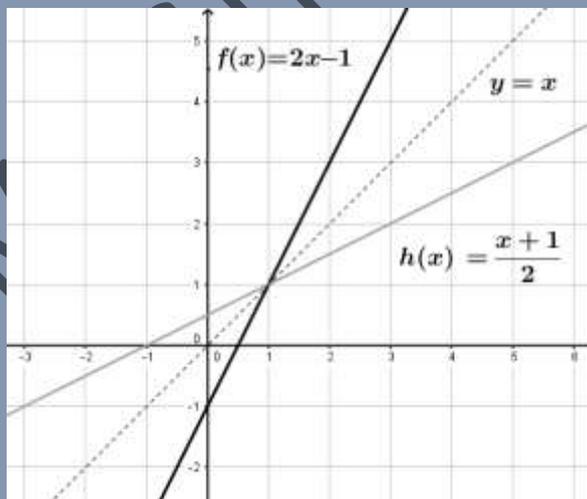
Note que un par ordenado de la gráfica de f es $(2,3)$, mientras que la recta de h pasa por $(3,2)$.

Este mismo resultado puede comprobarse con todos los pares ordenados de ambas gráficas, es decir, si (a,b) pertenece a la gráfica de h , entonces (b,a) pertenece a la gráfica de f .

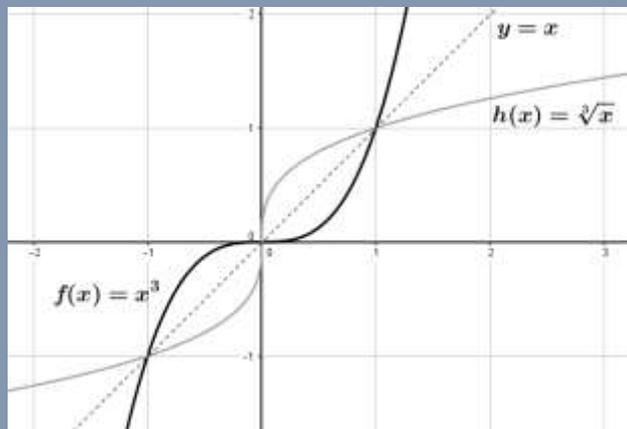
Por tanto h es inversa de f

Cuando se tiene las gráficas de dos funciones f y g , una manera de comprobar si estas son inversas entre sí, es trazando la recta $y = x$ (que corresponde a la función identidad). Si la gráfica de f es una reflexión de g con respecto a $y = x$, entonces f es inversa de g y viceversa.

La recta $y = x$ es como un espejo para las gráficas de f y g .



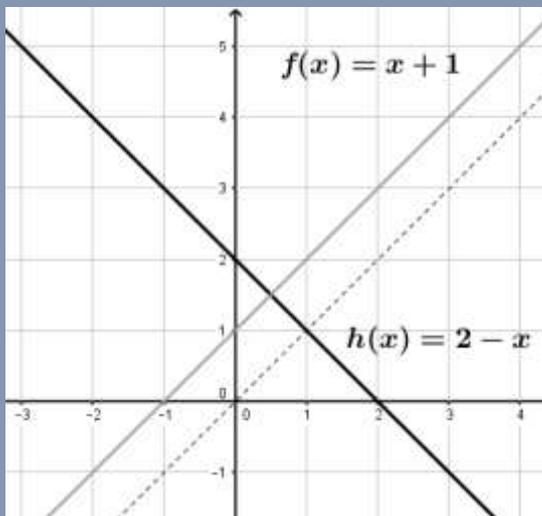
B.



Las gráficas de las funciones f y g se reflejan entre sí respecto $y = x$.

Se concluye que f es inversa de g .

C.



En este caso, f no es inversa de h



Ejemplo 3

Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Determine el criterio de la función inversa de f

Para determinar el criterio de una función inversa, se siguen los siguientes pasos:

1. Se toma $y = f(x)$
2. Se despeja la variable "x"
3. Se vuelven a sustituir las variables: "x" por $f^{-1}(x)$ y "y" por x

Así:

Tomamos $y = f(x)$ y despejamos la x :

$$y = 2x - 3$$

$$\Rightarrow y + 3 = 2x$$

$$\Rightarrow x = \frac{y + 3}{2}$$

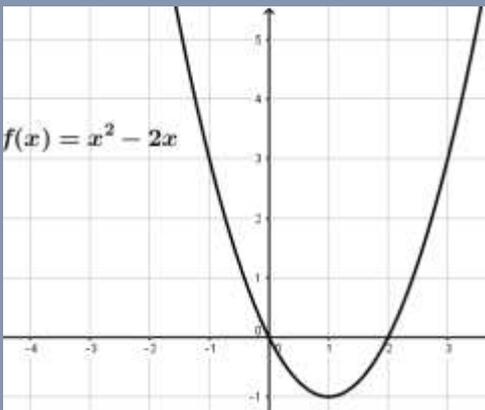
Luego la función inversa es: $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$



Ejemplo 4

Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$, $f(x) = x^2 - 2x$, redefina el dominio de f para que la función tenga inversa.

Para abordar este problema, es conveniente graficar la función f

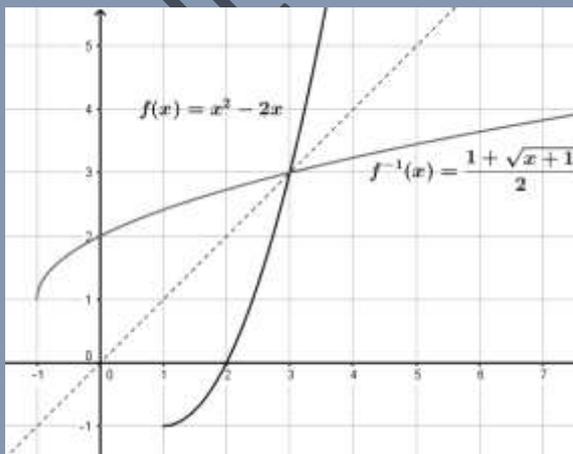
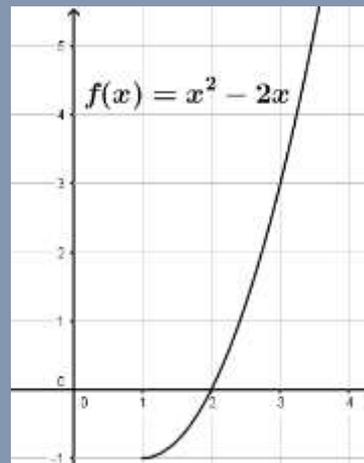


Note que esta función **no es inyectiva**, por tanto no tiene inversa.

Para que tenga inversa, el máximo dominio que se puede considerar es $]-\infty, 1]$ o bien $[1, +\infty[$

La gráfica de la derecha representa la función f si

tomamos como dominio a $[1, +\infty[$. Ahora la función es inyectiva y tendrá inversa.



De modo general, para una función cuadrática $f:A \rightarrow B$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, la función tiene inversa, si el dominio es $]-\infty, \frac{-b}{2a}]$ o $[\frac{-b}{2a}, +\infty[$



Ejemplo 5

Si f es una función lineal tal que $f(-3) = 2$ y $f^{-1}(1) = -1$, halle el criterio de f^{-1} y el criterio de f

Para determinar el criterio de f , usamos los pares ordenados $(-3,2)$ y $(-1,1)$.

$$\text{Se calcula } m = \frac{1-2}{-1-(-3)} = \frac{-1}{2} \quad b = 2 - \frac{-1}{2} \cdot (-3) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Por tanto el criterio de } f \text{ es: } f(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$$

De manera similar, se obtiene el criterio de f^{-1} con $(2,-3)$ y $(1,-1)$

$$m = \frac{-1-(-3)}{1-2} = -2 \quad b = -1 - (-2) \cdot 1 = 1$$

Se concluye que $f^{-1}(x) = -2x + 1$



Ejemplo 6

La composición de una función y su inversa

Si f^{-1} es la inversa de f , entonces

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$$

Sean $f: \left[\frac{-1}{2}, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ con $f(x) = \sqrt{2x+1}$ y $g: [0, +\infty[\rightarrow \left[\frac{-1}{2}, +\infty[$ con $g(x) = \frac{x^2-1}{2}$

Compruebe mediante la composición de funciones que f es inversa de g .

Realicemos $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{x^2-1}{2}\right) = \sqrt{2 \cdot \frac{x^2-1}{2} + 1} = \sqrt{x^2-1+1} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

Ahora $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{2x+1}) = \frac{(\sqrt{2x+1})^2 - 1}{2} = \frac{2x+1-1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

Se concluye que f y g son inversas entre sí



Ejemplo 7

**Inversa de una función cuadrática
FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA**

Determine la función inversa de f , sabiendo que:

$$f:]-\infty, -1] \rightarrow [-4, +\infty[\text{ con } f(x) = x^2 + 2x - 3$$

Para determinar la inversa de una función cuadrática se hace un procedimiento similar al que se realiza para calcular la solución de una ecuación de segundo grado.

$$y = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 - y = 0$$

$$a = 1, \quad b = 2 \quad c = -3 - y$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3 - y)$$

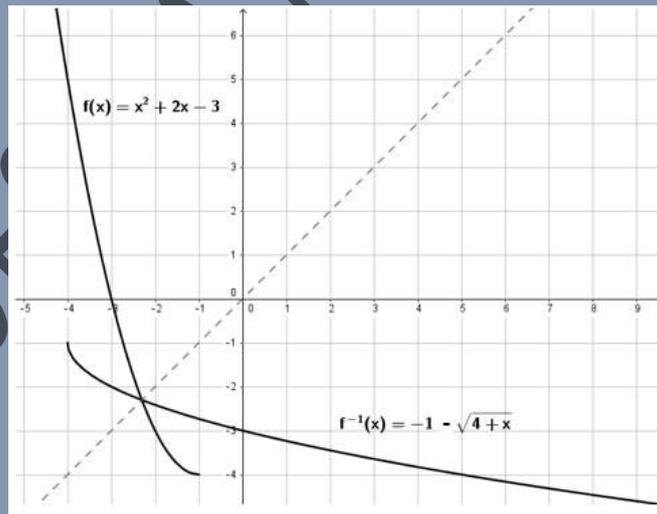
$$= 4 + 12 + 4y$$

$$= 16 + 4y$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16 + 4y}}{2} \\ &= \frac{-2 - \sqrt{4(4 + y)}}{2} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{4 + y}}{2} \\ &= -1 - \sqrt{4 + y} \end{aligned}$$

*** Se usa signo negativo ya que el dominio de f está formado por valores menores a -1

Por tanto, la inversa de f es: $f^{-1}: [-4, +\infty[\rightarrow]-\infty, -1]$ con $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x + 4}$

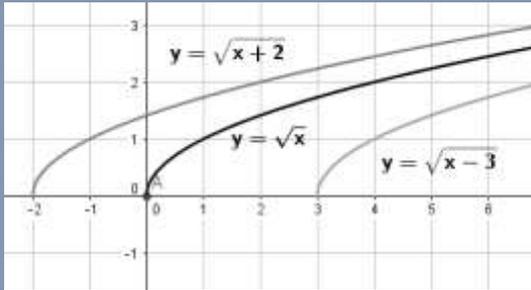


Función Raíz Cuadrada

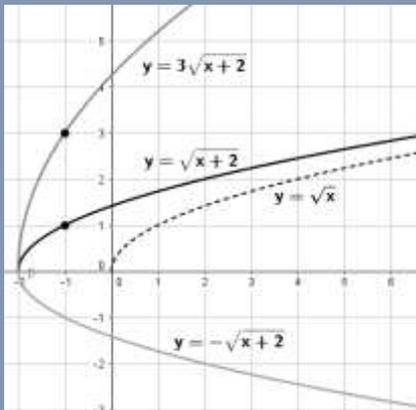
• Análisis gráfico y algebraico



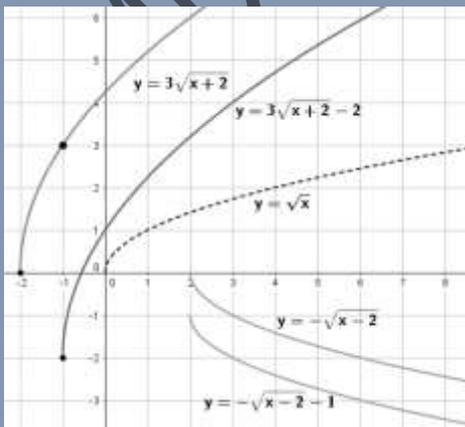
Analice las gráficas de cada función y compárelas, de modo que deduzca cómo se modifica la gráfica de $g(x) = a\sqrt{x+b} + c$, según los parámetros a , b y c



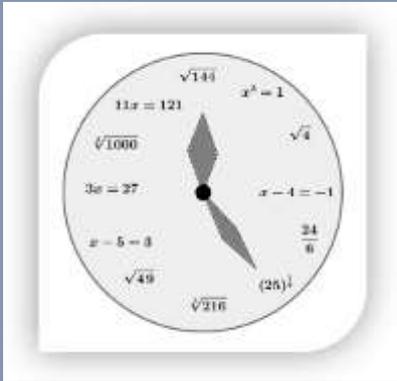
Análisis del parámetro "b"



Análisis del parámetro "a"



Análisis del parámetro "c"



Tiempo para practicar 1.1

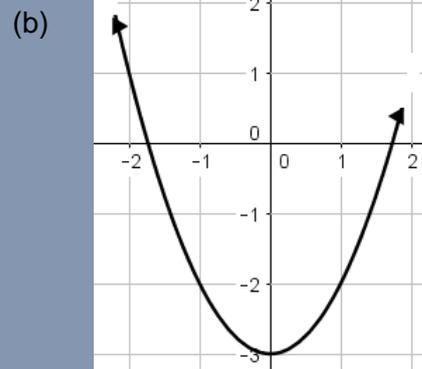
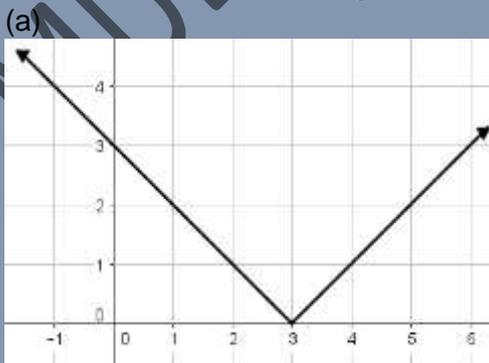
1. Halle el criterio de la función inversa en cada caso. Suponga que las funciones están bien definidas para que la inversa exista.

(a) $h(x) = 3 - x$ (b) $f(x) = \frac{5x-3}{2}$ (c) $g(x) = x - 7$
 (d) $h(x) = 6 - \frac{5x}{7}$ (e) $h(x) = x - \frac{1}{3}$ (f) $h(x) = x$
 (g) $p(x) = \frac{x}{5}$ (h) $t(x) = 8x - 1$ (i) $g(x) = \frac{6}{5} - x$

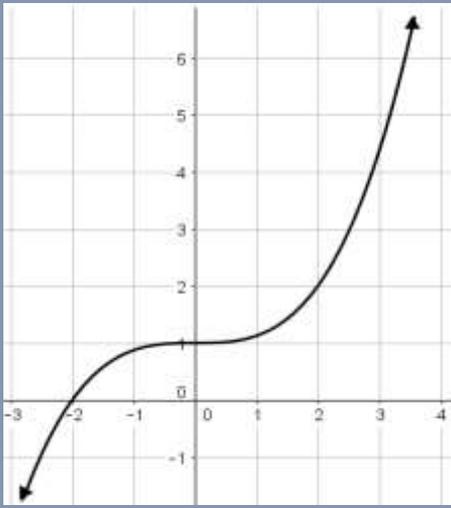
2. En cada caso, determine el mayor dominio de la función, de modo que exista su inversa.

(a) $f : A \rightarrow \left[\frac{3}{4}, +\infty \right[$ $f(x) = x^2 - x + 1$
 (b) $f : G \rightarrow]-\infty, 7]$ $f(x) = 7 - x^2$
 (c) $f : H \rightarrow \left] -\infty, \frac{81}{4} \right]$ $f(x) = 20 - x - x^2$
 (d) $g : H \rightarrow \left[\frac{-25}{4}, +\infty \right[$ $g(x) = x^2 - 5x$

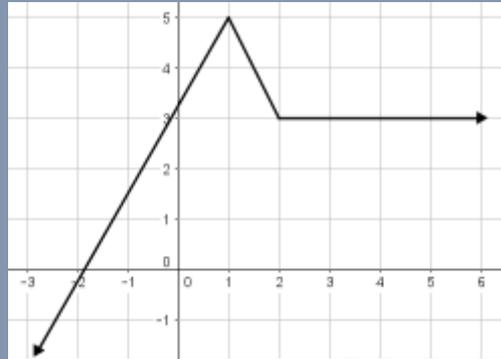
3. En cada caso se le brinda la gráfica de una función f . Determine el mayor dominio para que dicha función tenga inversa.



(c)

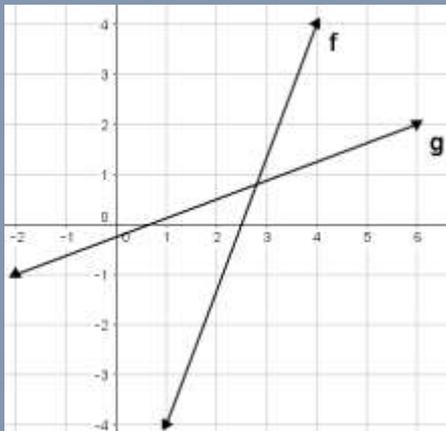


(d)

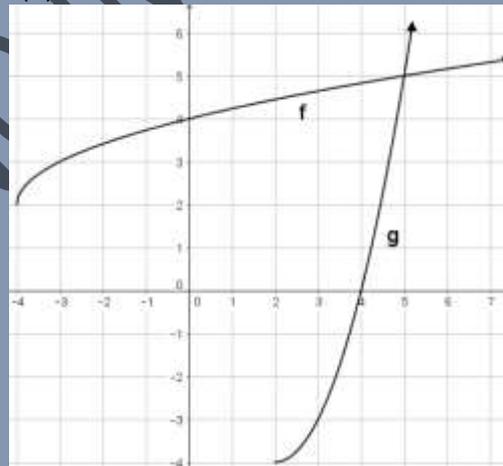


4. Analice en cada caso las gráficas y determine si f y g son inversas entre sí

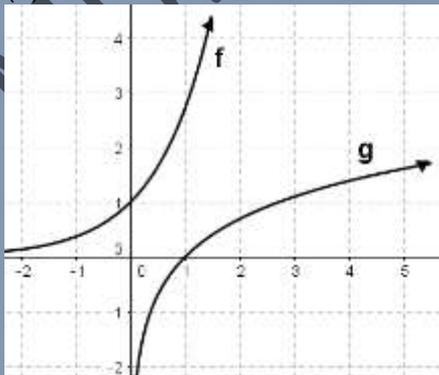
(a)



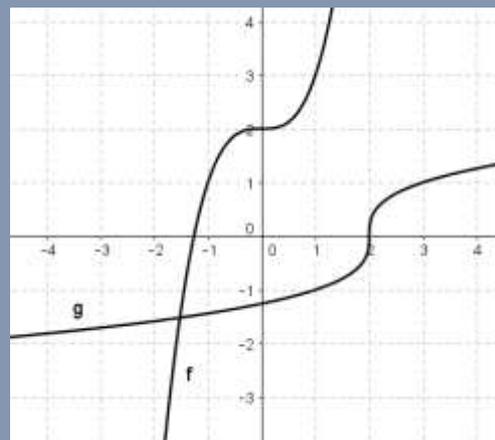
(b)



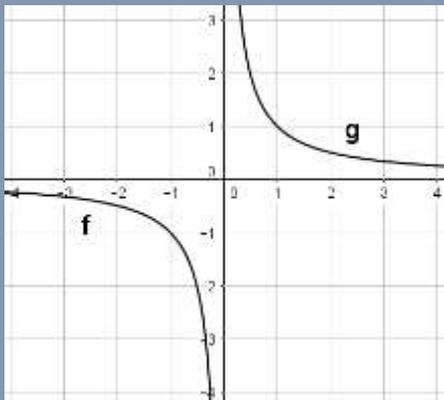
(c)



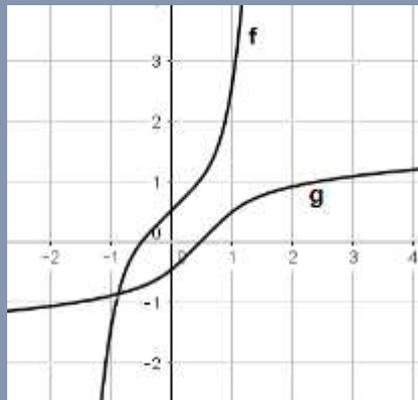
(d)



(e)



(f)



5. Sea f es una función dada por $f(x) = -2x - 5$. Determine $f^{-1}(-2)$
6. Sea f una función dada por $f^{-1}(x) = 6x + 3$. Halle $f(-7)$
7. Sea f una función dada por $f^{-1}(x) = 9x + 5$. Calcule $f^{-1}(5)$
8. Sea f una función lineal tal que $f(3) = 1$ y $f^{-1}(2) = -2$. Determine el criterio de f^{-1} y el criterio de f
9. Los pares $(-1, 2)$ y $(3, 1)$ pertenecen al gráfico de una función lineal f . Determine el criterio de f^{-1}
10. Sea f una función lineal tal que $f(3) = 5$ y $f^{-1}(-1) = 6$. Determine $f^{-1}(2)$
11. Sea $[0, 7]$ el dominio de una función f dada por $f(x) = 1 - \frac{x}{3}$. ¿Cuál es el dominio de f^{-1} ?
12. El peso P , en toneladas, de una especie de ballena adulta, puede aproximarse mediante el criterio $P(L) = 1,7L - 42,8$, donde L es su longitud en pies. Determine el criterio inverso, que asocia la longitud de la ballena según su peso.
13. La temperatura T en grados Celsius para una altitud h en metros sobre la superficie terrestre, está dada por $T(h) = 25 - \frac{h}{500}$. Determine el criterio de la función inversa de T .

14. Compruebe en cada caso, mediante la composición de funciones y según los criterios dados, si f y g son inversas entre sí. [Suponga las funciones inyectivas]

(a) $f(x) = \frac{2x-1}{3}$, $g(x) = \frac{3x+1}{2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x}-1$, $g(x) = x^2+1$

(c) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x}$

(d) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $g(x) = 3\sqrt{x-1}$

(e) $f(x) = 3x-5$, $g(x) = \frac{x}{3}+5$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $g(x) = x^3+1$

15. Determine, en cada caso, el criterio de la inversa de g .

(a) $g: \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\rightarrow \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$, $g(x) = x^2 + x$

(b) $g:]-\infty, 2] \rightarrow [1, +\infty[$, $g(x) = x^2 - 4x + 5$

(c) $g:]-\infty, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, +\infty[$, $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$

(d) $g: \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[\rightarrow]-\infty, \frac{1}{8}]$, $g(x) = -2x^2 + x$

16. Dada la gráfica de la función f cuyo criterio es $f(x) = \sqrt{x}$, grafique las otras funciones que se le proporcionan. [Use el análisis de parámetros vistos en la teoría][Trabaje las gráficas con colores para que se diferencien mejor]

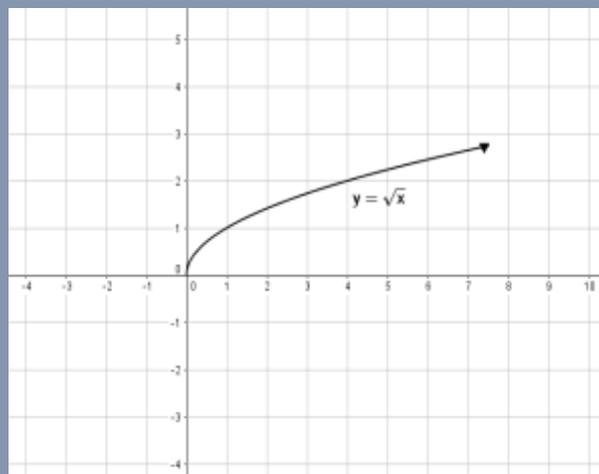
(a) $h(x) = \sqrt{x+4}$

(b) $g(x) = -\sqrt{x}$

(c) $h(x) = \sqrt{x-5}$

(d) $k(x) = -\sqrt{x} + 2$

(e) $d(x) = \sqrt{x-5} - 1$



17. Considere la función g con criterio $g(x) = \sqrt{x}$, determine en cada caso, el criterio que satisfaga las condiciones asignadas.

(a) La gráfica de la función se traslada 5 unidades horizontalmente a la izquierda

(b) La gráfica de la función se traslada 7 unidades verticalmente hacia abajo

(c) La gráfica de la función se traslada 1 unidad verticalmente hacia arriba

(d) La gráfica es una reflexión de g sobre el eje x

18. En cada caso, determine el criterio de la función.

(a) La gráfica de la función se traslada 11 unidades a la derecha y 3 hacia abajo, con respecto a la gráfica de $y = \sqrt{x}$

(b) La gráfica de la función se traslada 8 unidades a la izquierda, con respecto a la gráfica de $y = 2\sqrt{x-6} + 3$

(c) La gráfica de la función se traslada 2 unidades hacia abajo, con respecto a la gráfica de $y = -\sqrt{x+2} - 1$

(d) La gráfica de la función se traslada 9 unidades hacia arriba y 2 a la derecha, con respecto a la gráfica de $y = 3\sqrt{x-4} + 6$



RETOS

1. Hay gatos en un cajón, cada gato en un rincón, cada gato ve tres gatos ¿sabes cuántos gatos son?
2. Dos padres y dos hijos van a viajar en el tren que comunica Heredia con San José. Compran sólo tres entradas (tiquetes) y se suben al tren sin problemas y sin cometer fraude alguno ¿cómo lo hicieron?

Selección única. FUNCIÓN INVERSA

- 1) Sea f la función inversa de g , donde $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$. Considere las siguientes proposiciones

- I. $B = C$
 II. $(f \circ g)(x) = x$

De ellas, son verdaderas

- (A) solo la II (B) solo la I
 (C) ninguna (D) ambas

- 2) Para la función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $h(x) = 5 - \frac{x}{3}$, el criterio de su función inversa corresponde a

- (A) $h^{-1}(x) = -5 + \frac{x}{3}$ (B) $h^{-1}(x) = -3x + 15$
 (C) $h^{-1}(x) = -3x - 5$ (D) $h^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$

- 3) Sea la función $g: A \rightarrow B$ biyectiva, con $g(x) = ax + k$, entonces la pendiente del criterio de g^{-1} es

- (A) $\frac{1}{a}$ (B) $-\frac{1}{a}$
 (C) $-a$ (D) $\frac{1}{k}$

- 4) Para la función h con $h(x) = \sqrt{2x+1}$, el valor de $h^{-1}(3)$

<input type="text"/>					
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

- 5) Para la función g , con $g(x) = \sqrt{x} - 4$, un par ordenado que pertenece al gráfico de g^{-1} corresponde a

- (A) (16,0) (B) (2,36)
 (C) (3,14) (D) (25,1)

6) Sea h una función lineal, donde $h(-5) = -1$, $h^{-1}(3) = -4$, el criterio de h^{-1} es

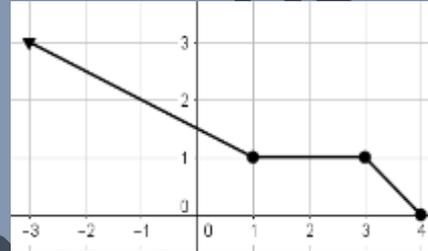
(A) $h^{-1}(x) = \frac{-8x - 23}{3}$

(B) $h^{-1}(x) = \frac{x - 19}{4}$

(C) $h^{-1}(x) = 4x + 19$

(D) $h^{-1}(x) = \frac{-3x - 23}{8}$

7) Considere la gráfica adjunta que representa una función f . Según los datos proporcionados, un intervalo donde f posee inversa corresponde a



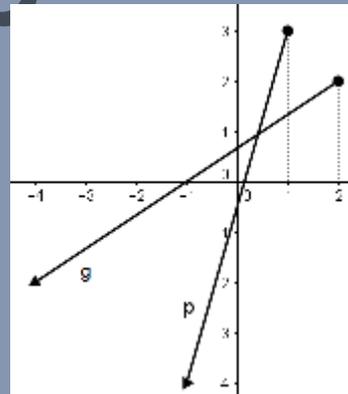
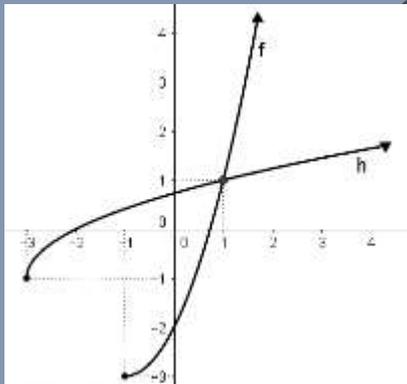
(A) $[0, 2]$

(B) $[2, 3]$

(C) $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$

(D) $\left[\frac{-3}{2}, \frac{1}{4}\right]$

8) Analice las gráficas:



Según la información considere las siguientes proposiciones

- I. f es inversa de h
- II. p es inversa de g

De ellas, son verdaderas

(A) solo la II

(B) solo la I

(C) ninguna

(D) ambas

Analice el siguiente escenario:

Sea f una función que posee inversa, tal que $f:]-\infty, 5] \rightarrow M$ con $f(x) = 7 + \sqrt{5 - x}$

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 12, 13 y 14

12) ¿Cuál es el dominio de la función inversa de f ?

- (A) $[5, +\infty[$ (B) $[7, +\infty[$
(C) $] -\infty, 7]$ (D) $] -\infty, 5]$

13) ¿Cuál es el ámbito de la inversa de f ?

- (A) $[5, +\infty[$ (B) $[7, +\infty[$
(C) $] -\infty, 7]$ (D) $] -\infty, 5]$

14) Un par ordenado del gráfico de f^{-1} corresponde a

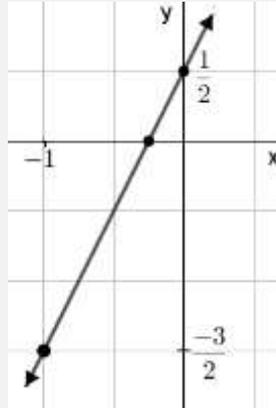
- (A) $(-4, 10)$ (B) $(-31, 13)$
(C) $\left(7, \frac{1}{7}\right)$ (D) $(8, 4)$

- 15) Sea h la función dada por $h(x) = 2x + \frac{1}{2}$, la gráfica de su función inversa corresponde a

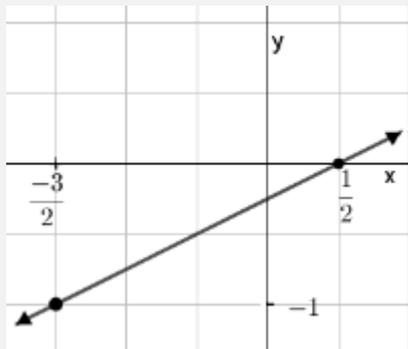
(A)



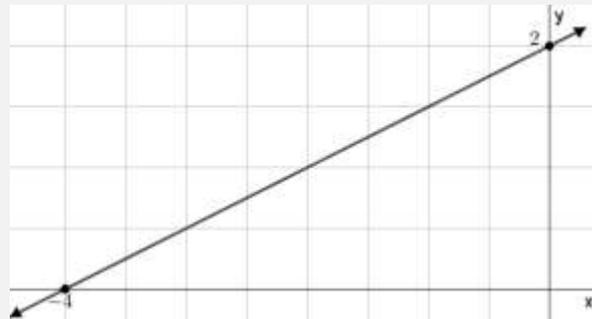
(B)



(C)



(D)



MUES

Conocimiento:

**Función
Exponencial**

Habilidades:

1. Analizar gráfica, tabular y algebraicamente las funciones exponenciales.
2. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales.
3. Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales.

Escenario de aprendizaje

Analice y resuelva el siguiente reto:

Una piscina se llena en 30 días, y cada día se llena el doble que el anterior, ¿qué día estará por la mitad?



Establezca una función, cuyo criterio relacione el número de días con las unidades cúbicas de agua dentro de la piscina.

Definición

• Función Exponencial

Se considera para efectos del presente libro, la función exponencial f como:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ cuyo criterio es } f(x) = c \cdot a^x, \text{ con } a > 0, a \neq 1$$

Donde a es una constante llamada *base*.



Ejemplo 1

Se administra 50 miligramos de cierto medicamento a un paciente. La cantidad de miligramos restantes en el torrente sanguíneo del paciente disminuye a la tercera parte cada 5 horas.

(a) Determine el criterio de la función M que modela la cantidad de medicamento en “ x ” horas.

(b) Realice una tabla de valores

(c) Construya una gráfica

(d) ¿Cuántos miligramos de medicamento quedarán en el torrente sanguíneo al pasar 12 horas?

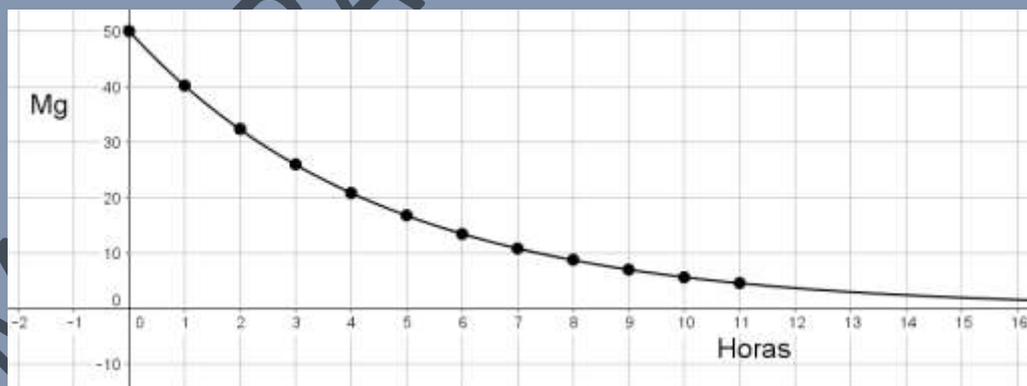
☞ La cantidad inicial de medicamento es 50mg, por lo que $c = 50$.

☞ El valor de “ a ” es $\frac{1}{3}$ puesto que la cantidad de medicamento disminuye a la tercera parte.

☞ Como x es la cantidad de horas, y el medicamento disminuye a razón de cada 5 horas, se tiene la expresión $\frac{x}{5}$

☞ Por tanto, el criterio de la función es $M(x) = 50 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{5}}$

Horas	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Cantidad de mg de medicamento	50	40,13	32,21	25,86	11,55	20,76	13,37	10,73	8,62



☞ Para calcular la cantidad de miligramos de medicamento que quedarán en el torrente sanguíneo al pasar 12 horas, se determina la imagen de 12, así:

$$M(x) = 50 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{12}{5}} \approx 3,58 \text{ mg}$$

Propiedades

• Función Exponencial

Las características de esta función f se enuncian seguidamente:



Si $c > 0$ y $a > 1$ f crece.

Si $c > 0$ y $0 < a < 1$ f decrece.

Si $c < 0$ y $a > 1$ f decrece.

Si $c < 0$ y $0 < a < 1$ f crece.



Si $a = 1$, ó $a < 0$ no es una función exponencial.

Ámbito = \mathbb{R}^+

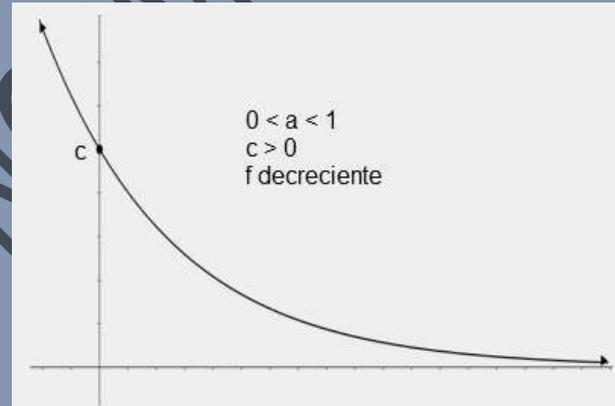
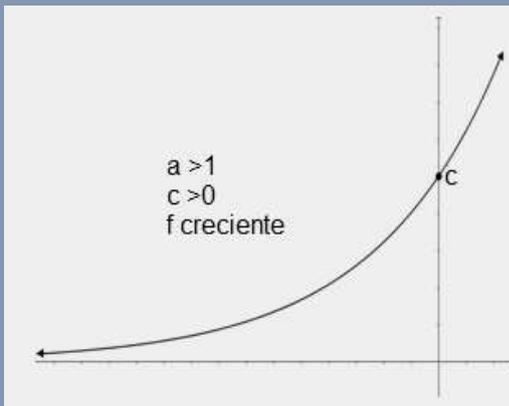
Dominio = \mathbb{R}

La gráfica de la función f es asintótica al eje x

La gráfica de la función f Interseca al eje y en el punto $(0, c)$



Gráficas



Recuerde:

$$f(x) = c \cdot a^{-x} = c \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

Poblaciones

• Crecimiento exponencial

La cantidad de población P en función del tiempo t está dada por $P(t) = N \cdot a^{\frac{t}{n}}$ donde
 N : Población inicial a : Constante de aumento o disminución de la población
 n : periodo en el que se da el aumento o disminución de la población

Una población cuenta inicialmente con 100 individuos y se cuadruplica cada 5 años.
 ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de esa población?

$$P(t) = 100 \cdot 4^{\frac{t}{5}}$$

A manera de ejemplo se proporciona la siguiente tabla, donde se relacionan las características antes descritas. Considere las funciones de \mathbb{R} a \mathbb{R}^+ .

Criterio de la función.	Base "a"	Coficiente "c"	Monotonía de la función	Intersección con el eje y
$f(x) = 6 \cdot 5^x$	5	6	Creciente, ya que $6 > 0$ y $5 > 1$	(0,6)
$f(x) = 3^x$	3	1	Creciente, ya que $1 > 0$ y $3 > 1$	(0,1)
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\frac{1}{2}$	1	Decreciente, ya que $1 > 0$ y $0 < \frac{1}{2} < 1$	(0,1)
$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$	$\frac{3}{2}$	1	Creciente, ya que $1 > 0$ y $\frac{3}{2} > 0$	(0,1)
$f(x) = \frac{7^x}{9}$	7	$\frac{1}{9}$	Creciente, ya que $\frac{1}{9} > 0$ y $7 > 1$	$\left(0, \frac{1}{9}\right)$
$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x$	$\frac{2}{\pi}$	1	Decreciente, ya que $1 > 0$ y $0 < \frac{2}{\pi} < 1$	(0,1)
$f(x) = -3^x$	3	-1	Decreciente, ya que $-1 < 0$ y $3 > 1$	(0, -1)



Los criterios que se presentan a continuación no corresponden a funciones exponenciales: $f(x) = (-3)^x$ $f(x) = 1^x$



Ejemplo 2

En la función exponencial f con $f(x) = a^x$, si $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$, entonces se cumple que

- A) $a > 1$
- B) $a = 1$
- C) $0 < a < 1$
- D) $-1 < a < 0$

Resolución

Nótese que cuando $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$. Esto es precisamente la definición de una función decreciente. Por tanto $0 < a < 1$. Así la opción correcta es la (C)



Ejemplo 3

Para la función f cuyo criterio es $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ si $x \leq -1$ con certeza se cumple que

- (A) $f(x) \in] 0, 7 [$
 (B) $f(x) \in \left] 0, \frac{1}{7} \right]$
 (C) $f(x) \in [7, +\infty [$
 (D) $f(x) \in] -\infty, 7]$

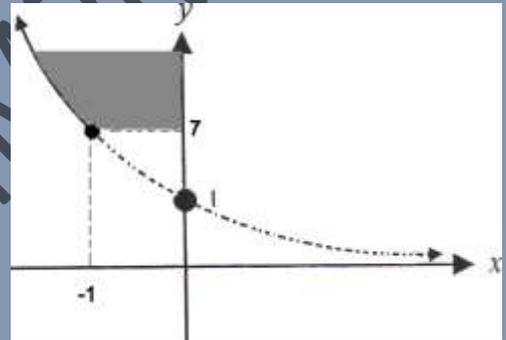
Resolución:

Como $0 < \frac{1}{7} < 1$, entonces f es decreciente.

Analizamos cómo son las imágenes para los valores de "x" menores o iguales a -1 . Para ello, se calcula la imagen de -1 : $f(-1) = \left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = 7$, tal como se muestra la gráfica.

Así se tiene que el conjunto de imágenes (ámbito) es $[7, +\infty [$, y la respuesta correcta se halla en la opción (C).

Nótese que en este caso el ámbito no es todo \mathbb{R}^+ , sino un subconjunto de este, pues se restringió el dominio de la función.



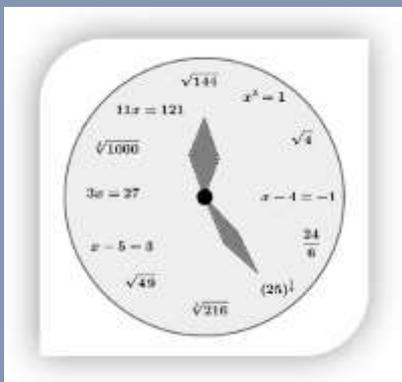
Definición

• Función Exponencial de base e

El número e , al igual que el número π , es irracional, y un valor aproximado es de 2,71828. Su notación fue dada por Leonhard Euler.

Su valor proviene de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para valores de n muy grandes.

Así se define la función exponencial de base e , como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = e^x$



Tiempo para practicar 1.2

1. Complete la tabla con la información solicitada.

Criterio de la función f	Domínio	Intersección con el eje y	Ámbito	Monotonía
$f(x) = 7^x$	$]-\infty, \frac{1}{2}[$			
$f(x) = \frac{3^x}{4}$	$]0, +\infty[$			
$f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$	$]-\infty, -1[$			
$f(x) = (6)^{-x}$	$] -3, 0[$			
$f(x) = (0,2)^x$	$]1, +\infty[$			
$f(x) = -3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x$	$]-\infty, -2]$			
$f(x) = 3 \cdot (\sqrt{2})^x$	$[2, +\infty[$			
$f(x) = e^x$	$]-\infty, 0[$			

2. Para la función dada por $f(x) = (2\pi)^x$ analice las siguientes proposiciones.

I. f es decreciente.

II. La gráfica de f interseca el eje "y" en $(0, 2\pi)$.

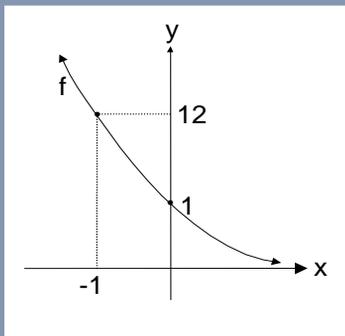
¿Cuáles de ellas son VERDADERAS?

- A) Ninguna.
- B) Ambas.
- C) Solo II.
- D) Solo I.

3.

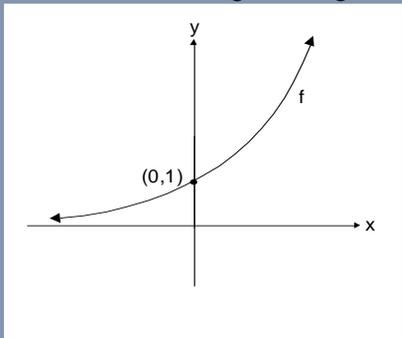
Considere la gráfica adjunta

De acuerdo con los datos de la gráfica, ¿a cuál criterio corresponde la gráfica de la función exponencial?



- A) $f(x) = 12^x$
 B) $f(x) = \left(\frac{1}{12}\right)^x$
 C) $f(x) = (-12)^x$
 D) $f(x) = \left(\frac{1}{12}\right)^{-x}$

4. Considere la siguiente gráfica.



Si la gráfica dada corresponde a la función $f(x) = b^x$ entonces son características de f

- A) $b > 1$ y $x \in \mathbb{R}$
 B) $b > 1$ y $x \in \mathbb{R}^+$
 C) $0 < b < 1$ y $x \in \mathbb{R}$
 D) $0 < b < 1$ y $x \in \mathbb{R}^+$

5. En la función exponencial f con $f(x) = a^x$ si $f(x_1) < f(x_2)$ para cada $x_1 < x_2$, entonces se cumple que

- A) $a > 1$
 B) $a = 1$
 C) $0 < a < 1$
 D) $-1 < a < 0$

6. Para la función f cuyo criterio es $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x}$ si $x \geq 0$ con certeza se cumple que

- A) $f(x) \in] 0, 1 [$
 B) $f(x) \in \left] 0, \frac{1}{7} \right]$
 C) $f(x) \in [1, +\infty [$
 D) $f(x) \in] -\infty, 0]$

7. Para las funciones f y g con $f(x) = \left(\frac{e}{2}\right)^x$ y $g(x) = (\sqrt[3]{3})^{-x}$, se cumple que

- A) f y g son estrictamente crecientes.
 B) f y g son estrictamente decrecientes.
 C) f es estrictamente creciente y g es estrictamente decreciente.
 D) f es estrictamente decreciente y g es estrictamente creciente.

8. El gráfico de la función

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[4]{5}}{4}\right)^{-x}, \text{ interseca al eje y}$$

en el punto

A) $\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{4}, 0\right)$

B) $\left(0, \frac{\sqrt[4]{5}}{4}\right)$

C) (0, 1)

D) (1, 0)

9. Analice las proposiciones referentes

a $h(x) = \left(\sqrt[3]{6}\right)^x$

I Es estrictamente creciente

II Pasa por el punto $(1, \sqrt[3]{6})$

III Interseca al eje y en el punto

$(0, \sqrt[3]{6})$

De ellas son verdaderas solamente

A) I y II

B) I y III

C) II y III

D) I

10. El dominio máximo de la función f

definida por $f(x) = \left(\frac{7}{23}\right)^x$

corresponde a

A) \mathbb{R}

B) $[0, +\infty[$

C) $]0, +\infty[$

D) $\left[\frac{7}{23}, +\infty\right[$

11. Si $f(x) = 7^{-x}$ y $x > 0$ entonces, es verdadero que

A) $7^{-x} > 1$

B) $7^{-x} < 0$

C) $0 < 7^{-x} < 1$

D) $\frac{1}{7} < 7^{-x} < 1$

Aplicaciones

12. La función f dada por $f(x) = 2e^{-0,35x}$ se utiliza para aproximar el área en centímetros cuadrados de una herida en la piel en “ x ” días de producida.

¿Cuál es aproximadamente el área en centímetros cuadrados de la herida, el día 5?

13. El porcentaje aproximado “ P ” de luz que pasa a través de “ x ” cristales consecutivos, está dado por $P(x) = 100e^{-0,1x}$. Determine el porcentaje de luz que pasa a través de 10 cristales

14. Una máquina con un valor inicial de $\$150\,000$ se deprecia continuamente a partir del primer momento de uso. Su valor después de “ t ” años está dado por $V(t) = 150000e^{-0,2 \cdot t}$. Determine el valor aproximado de la máquina, después de 8 años de uso.

15. La bacteria del cólera se divide cada media hora, para producir 2 bacterias completas, así la cantidad C de bacterias que tendrá una colonia de bacterias en “ t ” horas será: $C(t) = B \cdot 2^{2t}$, donde B es la cantidad inicial de bacterias. Determine:

- (a) La cantidad de bacterias al cabo de 3 horas, con una colonia inicial de 1000 bacterias
 (b) Si en 2 horas hay 40 000 bacterias, cuántas bacterias habían inicialmente.

16. La recuperación ideal de una herida puede aproximarse mediante la función exponencial de criterio $H = H_0 \cdot e^{-0.3n}$, donde H_0 representa el área original de la herida en cm^2 y H el área de la herida después de “ n ” días en el proceso de cicatrización. ¿Cuánto medirá el área de la herida en cm^2 al cabo de 48 horas, si la herida originalmente era de 2 cm^2 ?

17. La función f , con criterio $S = P \cdot e^{0.12 \cdot t}$ determina el dinero que se tendrá al invertir P colones a una tasa de interés continuo del 12% en t años.

Si una persona invierte ₡300 000 en una cuenta de ahorros durante 18 meses, ¿cuánto dinero tendrá en esa cuenta?

18. Una población de aves, cuenta inicialmente con 40 individuos y se triplica cada 2 años.

- (a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de aves?
 (b) ¿Cuántas aves hay después de 5 años?

19. La población de ratas en cierta ciudad está dada por la fórmula $P(t) = 610e^{0.59t}$, donde t representa el número de años desde 2012 y $P(t)$ representa millones de ratas. Redondeando al millón más cercano, ¿Cuál fue la población de ratas en 2016?

20. La fórmula para determinar la población está dada por $P = P_0 e^{k \cdot t}$ donde P_0 es la población inicial y $k = \frac{\%}{100}$. Un pueblo tiene 600 habitantes y su población crece anualmente un 3%.

- (a) Determine la fórmula de la función que asocia la cantidad de habitantes, según los años transcurridos.
 (b) ¿Cuántos habitantes habrá al cabo de 8 años?

Selección única. FUNCIÓN EXPONENCIAL

- 1) El ámbito de la función dada por $f(x) = \left(\frac{7}{3}\right)^{-x}$ con dominio $]0, +\infty[$ corresponde a

(A) $]0, 1[$ (B) $]0, \frac{7}{3}[$
 (C) $]1, +\infty[$ (D) $]\frac{3}{2}, +\infty[$

- 2) Siendo $f(x) = \left(\frac{e}{2}\right)^x$ el criterio de la función f ; entonces

(A) $f(x) < f(x+1), \forall x > 0$ (B) f es decreciente
 (C) la gráfica de f interseca al eje "y" en el punto $\left(0, \frac{e}{2}\right)$ (D) $(1, 0)$ pertenece al gráfico de f

- 3) ¿Cuál de los siguientes criterios corresponde a una función estrictamente decreciente?

(A) $f(x) = \left(\frac{e}{4}\right)^x$ (B) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)^{-x}$
 (C) $f(x) = \left(\frac{6}{5}\right)^x$ (D) $f(x) = \left(\frac{-4}{5}\right)^x$

- 4) Para la función dada por $f(x) = 8^{-x}$, considere las siguientes proposiciones:

I f es estrictamente creciente
 II $0 < f(x) \leq \frac{1}{8} \forall x \in [1, +\infty[$

¿Cuáles de ellas son verdaderas?

(A) ninguna (B) ambas
 (C) solo la II (D) solo la I

- 5) El ámbito de la función dada por $f(x) = \left(\frac{5}{11}\right)^{-x}$ cuyo dominio es \mathbb{R} , corresponde a

(A) $]\frac{5}{11}, +\infty[$ (B) $]1, +\infty[$
 (C) $]0, +\infty[$ (D) $]-1, +\infty[$

- 6) Para la función h dada por $h(x) = a^x$, con $a > 1$, considere las siguientes proposiciones:

I. $h(a) > h(a+5)$

II. $h\left(\frac{1}{a}\right) < h(a)$

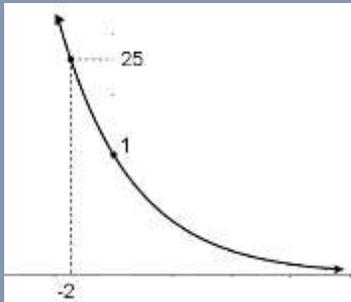
De ellas, son verdaderas

(A) ninguna (B) ambas
 (C) solo la II (D) solo la I

- 7) En la función f dada por $f(x) = a^x$, si $f(3) < f(7)$, se cumple que

- (A) $a \in]0,1[$ (B) $a \in]-1,0[$
 (C) $a \in]1,+\infty[$ (D) $a \in]-\infty,1[$

- 8) La gráfica adjunta representa una función exponencial de criterio $f(x) = a^x$. Entonces, el valor de $f(-4)$ es



- 9) Considere las siguientes proposiciones, referentes a la función exponencial f , dada por $f(x) = a^x$, tal que, $f(3) < f(7)$:

- I. $a > 1$
 II. $0 < f(x) < 1$, para todo $x \in]-\infty,0[$

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

- (A) ninguna (B) ambas
 (C) solo la II (D) solo la I

- 10) La siguiente tabla contiene algunos valores de la función exponencial f de la forma $f(x) = a^x$

x	-3	-2	-1	0
f(x)	343	49	7	1

De acuerdo con la tabla anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. f es decreciente.

- II. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{7}$

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

- (A) ninguna (B) ambas
 (C) solo la II (D) solo la I

• Ecuaciones Exponenciales

Escenario de aprendizaje

Volvamos al reto de la piscina, en el que la cantidad de agua en metros cúbicos está modelada por $f(x) = 2^{x-1}$ donde "x" representa los días.

¿En cuál día se completan 512 unidades cúbicas de agua?

Como la función exponencial f dada por $f(x) = a^x$, con $a \neq 0$, $a \neq 1$ es biyectiva, se cumple que cuando $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.

Es decir:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

con $a \neq 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

A las ecuaciones de esta forma se les llama **ecuaciones exponenciales**.



Ejemplos

Determine el conjunto solución en cada caso.

A) $2^{x-1} = 512$

$$2^{x-1} = 2^9$$

$$\Rightarrow x - 1 = 9$$

$$\Rightarrow x = 10$$

$$S = \{10\}$$

$$B) \sqrt[3]{\frac{1}{125^{2x}}} = 5^{3x+4} \cdot 625^{3+x}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{(5^3)^{2x}}} = 5^{3x+4} \cdot (5^4)^{3+x}$$

(Al expresar 125 y 625 en potencias de 5)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5^{6x}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{3x+4} \cdot 5^{4(3+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1^{\frac{1}{3}}}{(5^{6x})^{\frac{1}{3}}} = 5^{3x+4+12+4x}$$

} Leyes de potencias

$$\Rightarrow \frac{1}{5^{2x}} = 5^{7x+16}$$

$$\Rightarrow 5^{-2x} = 5^{7x+16}$$

$$\Rightarrow -2x = 7x + 16$$

$$\Rightarrow -2x - 7x = 16$$

$$\Rightarrow -9x = 16$$

$$\Rightarrow x = \frac{-16}{9} \quad \text{Por lo que } S = \left\{ \frac{-16}{9} \right\}$$

$$C) 9^{x+1} + 81 = 18 \cdot 3^{x+1}$$

En este caso se debe hacer uso del método de sustitución, pues no se puede llegar a la forma $a^x = a^y$ de manera directa.

Realicemos la siguiente sustitución: $y = 3^{x+1}$

$$\text{Note que si } y = 3^{x+1} \Rightarrow 9^{x+1} = (3^2)^{x+1} = (3^{x+1})^2 = y^2$$

$$\text{Así se tiene que } y^2 + 81 = 18y$$

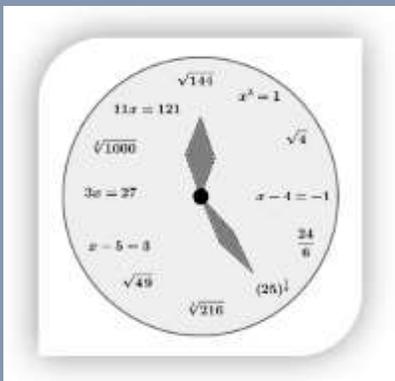
Ahora, se resuelve la ecuación cuadrática.

$$y^2 + 81 = 18y \Rightarrow y^2 - 18y + 81 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 9)^2 = 0 \Rightarrow y = 9$$

$$\text{Pero como } y = 3^{x+1}, \text{ entonces } 9 = 3^{x+1} \Rightarrow 3^2 = 3^{x+1} \Rightarrow 2 = x+1 \Rightarrow 1 = x$$

Por tanto, el conjunto solución es $S = \{ 1 \}$



Tiempo para practicar 1.3

1. Halle el conjunto solución de cada ecuación exponencial.

(a) $13^{2x-1} = 169$	(f) $1 = 7^{2x+7}$
(b) $\frac{5^x}{5} = 5^2$	(g) $\frac{6^{x-2}}{36} = \sqrt[3]{6}$
(c) $49^{3x-2} = 343^{2-x}$	(h) $5^{3x} - 121 = 4$
(d) $a^{9-3x} \cdot a = 1$	(i) $m^{\frac{3x+4}{5}} \cdot m^4 = \frac{1}{m}$
(e) $121^{2x-4} \cdot 11 = \frac{1}{11}$	(j) $\sqrt[5]{16^{3-x}} = \frac{256^x}{2 \cdot 8^{x+5}}$

(k) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = (2,5)^3$

(l) $e^{4+\frac{m}{2}} \cdot e^{3m} = \frac{e^m}{e^{3-m}}$

(m) $7^{x^2-x-2} = 2401$

(n) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3x+7} \cdot 16 = 32^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{2x+9}$

(o) $\left(\frac{27}{125}\right)^{5-x} = \frac{5^x \cdot 9}{3^x \cdot 25}$

(p) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

(q) $13 \cdot 13^{2x+5} + 13 \cdot 13^{2x+5} = 338$

2. Sea f una función exponencial $f: A \rightarrow B$, con $f(x) = 4^x$. Determine la preimagen de $\sqrt{2}$.

3. Sea f una función exponencial $h: N \rightarrow M$, con ámbito $[3, 27[$, $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Determine el dominio de h .

4. La masa m en gramos, de cierto material radiactivo, disminuye en función del tiempo t en horas, según la función $m(t) = 60 \cdot 2^{-5t}$. Después de cuánto tiempo la masa del material es de 30 gramos?

5. Una motocicleta con un precio de \$1800 se devalúa mediante la fórmula $V(t) = 1800 \cdot 0,75^t$ donde t es el número de años desde que se compró y $V(t)$ su valor. ¿En cuántos años, el valor de la motocicleta será de \$1350?

6. La población en cierto lugar está dada por $P(t) = 4000 \cdot 1,05^t$ donde t es el número de años desde el inicio del 2013 y P la cantidad de habitantes en millones. ¿En qué año llegó la población a 4410 millones?

7. La solución de $3^x \cdot \frac{1}{9} = 27^{x-1}$ corresponde a

- A) $-\frac{1}{2}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{1}{5}$
- D) $-\frac{3}{5}$

8. La solución de $\left(\frac{1}{625}\right)^{-2x+3} = 5 \cdot 25^x$ es

- A) 2
- B) $\frac{12}{5}$
- C) $\frac{13}{6}$
- D) 3

9. El conjunto solución de $7 \cdot 7^{x+2} + 7 \cdot 7^{x+2} = 98$ corresponde a

- A) $\{-1\}$
- B) $\{1\}$
- C) $\{2\}$
- D) $\{7\}$

10. La solución de $8 - 2^{2x} = 0$ es

- A) $\frac{3}{2}$
- B) $\frac{2}{3}$
- C) 3
- D) 2

11. El conjunto solución de

$$\left(\frac{4}{81}\right)^{2x-1} = \sqrt[4]{\frac{2}{9}}$$

corresponde a

- A) $\{8\}$
- B) $\left\{\frac{5}{16}\right\}$
- C) $\left\{\frac{-7}{4}\right\}$
- D) $\left\{\frac{9}{16}\right\}$

¡Un poco de ingenio!

La leyenda de la Torre de Hanoi.

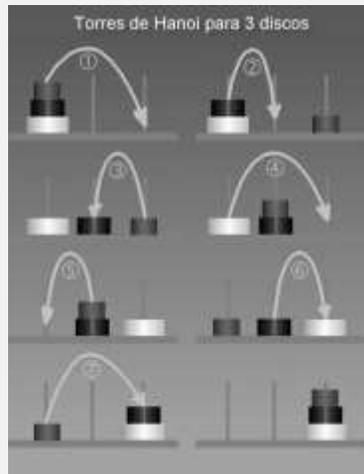
Cuenta una leyenda de la India, que durante el reinado del Emperador Fo Hi, existía un templo con una cúpula que marcaba el centro del mundo. Los monjes del templo tenían que mover sesenta y cuatro discos sagrados de un emplazamiento a otro. Pero éstos eran tan frágiles que sólo se podía mover de uno en uno. Y además, tenían que tener cuidado al colocarlos, puesto que no se podía emplazar uno más valioso encima de otro de valor inferior. El valor de los aros iba en proporción a su tamaño, cuanto más pequeño fuera el anillo menor era su valía. Para realizar los traslados de los referidos discos, solamente se disponía de otro lugar en el templo (además del de partida y del final) lo suficientemente sagrado como para que estas anillas pudieran ser depositadas en él. Así pues, los monjes comienzan el movimiento de éstas entre el montón inicial, el destino final y la posición intermedia, eso sí, manteniendo siempre el orden (el más grande en el fondo y el más pequeño en la cima). La leyenda dice que antes de que los monjes logren reubicar todos los discos en la nueva localización, el templo volverá a convertirse en polvo y el mundo terminará.

¡Esta leyenda se ha convertido en un juego que reta nuestra mente!

Recorta círculos de diferente tamaño e inicie el juego con 3 discos, luego con 4, 5 Compita con sus compañeros y escriba la mínima cantidad de movimientos necesarios para cumplir el reto según el número de discos. Busque una relación entre esos datos. ¿Mediante cuál función se puede modelar la cantidad mínima de movimientos, según la cantidad de discos?

¿En cuántos movimientos se acabaría el mundo, suponiendo que nunca se equivocarían los monjes?

Una ayuda: se muestra la estrategia para 3 discos:



Conocimiento:

Función
Logarítmica

Habilidades:

4. Identificar la función logarítmica como la inversa de la función exponencial.
5. Analizar gráfica y algebraicamente las funciones logarítmicas.
6. Aplicar propiedades de los logaritmos para simplificar expresiones algebraicas.
7. Resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones logarítmicas.
8. Utilizar logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales de la forma $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, a, b números reales positivos y distintos de 1, f, g polinomios de grado menor que 3.
9. Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones logarítmicas.

Definición

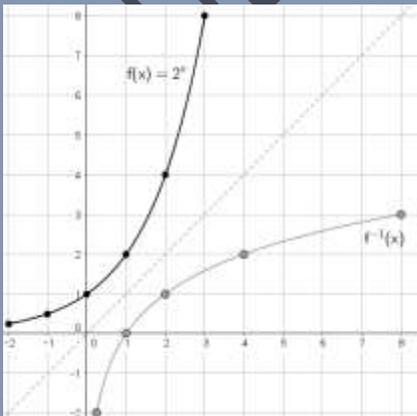
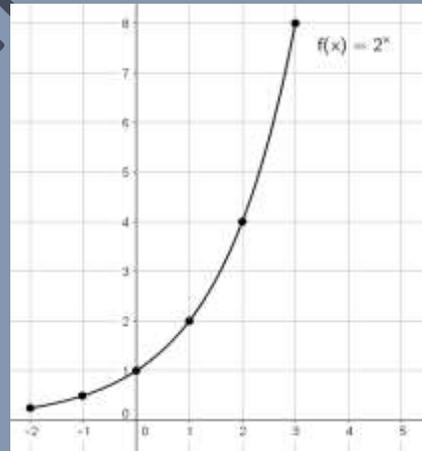
• Función Logarítmica

Considere la función exponencial $f: [-2, 3] \rightarrow \left[\frac{1}{4}, 8\right]$, $f(x) = 2^x$, cuya tabla [con valores enteros] y gráfica se presentan:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,25	0,5	1	2	4	8	16

Si trazamos la gráfica inversa de f obtenemos:

x	0,25	0,5	1	2	4	8	16
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3	4



A la función inversa de la exponencial f se le conoce con el nombre de función logarítmica.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = a^x$, entonces su función inversa está dada por $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, con $f^{-1}(x) = \log_a x$, que se lee: logaritmo en base "a" de argumento "x"

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$



Ejemplo 1

Determine la función inversa en cada caso

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x$

Su inversa está dada por $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_{\frac{2}{7}} x$

(b) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_7 x$

Su inversa está dada por $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f^{-1}(x) = 7^x$

Definición • Logaritmo de base 10

Aquel logaritmo cuya base es 10 se conoce como logaritmo neperiano. Este se puede representar como: $\log_{10} x = \log x$

Definición • Logaritmo de base e

Aquel logaritmo cuya base es e , se conoce como logaritmo natural. Este se puede representar como: $\log_e x = \ln x$

Recuerde que e es un número irracional, cuya aproximación decimal corresponde a 2,7182

Cálculo • De valores de un logaritmo

Anteriormente se analizó que: $\log_a x = y$ si y solo si $a^y = x, \forall x > 0, y \in \mathbb{R}$

Con este resultado, podemos hallar valores desconocidos de un logaritmo. A continuación se realizan algunos ejemplos.



Ejemplo 1

Halle el valor de m en cada caso.

(a) $\log_5 m = 3$

Se tiene que $5^3 = m$, por tanto $m = 125$

(b) $\log_7 m = \frac{1}{2}$

Se tiene que $7^{\frac{1}{2}} = m$, por tanto $m = \sqrt{7}$

(c) $\log_m 16 = 4$

Como $m^4 = 16$, entonces $m = \sqrt[4]{16} = 2$

(d) $\log_{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{2} \right) = m$

Como $\left(\frac{1}{8} \right)^m = \frac{1}{2}$ entonces se resuelve la ecuación exponencial:

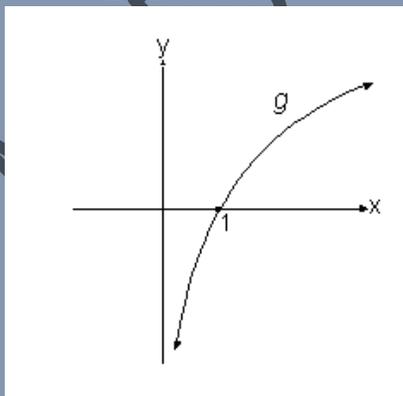
$$\left(\frac{1}{2} \right)^{3m} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

Características • Función logarítmica

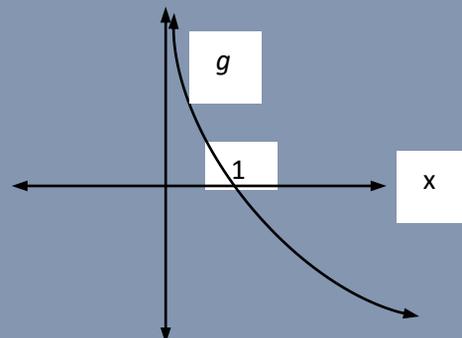
Sea $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = \log_b x$, con $b > 0$, $b \neq 1$

Las características de esta función se enuncian seguidamente:

- ☑ Si $b > 1$ f crece
- ☑ Si $0 < b < 1$ f decrece
- ☑ Ámbito : \mathbb{R}
- ☑ Dominio : \mathbb{R}^+
- ☑ La gráfica de la función g es asintótica al eje y
- ☑ La gráfica de la función g interseca al eje x en el punto $(1, 0)$
- ☑ Gráficas



Si $b > 1$ entonces f crece



Si $0 < b < 1$, entonces f decrece

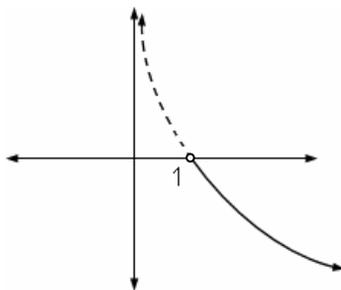


Ejemplo 1

Para la función f dada por $f(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$ si $x > 1$ entonces $f(x)$ pertenece a

- A) $] 0, 1 [$
- B) $] -\infty, 0 [$
- C) $] 0, +\infty [$
- D) $] \frac{1}{7}, +\infty [$

Note que la función es decreciente ya que $0 < \frac{1}{7} < 1$



Se puede apreciar en la gráfica adjunta que cuando $x > 1$, entonces las imágenes son negativas, es decir $f(x) \in] -\infty, 0 [$. La opción correcta es la (B)



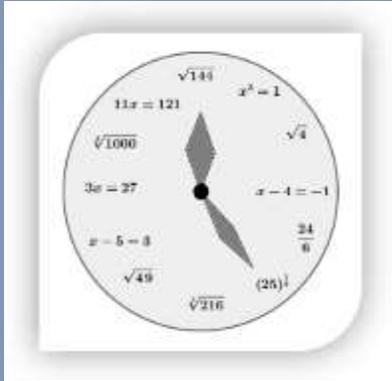
Ejemplo 2

Para la función $f: \left[\frac{1}{7}, 343 \right[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \log_7 x$, halle el ámbito.

Basta obtener las imágenes de $\frac{1}{7}$ y de 343.

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \log_7\left(\frac{1}{7}\right) = y \Rightarrow 7^y = \frac{1}{7} \Rightarrow 7^y = 7^{-1} \Rightarrow y = -1 \text{ por tanto } f\left(\frac{1}{7}\right) = -1$$

Igualmente, $f(343) = \log_7 343$, donde $\log_7 343 = y \Leftrightarrow 7^y = 7^3 \Rightarrow y = 3$, por lo que $f(7) = 3$ Por tanto, el ámbito de f es $] -1, 3 [$



Tiempo para practicar 1.4

1) Si la función dada por $f(x) = \log_h x$ es estrictamente decreciente, entonces un valor posible de h corresponde a

- A) $\sqrt{7}$ B) $\frac{40}{23}$
 C) $\frac{5}{31}$ D) 0

2) En la función $f(x) = \log_3 x$, el valor de $f(-27)$ es

- A) -3
 B) 27
 C) 0
 D) indefinido

3) Considere las siguientes proposiciones de la función f

- I Interseca al eje x en el punto $(1, 0)$
 II Es estrictamente creciente

De ellas son características de la función $f(x) = \ln x$

- A) Sólo la I
 B) Sólo la II
 C) Ambas
 D) Ninguna

4) Considere las siguientes proposiciones

- I El dominio es \mathbb{R}^+
 II $(b, 1)$ pertenece al gráfico de la función.

De ellas son características de la función logarítmica de la forma $f(x) = \log_b x$, $b > 0$, $b \neq 1$

- A) Sólo la I
 B) Sólo la II
 C) Ambas
 D) Ninguna

5) Para la función dada por $f(x) = \log_8 x$ considere las siguientes proposiciones:

- I. $f(-8) = -1$
 II. Si $f(x) = 2$ entonces $x = 64$.

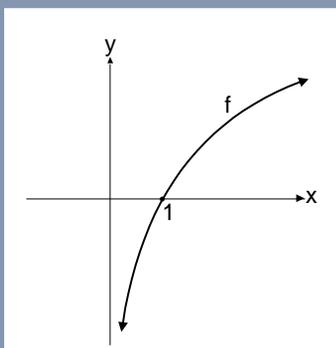
De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- A) Ninguna.
 B) Ambas.
 C) Solo II.
 D) Solo I.

6) Para la función f dada por $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x$, si $0 < x < 1$ entonces $f(x)$ pertenece a

- A) $] 0, 1 [$
- B) $] -\infty, 0 [$
- C) $] 0, +\infty [$
- D) $] \sqrt{5}, +\infty [$

7) Considere la siguiente gráfica de f .



De acuerdo con los datos de la gráfica, la función dada por $f(x) = \log_a x$ es estrictamente

- A) decreciente con $0 < a < 1$
- B) creciente con $0 < a < 1$
- C) decreciente con $a > 1$
- D) creciente con $a > 1$

8) La función dada por $f(x) = \log_{0,5} x$ es positiva en el intervalo

- A) $] 1/2, +\infty [$
- B) $] 1, +\infty [$
- C) $] 0, 1 [$
- D) $] 0, 5 [$

9) Analice las siguientes proposiciones.

- I. Si $y = \log_5 5$ entonces $y = 0$
- II Si $y = \log_a 2$ entonces $a^y = 2$

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- A) Solo la I
- B) Solo la II
- C) Ambas
- D) Ninguna

10) Si f es una función dada por $f(x) = \log_b x$, con $x < 1$ y $f(x) < 0$, entonces b es un número que pertenece a

- A) $] 0, 1 [$
- B) $[0, 1 [$
- C) $] -\infty, 1 [$
- D) $] 1, +\infty [$

11) Para la función

$f: \left[\frac{1}{25}, 5 \right[\rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \log_5 x$, el ámbito corresponde a

- A) \mathbb{R}
- B) $[-2, 1 [$
- C) $[-1, 2 [$
- D) $[\sqrt[5]{25}, \sqrt[5]{5} [$

12) Para la función dada por

$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ entonces $\forall x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$ se

cumple que

- A) $g(x) < 0$
- B) $g(x) > 1$
- C) $0 < g(x) < 1$
- D) $0 < g(x) < \frac{1}{5}$

13) Para la función dada por

$f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ considere las siguientes

proposiciones

- I f es estrictamente decreciente
- II Si $x > 1$ entonces $f(x) > 0$

De ellas ¿cuáles son verdaderas?

- A) Solo la II
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Ambas

14) Si la función f dada por $f(x) = \log_a x$ es estrictamente creciente, entonces con certeza se cumple que

- A) $0 < a < 1$
- B) $f(x) < 0$ para $0 < x < 1$
- C) $f(x) > 0$ para $x < 0$
- D) $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$

15) El ámbito de la función dada por $y = (\log \sqrt{6})^x$ corresponde a

- A) \mathbb{R}
- B) $]0, +\infty[$
- C) $[0, +\infty[$
- D) $] \sqrt{6}, +\infty[$

16) Si $x \in \mathbb{R}^+$ y $\log_a x < 0$ entonces se cumple que

- A) $0 < a < 1$ y $x < 1$
- B) $0 < a < 1$ y $x > 1$
- C) $a > 1$ y $x > 1$
- D) $a > 1$ y $x = 1$

17) El dominio máximo de la función real f dada por $f(x) = \log(4x+8)$ corresponde a

- A) $[-2, +\infty[$
- B) $\mathbb{R} - \{-2\}$
- C) $] -\infty, -2 [$
- D) $] -2, +\infty [$

18) Para la función f dada por $f(x) = \ln x$, la preimagen de 7 corresponde a

- A) e^7
- B) 7^e
- C) $\ln 7$
- D) \sqrt{e}

19) Si el ámbito de la función f dada por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es $[-2, 1[$, entonces el dominio de f corresponde a

- A) $]\frac{1}{2}, 4]$
- B) $]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$
- C) $]\frac{1}{4}, 2]$
- D) $[-4, \frac{1}{2}[$

20) Para la función dada por $f(x) = \log_{\frac{7}{5}} x$, considere las siguientes proposiciones.

- I. $f\left(\frac{5}{7}\right) < 0$
- II. $f\left(\frac{49}{25}\right) = 2$

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

21) Al representar la expresión

$\ln\left(\frac{1}{e^6}\right) = -6$, en notación exponencial se obtiene

- A) $10^{-6} = \frac{1}{e^6}$
- B) $\left(\frac{1}{e}\right)^{-6} = 0$
- C) $e^{-6} = \frac{1}{e^6}$
- D) $\left(\frac{1}{e}\right)^{-6} = e$

22) Al representar la expresión

$3^{-4} = \frac{1}{81}$, en notación logarítmica se obtiene

- A) $\frac{1}{81} = \log_3 - 4$
- B) $-4 = \log_3\left(\frac{1}{81}\right)$
- C) $\frac{1}{81} = \log_{-4} 3$
- D) $-4 = \log_{\frac{1}{81}} 3$

23) Al representar la expresión $y^b = x$, en notación logarítmica se obtiene

- A) $b = \log_y x$
- B) $b = \log_x y$
- C) $y = \log_b x$
- D) $y = \log_x b$

24) Si $-1 = \log_{2a}(m+1)$ entonces se cumple que

- A) $(2a)^{-1} = m+1$
- B) $m+1 = 2a$
- C) $(m+1)^{2a} = -1$
- D) $(2a)^{m+1} = -1$

25) La función f inversa de $g(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$, corresponde a

- A) $f(x) = 7^x$
- B) $f(x) = x^{\frac{1}{7}}$
- C) $f(x) = x^7$
- D) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$

26) El valor de N en la expresión

$\log_{\frac{1}{125}} N = \frac{1}{3}$ corresponde a

- A) $\frac{1}{5}$
- B) $\sqrt[3]{125}$
- C) $\frac{1}{5^6}$
- D) 5

27) Si $\log_2 x = \frac{1}{5}$ entonces el valor de x corresponde a

- A) 10
- B) $\sqrt{\frac{1}{5}}$
- C) $\sqrt[5]{2}$
- D) $\frac{1}{25}$

28) El valor de "c" para que se cumpla que $\log_c 3 = \frac{-1}{2}$ corresponde a

- A) $\frac{1}{3}$
- B) $\frac{1}{9}$
- C) 9
- D) 3

29) La expresión $\log_{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{25} \right) = N$ es verdadera si

- A) $N = \frac{1}{625}$
- B) $N = -4$
- C) $N = 5^{\frac{1}{50}}$
- D) $N = \frac{-1}{4}$

30) Si $\log_{\frac{1}{7}} 7^3 = x$, entonces el valor de x corresponde a

- A) $\frac{1}{7}$
- B) 7
- C) 3
- D) -3

31) Si $\log_9 (x+2) = \frac{1}{2}$, entonces el valor de x corresponde a

- A) -1
- B) 3
- C) 1
- D) $\frac{-3}{2}$

32) El valor de "a" para que se cumpla que $\frac{1}{3} \log_a 8 = 0,5$ corresponde a

- A) 32
- B) 16
- C) $\sqrt[3]{32}$
- D) $2 \sqrt[5]{16}$

33) Si se cumple que $-\log_2 x = \frac{1}{5}$ entonces el valor de "x" corresponde a

- A) -32
- B) 32
- C) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$
- D) $-\sqrt[5]{2}$

34) valor de "x" para que se cumpla que $\log_x (2\sqrt{2}) = -2$ corresponde a

- A) $\sqrt{2}$
- B) $\sqrt[4]{8}$
- C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- D) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

35) El valor de b para que se cumpla que $\log_7 (7b^3) = 7$ corresponde a

- A) 49
- B) 7
- C) 7^{18}
- D) $\sqrt[3]{7}$

36) Si $\log x = -2$, el valor de x corresponde a

- A) 100
- B) $\frac{1}{2^{10}}$
- C) $\frac{1}{100}$
- D) $(-2)^{10}$

37) El valor de "x" en la expresión

$\log_x \sqrt{8} = \frac{-1}{2}$ corresponde a

- A) $\frac{-3}{2}$
- B) $\frac{2}{3}$
- C) $\frac{1}{8}$
- D) $\frac{3}{4}$

38) Si $\log_m m\sqrt{m} = h$, entonces el valor de "h" corresponde a

- A) $\frac{3}{2}$
- B) $\frac{2}{3}$
- C) 2
- D) $\frac{1}{2}$

39) El valor de "a" en la expresión $\log_a 0,0625 = -2$ equivale a

- A) 4
- B) -4
- C) 0,75
- D) 0,25

40) El valor de x en la expresión $\log_2 0,25 = 2x$ corresponde a

- A) -4
- B) -1
- C) 1
- D) $\frac{1}{6}$

41) Si $\log_a \sqrt{b} = 3$, entonces $\log_a b$ es igual a

- A) 9
- B) $\frac{1}{3}$
- C) 6
- D) $-\frac{1}{3}$

Identidades

• Logarítmicas

Cuando se trabaja con logaritmos resulta importante conocer ciertas propiedades que permiten simplificar o expandir una determinada expresión.

Para tales fines, a continuación se presentan las identidades logarítmicas que son de utilidad para la resolución de ejercicios.

- 1) $\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$
- 2) $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$
- 3) $\log_a x^n = n \log_a x$
- 4) $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$
- 5) $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y} \right)$
- 6) $a^{\log_a x} = x$



Ejemplos

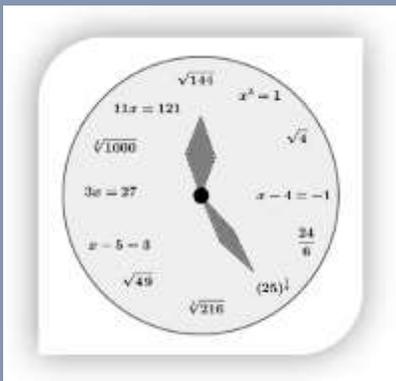
Compruebe las siguientes identidades logarítmicas.

A) $5 \log_b x^2 - \frac{1}{2} \log_b b^6 + 6 \log_b \sqrt{x} - \log_b (2x^3) = \log_b \left(\frac{x^{10}}{2} \right) - 3$

$$\begin{aligned}
 & 5 \log_b x^2 - \frac{1}{2} \log_b b^6 + 6 \log_b \sqrt{x} - \log_b (2x^3) \\
 &= \log_b (x^2)^5 - \frac{1}{2} \log_b b^6 + \log_b (\sqrt{x})^6 - \log_b (2x^3) \\
 &= \log_b (x^2)^5 - 3 + \log_b (\sqrt{x})^6 - \log_b (2x^3) \\
 &= \log_b \left[\frac{(x^2)^5 \cdot (\sqrt{x})^6}{(2x^3)} \right] - 3 = \log_b \left(\frac{x^{10} \cdot x^3}{2x^3} \right) - 3 = \log_b \left(\frac{x^{10}}{2} \right) - 3
 \end{aligned}$$

$$B) \quad \log(2x^2 - 7x - 15) - \log(4x^2 - 9) - \frac{1}{2}\log(x^2 - 10x + 25) = -\log(2x - 3)$$

$$\begin{aligned} & \log(2x^2 - 7x - 15) - \log(4x^2 - 9) - \frac{1}{2}\log(x^2 - 10x + 25) \\ &= \log(2x^2 - 7x - 15) - \log(4x^2 - 9) - \log(x^2 - 10x + 25)^{\frac{1}{2}} \\ &= \log \left[\frac{(2x^2 - 7x - 15)}{(4x^2 - 9)(x^2 - 10x + 25)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &= \log \left[\frac{(x-5)(2x+3)}{(2x-3)(2x+3)[(x-5)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] = \log \left[\frac{(x-5)(2x+3)}{(2x-3)(2x+3)(x-5)} \right] \\ &= \log \left(\frac{1}{2x-3} \right) = -\log(2x-3) \end{aligned}$$



Tiempo para practicar 1.5

I. Compruebe cada identidad logarítmica

$$(a) \quad \ln \left(\frac{e^{3x} \sqrt{3x+1}}{\tan^5 x} \right) = 3x + \frac{1}{2} \ln(3x+1) - 5 \ln(\tan x)$$

$$(b) \quad 3 \log_3 x^2 - 5 \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{23}{6} \log_3 x$$

$$(c) \quad \log_a(a^2 - a) - \log_a(a^2 - 1) = 1 - \log_a(a+1)$$

$$(d) \quad \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{3}-1) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{3}+1) = -1$$

$$(e) \quad m^{\log_m(a^2-b^2)} - \log_m(a+b) = a - b$$

$$(f) \quad \frac{1}{\log_x \sqrt[3]{x}} = 3$$

$$(g) \quad \frac{1}{2} \ln(x^2 - 14x + 49) + \ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 - 6x - 7) - \ln(x^2 - x) = -\ln x$$

$$(h) \quad 2 \log_a(x-y) + \log_a(x+y) - \log_a(x^2 - y^2) = \log_a(x-y)$$

II parte

1) La expresión

$$\log m^3 - \frac{1}{3} \log m^9 - \log m \text{ equivale a}$$

- A) $\log m$
 B) $\frac{1}{\log m}$
 C) $-\log m^3$
 D) $-\log m$

2) La expresión

$$2\log(3x-1) - \log(3x^2 + 2x - 1) \text{ es equivalente a}$$

- A) $\log(x+1)$
 B) $\log\left(\frac{1}{x+1}\right)$
 C) $\log\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)$
 D) $\log\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)$

3) La expresión $2x - \log_m(m^{2x})$

equivale a

- A) 0
 B) 1
 C) m
 D) $2x$

4) La expresión $\log_3(0,8)$ es igual a

- A) $\log_3 5 - \log_3 4$
 B) $\log_3\left(\frac{4}{5}\right)$
 C) 2
 D) $-2 + \log_3 8$

5) Analice las siguientes proposiciones.

- I. Si $x = \log_n(n^3)$ entonces $x = 3$
 II. Si $y = 3\log_3 0$ entonces $y = 0$

De estas, son verdaderas

- A) solo la I.
 B) ambas.
 C) solo la II.
 D) ninguna.

6) La expresión $\log_{\sqrt{x}} x$ equivale a

- A) $\frac{1}{2}$
 B) 2
 C) \sqrt{x}
 D) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

7) Al simplificar

$$2\log_m\left(\frac{a^3}{b}\right) - 3\log_m a + \frac{1}{2}\log_m b^4 \text{ se}$$

obtiene

- A) $3\log_m a$
 B) $2\log_m a$
 C) $\log_m ab^3$
 D) $3\log_m b$

8) La expresión

$$3\log(\sqrt[3]{x+6}) - \log(x^2 - 36) \text{ equivale}$$

a

- A) $\log(x-6)$
 B) $\log(x+6)$
 C) $-\log(x-6)$
 D) $-\log(x+6)$

9) La expresión $\log\left(\frac{7}{10x}\right)$ es equivalente a

- A) $\log 7 + \log(10x)$
- B) $1 - \log x + \log 7$
- C) $\log 7 - \log 10 + \log x$
- D) $-1 - \log x + \log 7$

10) La expresión $\log_2 3 \cdot \log_3 6$ equivale a

- A) $\frac{\log_2 30}{\log_2 3}$
- B) $\log_6 18$
- C) $\log 18$
- D) $1 + \log_2 3$

11) Considere las siguientes proposiciones.

I. $\log_b(x + y) = \log_b x \cdot \log_b y$

II. $\log_a \sqrt[n]{a^x} = \frac{x}{n}$

De estas, son verdaderas

- A) solo la I.
- B) ambas.
- C) solo la II.
- D) ninguna.

12) La expresión $9^{\log_{27} \sqrt{8}}$ equivale a

- A) 2
- B) 3
- C) 9
- D) 4

13) La expresión $-3 + \frac{\log(m^{10})}{\log m^2}$ es equivalente a

- A) 2
- B) $-3 + \log m^8$
- C) $8(\log x - \log 3)$
- D) $10 \log x - 2 \log x - 3$

14) Considere las siguientes proposiciones.

I. $\log_5 3 = \frac{\ln 3}{\ln 5}$

II. $1 + \ln x = \ln(xe)$

De estas, son verdaderas

- A) solo la I.
- B) ambas.
- C) solo la II.
- D) ninguna.

15) La expresión $-\log_{\frac{1}{x}} x$ equivale a

- A) 1
- B) -1
- C) -x
- D) $\frac{-1}{x}$

16) La expresión $\log(x^2 - 25)^{\frac{3}{7}}$ equivale a

- A) $\frac{3 \log x^2}{7 \log 9}$
- B) $\frac{3}{7} [\log(x+5) \cdot \log(x-5)]$
- C) $\frac{3}{7} [\log(x+5) + \log(x-5)]$
- D) $\frac{3}{7} (\log x - 25)$

Ecuaciones

• Logarítmicas

La función logarítmica f dada por $f(x) = \log_a x$, con $a \neq 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ es biyectiva, por lo cual si $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

Este resultado es muy importante para poder resolver algunas ecuaciones logarítmicas.



Ejemplo

Halle el conjunto solución de la ecuación

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) = 1$$

Primero se debe expresar el número 1 en términos de un logaritmo con base $\frac{1}{2}$.

Así:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

Luego se realizan propiedades de logaritmos, con el fin de simplificar en ambos miembros de la ecuación:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{(x^2 + x)}{(x^2 - x)}\right] = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

En este momento, ya se puede aplicar la propiedad de biyectividad:

$$\frac{(x^2 + x)}{(x^2 - x)} = \frac{1}{2}$$

Y se resuelve la ecuación resultante:

$$\frac{(x^2 + x)}{(x^2 - x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(x^2 + x) = x^2 - x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x = x^2 - x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x^2 + 2x + x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = -3$$

Luego de obtener los valores, se deben probar, para determinar si realmente son soluciones válidas de la ecuación.

Al sustituir $x = 0$, se incumple el dominio de una función logarítmica, pues $x \neq 0$

Al sustituir $x = 3$, se cumple que

$$\log_{\frac{1}{2}}\left((-3)^2 + -3\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left((-3)^2 - -3\right) = \log_{\frac{1}{2}} 6 - \log_{\frac{1}{2}} 12 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{6}{12}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Por tanto el conjunto solución de la ecuación es $\{-3\}$

Ecuaciones

• Exponenciales usando logaritmos

Hay ecuaciones exponenciales en las que no se pueden igualar las bases en ambos miembros, como las realizadas secciones anteriores. En estos casos, se aplica logaritmos a ambos miembros de la ecuación



Ejemplo

Halle el conjunto solución de la ecuación

$$3^{2x+1} \cdot 5^{-x} = 6^{3x+2}$$

La ecuación, es equivalente a

$$\log(3^{2x+1} \cdot 5^{-x}) = \log(6^{3x+2})$$

Ahora, se aplican propiedades de logaritmos, y se obtiene:

$$\log(3^{2x+1}) + \log(5^{-x}) = \log(6^{3x+2})$$

$$\Rightarrow (2x+1)\log 3 - x\log 5 = (3x+2)\log 6$$

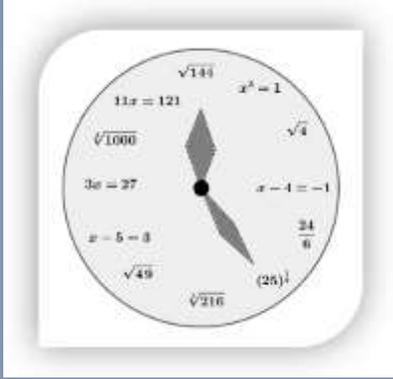
$$\Rightarrow 2x\log 3 + \log 3 - x\log 5 = 3x\log 6 + 2\log 6$$

$$\Rightarrow 2x\log 3 - x\log 5 - 3x\log 6 = 2\log 6 - \log 3$$

$$\Rightarrow x(2\log 3 - \log 5 - 3\log 6) = \log 36 - \log 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 36 - \log 3}{2\log 3 - \log 5 - 3\log 6} = \frac{\log\left(\frac{36}{12}\right)}{\log\left(\frac{3^2}{5 \cdot 6^3}\right)} = \frac{\log 12}{\log\left(\frac{1}{120}\right)} = \frac{-\log 12}{\log 120}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $\left\{\frac{-\log 12}{\log 120}\right\}$



Tiempo para practicar 1.6

A) Halle el conjunto solución en cada caso.

- 1) $\log_2(1-3x) = 3$
- 2) $-2\log_5(7x) = 2$
- 3) $-6\log_3(x-3) = -24$
- 4) $\log_2(x-7) = \log_2(11-x)$
- 5) $\log_5(x^2-4x) = \log_5(3-2x)$
- 6) $\ln(n^2+12) = \ln(-9n-2)$

- 7) $\log x = 3$
- 8) $-2\log_5(7x) = 2$
- 9) $\log_2(x+7) - \log_2(2x+3) = 0$
- 10) $\ln(x-1) + \ln(4) = 3$
- 11) $\log(3-x^2) = \log(2) + \log(x)$
- 12) $2\log_{\sqrt{3}}(x) = \log_{\sqrt{3}}(x) + \log_{\sqrt{3}}(2)$
- 13) $\log_2(x+1) - \log_2(x-4) = 3$
- 14) $\log(x-2) - \log(2x-3) = \log 2$

B) Halle el conjunto solución en cada caso.

- 1) $\log_5\left(\frac{x+2}{3}\right) = 4$
- 2) $\log_5[\ln(2x+4)] = 0$
- 3) $\log_{2x-2}(x^2+10x+13) = 1$
- 4) $\log_3(2x+1) - \log_3 x = 2 - \log_3 4$
- 5) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-x) - \log_{\frac{1}{3}}(x^2+x) = 1$
- 6) $(\ln x)^2 = 21 + 4\ln x$
- 7) $\log_5(3x-1) + \log_5(2x+1) = 2$
- 8) $\log_2 \sqrt{x} = \sqrt{\log_2 x}$
- 9) $\ln(2-x) - \ln 6 = -\ln(1-x)$
- 10) $\log_2(x^2-12) = 3 + \log_2(3-x^2)$

C) Halle el conjunto solución de cada ecuación

- 1) $5^{x+2} = 4$
- 2) $7^{3x+1} = 5^{6-x}$
- 3) $10^{4x} \cdot 3^{x+9} = 2^{x+1}$
- 4) $9^{7x+2} = \frac{4^{x+9}}{5}$
- 5) $8^{\frac{x+7}{3}} = 7$
- 6) $\frac{1}{2} \cdot 11^{8+5x} = 5^x$
- 7) $6^{10-x} - 7^{3x} = 0$

D.

1) La solución de $\log_3 x^2 - \log_3 x = 3$ corresponde a

- A) 27
- B) $\sqrt[3]{3}$
- C) 3
- D) 1

1) El conjunto solución de la ecuación $\log_3 = 2 - \log[3(x-2)]$ corresponde a

- A) {9}
- B) $\left\{\frac{19}{9}\right\}$
- C) $\left\{\frac{201}{100}\right\}$
- D) $\left\{\frac{118}{9}\right\}$

3) La solución de

$3\log x - \log 3 = \log 27$ corresponde a

- A) 81
- B) $3\sqrt[3]{3}$
- C) $\sqrt[3]{9}$
- D) 9

4) La solución de $\log_5(3x) - \log_5(2x+1) = -2$ corresponde a

- A) $\frac{1}{73}$
- B) $\frac{-7}{2}$
- C) $\frac{-2}{7}$
- D) 73

5) El conjunto solución de $\log_3(2x) + 4\log_3 2 = \log_3\left(\frac{1}{5x}\right)$

corresponde a

- A) {160}
- B) $\left\{\frac{\sqrt{10}}{40}\right\}$
- C) $\left\{\frac{-\sqrt{10}}{40}\right\}$
- D) $\left\{\frac{-\sqrt{10}}{40}, \frac{\sqrt{10}}{40}\right\}$

6) El conjunto solución de $\log(x^2 - 9) = \log(x - 3) + \log(2x)$

corresponde a

- A) { }
- B) { 1 }
- C) { 3 }
- D) { -3 }

7) La solución de

$\log_2 5 + \log_2(2x+1) = 0$ corresponde a

- A) $-\frac{1}{2}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $-\frac{2}{5}$
- D) $\frac{2}{5}$

8) En la expresión $\ln(x+7) = 0$ el valor de "x" corresponde a

- A) -6
- B) 6
- C) -7
- D) 7

9) El conjunto solución de

$$\log \sqrt[3]{5+2x} = \frac{1}{3} \text{ corresponde a}$$

- A) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$
 B) $\left\{\frac{-67}{27}\right\}$
 C) $\left\{\frac{2}{5}\right\}$
 D) $\left\{\frac{27}{67}\right\}$

10) El conjunto solución de $\log x - \log 2 + \log(x-3) = \log 5$ corresponde a

- A) $\{-2, 5\}$
 B) $\{-2\}$
 C) $\{5\}$
 D) $\{0\}$

11) Si $\log(x^2 + 6) = 1$ entonces el valor de "x" corresponde a

- A) 2
 B) -2
 C) $2y - 2$
 D) $4y - 4$

12) Si $\log_b 12 = 1 + \log_b 3$, entonces el valor de "b" corresponde a

- A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 4

13) La preimagen de 3 en la función r dada por $r(x) = 5^{-2x}$ corresponde a

- A) $\frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{3}{5}\right)$
 B) $\frac{1}{2} \cdot \frac{\log 3}{\log 5}$
 C) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{\log 3}{\log 5}$
 D) $-\frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{3}{5}\right)$

14) La preimagen de 6 en la función f dada por $f(x) = e^{2x}$ corresponde a

- A) $-\ln 6$
 B) $\frac{\ln 6}{2}$
 C) $\frac{-2}{\ln 6}$
 D) $e \cdot \ln 6$

15) La preimagen de 7 en la función f dada por $f(x) = 2^x \cdot \frac{1}{4}$ corresponde a

- A) $\frac{\log 7 + 2 \log 2}{\log 2}$
 B) $\frac{\log 7 - 2 \log 2}{\log 2}$
 C) $\log 7 - 2 \log 2$
 D) $\log 7 + 2 \log 2$

16) La solución de $\left(\frac{1}{16}\right)^{3-2x} = 5$ es aproximadamente

- A) 1,80
 B) -1,21
 C) 2,16
 D) -3,2

17) La solución de $3^{x+1} = 2 \cdot 5^{3x}$ es

- A) $\frac{\log 2 - \log 3}{\log 3 - 3 \log 5}$
B) $\frac{\log 2 - \log 3}{\log 3 + 3 \log 5}$
C) $\frac{\log 2 - \log 3}{\log 3}$
D) $\frac{\log 2 + \log 3}{\log 3}$

18) La solución de $e^{2x+1} = e^{7x} \cdot 5$ es

- A) $\frac{1 - \ln 5}{5}$
B) $1 - \ln 5$
C) $\frac{\ln 5 - 1}{5}$
D) $\ln 5 - 1$

19) El valor aproximado de "x" para

que se cumpla que $5^{3x-6} \cdot 7^{x+1} = \frac{2^x}{9^{7x-8}}$

es aproximadamente

- A) $-0,2784$
B) $0,4529$
C) $-2,0731$
D) $1,1783$

20) La solución de $30^{-x} = \frac{2}{5^{x+2}}$ es

- A) $\frac{\log\left(\frac{2}{25}\right)}{\log(6)}$
B) $\frac{1}{12}$
C) $\frac{\log(50)}{\log(150)}$
D) $\frac{\log\left(\frac{2}{25}\right)}{\log(150)}$

Modelos

• Logarítmicos y exponenciales

Existen varias disciplinas en las que se aplican funciones exponenciales y logarítmicas, con las cuales se explican ciertos fenómenos y comportamientos.



Ejemplo 1

La función f dada por $f(x) = 2e^{-0,35x}$ se utiliza para aproximar el área en centímetros cuadrados de una herida en la piel en “ x ” días de producida.

(a) ¿Cuál es aproximadamente el área en centímetros cuadrados de la herida el día 5?

(b) Si el área de la herida es aproximadamente $0,493 \text{ cm}^2$, entonces ¿cuántos días han transcurrido?

Para la pregunta a) se calcula la imagen de 5:

$$f(5) = 2e^{-0,35 \cdot 5} \approx 0,35 \text{ cm}^2$$

Por tanto el área de la herida en el día 5 es de $0,35 \text{ cm}^2$

En la pregunta b), se debe calcular la preimagen de 0,493. Así:

$$\begin{aligned} 2e^{-0,35x} &= 0,493 \\ \Rightarrow e^{-0,35x} &= \frac{0,493}{2} \\ \Rightarrow e^{-0,35x} &= 0,2465 \\ \Rightarrow -0,35x &= \ln(0,2465) \\ \Rightarrow x &= \frac{\ln(0,2465)}{-0,35} \Rightarrow x \approx 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, han transcurrido aproximadamente 4 días.



Ejemplo 2

La energía sísmica transmitida en la superficie terrestre se puede medir mediante la siguiente fórmula logarítmica: $\log E = 4,8 + 1,5M$ Donde M = magnitud en la escala de Richter. E = energía sísmica en Joules. Si en Japón un terremoto fue de magnitud 7 y en Costa Rica de 6, determine la diferencia entre la energía de ambos

terremotos.

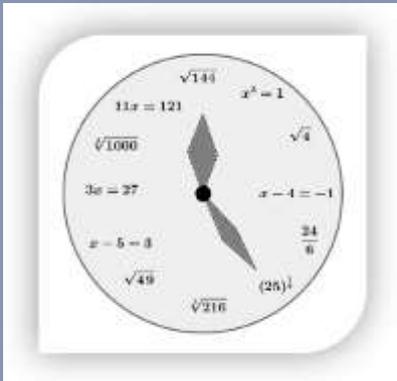
Al utilizar la fórmula, se tiene que:

$$\log E_{\text{Japón}} = 4,5 + 1,5 \cdot 7 \Rightarrow \log E_{\text{Japón}} = 15 \Rightarrow 10^{15} = E_{\text{Japón}}$$

$$\log E_{\text{Costa Rica}} = 4,5 + 1,5 \cdot 6 \Rightarrow \log E_{\text{Costa Rica}} = 13,5 \Rightarrow 10^{13,5} = E_{\text{Costa Rica}}$$

$$\text{Diferencia} = 10^{15} - 10^{13,5} = 9,68 \times 10^{14} \text{ J}$$

Tiempo para practicar 1.7



I Parte: Resuelva cada problema.

1) Por la contaminación, la población de peces en un lago está disminuyendo según la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -0,0437t$$

donde P es la población de peces después de t años y P_0 la población inicial. Después de cuántos años habrá solo el 30% de la población inicial de peces.

2) El nivel de intensidad "a" de un sonido medido en decibeles está dado por $a = 10(\log F + 16)$, donde F es la

intensidad del sonido medida en vatios/cm². ¿Cuál es el nivel de intensidad de una corneta cuya intensidad es 10⁻⁵ vatios/cm²?

3) El diámetro "d" en kilómetros de un asteroide, está relacionado con su magnitud "g", mediante la función dada por $\log d = 3,7 - 0,2g$. ¿Cuál es el diámetro de un cuerpo que tiene una magnitud de 15?

4) El nivel de alcohol "N" en la sangre en mg/mL, se modela mediante el criterio

$$N(t) = 0,4\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

donde t es el tiempo en horas de haber consumido alcohol. El nivel permitido en Costa Rica para manejar, es de 0,06 mg/mL. ¿Cuántas horas deben transcurrir para que el nivel de alcohol en la sangre sea el permitido?

5) El volumen "V" del sonido es medido mediante decibeles mediante el criterio de la función $V(i) = 10\log(i \cdot 10^{12})$, donde i representa la intensidad medida en vatios por metro cuadrado. Un sonido de más de 80 decibeles produce efectos negativos en tareas que requieren concentración, produciendo estrés, cansancio y alteraciones de sueño.

(a) De cuánto debe ser la intensidad máxima antes de que se considere negativa para efectuar tareas que requieren concentración.

(b) ¿A cuántos decibeles equivale el sonido de una aspiradora que produce 10⁻¹¹ vatios por metro cuadrado?

II parte

6) La función f dada por $f(x) = Pe^{0,05x}$ sirve para aproximar el interés ganado al final de un periodo de pago y que se agrega al capital inicial P a los x años. ¿Cuántos años se requieren aproximadamente para triplicar el capital?

- A) 1, 16
- B) 3, 15
- C) 8, 03
- D) 21, 97

7) Se dispone de una cartulina de 1mm de espesor que se puede doblar sucesivamente de modo que cada doblez se hace sobre el anterior. Si la relación entre la altura h de la cartulina doblada y el número de dobleces x está dada por $h(x) = 2^x$, entonces ¿cuántos dobleces se han realizado, si en el último se alcanza una altura de 16 mm?

- A) 4
- B) 32
- C) 256
- D) más de 1000

8) Con la información proporcionada en el problema anterior, ¿cuál es la altura alcanzada de la cartulina con 6 dobleces?

- A) 12
- B) 36
- C) 64
- D) 108

9) La función f dada por $f(x) = 20 \cdot 2^{\frac{-x}{100}}$ sirve para calcular la masa en gramos de una sustancia radiactiva que se reduce por desintegración al cabo de x días. ¿Cuántos gramos aproximadamente se tiene al cabo de 10 días?

- A) 15,04
- B) 18, 66
- C) 204, 8
- D) 220,3

10) El modelo Count es una función que se puede usar para calcular en centímetros la estatura h deseable, en niños de edad preescolar de t años. La función está dada por

$$h(t) = 70,228 + 5,104 \cdot t + 9,222 \cdot \ln(t), \text{ con } \frac{1}{4} \leq t \leq 6.$$

¿Cuál debe ser la estatura aproximada en centímetros para un niño de 2 años?

- A) 55, 02
- B) 83, 21
- C) 86, 82
- D) 96, 95

Selección única. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1) Para la función f dada por $f(x) = \log_5 x$, el valor de $f(5^{2a})$ corresponde a

- (A) 5^{2a} (B) $2a$
 (C) 5 (D) 2

2) Si $\log_h \sqrt[4]{h} = \frac{m}{8}$, entonces el valor de "m" es

 ,

3) El valor de x en la expresión $\log_m \left(\frac{1}{49} \right) = -2$ es

 ,

4) El valor de x en la expresión $\log_{\frac{1}{8}} (\sqrt{d}) = -\frac{1}{6}$ es

 ,

5) Si el ámbito de la función f dada por $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ es $[-2, 0[$, entonces el dominio de f corresponde a

- (A) $]1, 16]$ (B) $]1, 16[$
 (C) $]0, 1]$ (D) $]0, 1[$

6) Si la función dada por $f(x) = \log_h x$ con $f(3) > f(11)$, entonces un valor posible de h corresponde a

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) 5
 (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{9}{7}$

7) Considere las siguientes proposiciones de la función f

I $\forall x \in [1, +\infty[$ se cumple que $0 \leq f(x) \leq 1$

II $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$

De ellas son características de la función $f(x) = \ln x$

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) ninguna | (B) ambas |
| (C) solo la II | (D) solo la I |

8) Para la función dada por $f(x) = \log_{16} x$ considere las siguientes proposiciones:

I. $\frac{1}{2}$ es la preimagen de 4

II. La imagen de 1 es 0

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) ninguna | (B) ambas |
| (C) solo la II | (D) solo la I |

9) Para la función f dada por $f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$, si $0 < x < 1$ entonces $f(x)$ pertenece a

- | | |
|--------------------|---------------------|
| (A) $]0, 1[$ | (B) $] -\infty, 0[$ |
| (C) $]0, +\infty[$ | (D) $] -\infty, 1[$ |

10) La función f dada por $f(x) = \log_{0,8} x$ es negativa en el intervalo

- | | |
|--------------------|------------------------|
| (A) $]0, 1[$ | (B) $]0, 8[$ |
| (C) $]1, +\infty[$ | (D) $]0, \frac{4}{5}[$ |

- 11) Si f es una función dada por $f(x) = \log_b x$, con $x < 1$ y $f(x) > 0$, entonces b es un número que pertenece a

- (A) $]0,1[$ (B) $] -1,0[$
 (C) $]1,+\infty[$ (D) $]0,+\infty[$

- 12) Para la función $f: \left[\frac{1}{6}, 36\right[\rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \log_{\sqrt{6}} x$, un elemento del ámbito corresponde a

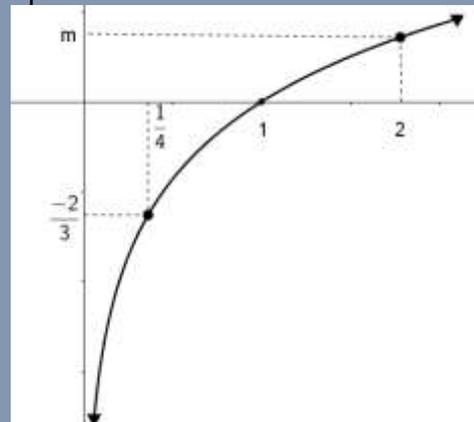
- (A) 4 (B) -1
 (C) 8 (D) $\frac{9}{2}$

- 13) Sea h una función dada por $h(x) = \log_8 x$. El criterio de la función inversa de h corresponde a

- (A) $h^{-1}(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ (B) $h^{-1}(x) = x^8$
 (C) $h^{-1}(x) = 8^x$ (D) $h^{-1}(x) = x^{\frac{1}{8}}$

- 14) Considere la gráfica que representa a una función logarítmica f . Según los datos proporcionados, el valor de "m" corresponde a

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$
 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$



- 15) Considere las siguientes proposiciones, referidas a la función h , dada por $h(x) = \log_a x$, donde $(3,2)$ es un elemento del gráfico de h :

- I. $a > 1$
 II. $h\left(\frac{1}{7}\right) > 0$

¿Cuál o cuáles de ellas son **verdaderas**?

- (A) ninguna (B) ambas
 (C) solo la II (D) solo la I

- 16) La expresión $a^{\log_a(x^{17}-1)} + b^{\log_b(x-x^{17})}$ equivale a

- (A) $1-x$ (B) $2x^{17} + x - 1$
 (C) $\log_a(2x^{17} + x - 1)$ (D) $x-1$

- 17) La expresión $\sqrt{\log_b\left(\frac{x^2}{y}\right)}$ equivale a

- (A) $(2\log_b x - \log_b y)^{\frac{1}{2}}$ (B) $\frac{1}{2}(2\log_b x - \log_b y)$
 (C) $\sqrt{2\log_b x + \log_b y}$ (D) $\log_b x \cdot \sqrt{\frac{1}{\log_b y}}$

- 18) La expresión $\log_b(2x^2 - 5x - 3) - \log_b(10x^2 + 5x)$ equivale a

- (A) $\log_b(-8x^2 - 3)$ (B) $\frac{1}{2}(2\log_b - \log_b y)$
 (C) $\log_b\left(\frac{x-3}{5x}\right)$ (D) $\log_b x \cdot \sqrt{\frac{1}{\log_b y}}$

19) El conjunto solución de $\ln(x-3) + \ln(x-2) = \ln(2x+24)$ corresponde a

- | | |
|----------------|--------------|
| (A) $\{-2,9\}$ | (B) $\{-2\}$ |
| (C) $\{9\}$ | (D) $\{2\}$ |

20) El valor de "x" que satisface la igualdad $\log_4[\log_3(x)] = \frac{1}{2}$

--	--	--	--	--	--

21) Para la ecuación $\log\sqrt{x^2 + 3x + 100} = 1$ considere las siguientes proposiciones

- I. El conjunto solución posee dos elementos.
- II. Una solución de la ecuación pertenece a $[2,4]$

¿Cuál o cuáles de ellas son **verdaderas**?

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) ninguna | (B) ambas |
| (C) solo la II | (D) solo la I |

22) La solución de $5^x \cdot 3 = 2^{x+1}$ pertenece al intervalo

- | | |
|---------------|---------------|
| (A) $[-1,0]$ | (B) $[1,4]$ |
| (C) $[-3,-1]$ | (D) $[-5,-4]$ |

23) El conjunto solución de $7^{2x+1} - 3 = 2$ pertenece al intervalo

- | | |
|---------------------------------------|--|
| (A) $\ln\left(\frac{5}{7}\right) - 1$ | (B) $\frac{\ln 5}{2\ln 7} - \frac{1}{2}$ |
| (C) $\frac{2\ln 5}{\ln 7} - 2$ | (D) $\ln\left(\frac{2}{7}\right) + 3$ |

Conocimiento:

Modelización

Habilidades:

10. Utilizar las funciones estudiadas para plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.
11. Analizar el tipo de función que sirva de modelo para una situación dada

Funciones

• **Y modelización**

Escenario de aprendizaje

En Costa Rica, la flota vehicular ha crecido significativamente. En la tabla se presenta el número de vehículos, desde 1983 hasta el 2005

COSTA RICA: INDICE DE MOTORIZACION.

Año	FLOTA VEHICULAR
1983	210 044
1984	217 828
1985	226 875
1986	243 458
1987	260 624
1988	275 327
1989	292 026
1990	318 642
1991	332 876
1992	373 868
1993	396 379
1994	439 235
1995	477 778
1996	511 670
1997	551 750
1998	572 073
1999	643 737
2000	774 885
2001	664 563
2002	689 763
2003	894 501
2004	952 295
2005	1 013 823

Fuente: INEC y Registro Nacional

Utilice una hoja de cálculo [Excel] para encontrar cuál modelo matemático (línea de tendencia) logra predecir mejor el número de vehículos para los años 2018 y 2020.

Use los modelos estudiados en secundaria: lineal, polinomial de grado 2 y exponencial

Para determinar cuál de las funciones estudiadas se ajusta mejor a los datos, seguiremos los siguientes pasos en Excel.

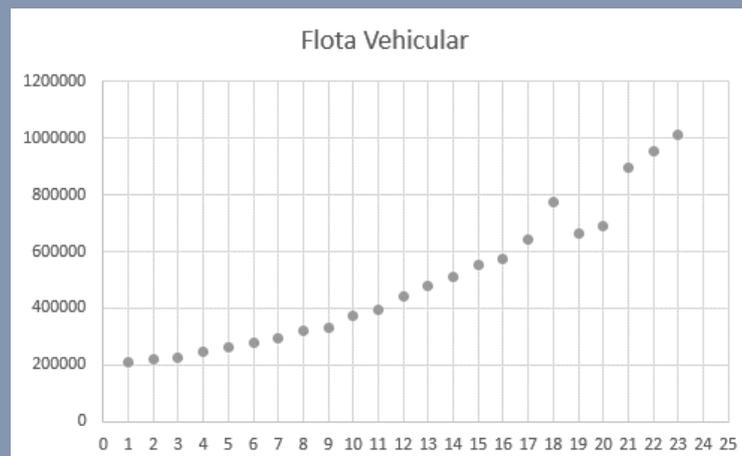
Escribimos los datos, pero al año 1983 le asignamos el 1, a 1984 el 2 y así sucesivamente.

Luego seleccionamos ambas columnas, tal como se muestra en la figura adjunta y en la barra de herramientas se selecciona INSERTAR → Gráficos → Dispersión

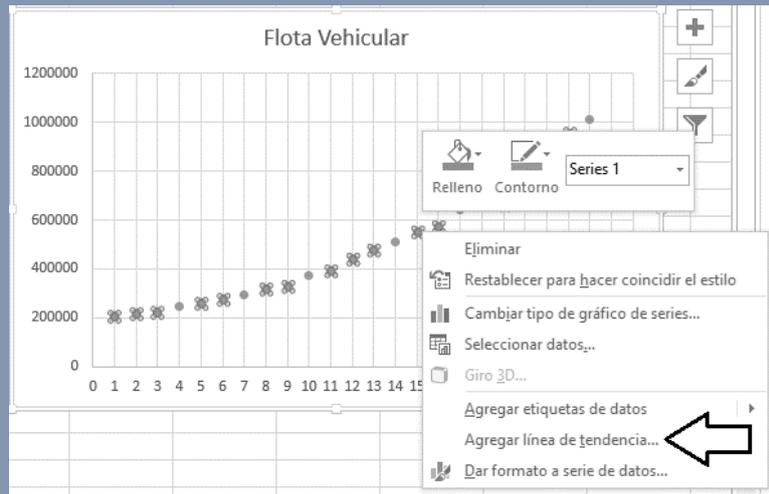


Año		FLOTA VEHICULAR
1983	1	210 044
1984	2	217 828
1985	3	226 875
1986	4	243 458
1987	5	260 624
1988	6	275 327
1989	7	292 026
1990	8	318 642
1991	9	332 876
1992	10	373 868
1993	11	386 379
1994	12	439 235
1995	13	477 778
1996	14	511 670
1997	15	551 750
1998	16	572 073
1999	17	643 737
2000	18	774 895
2001	19	964 563
2002	20	889 763
2003	21	894 501
2004	22	952 295
2005	23	1 013 823

De este modo, se construye el siguiente gráfico

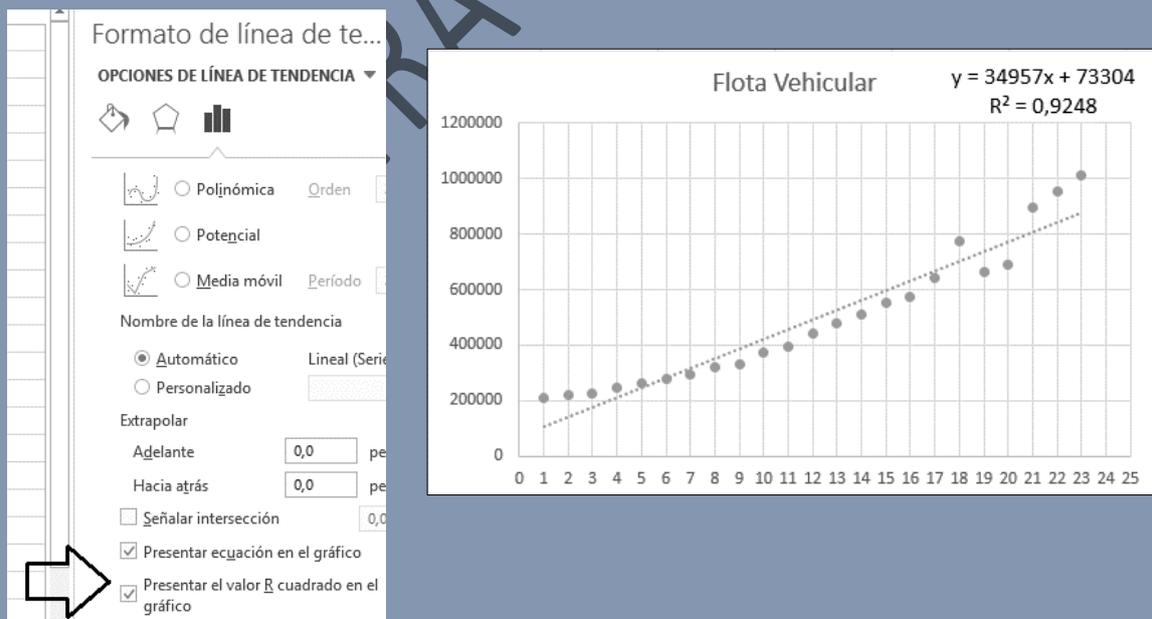


Para determinar la función que más se ajusta a los datos, se da “*click derecho*” a los puntos del gráfico y se selecciona la opción “*agregar línea de tendencia*”



Excel trazará la recta correspondiente al criterio de la función lineal que mejor se ajusta y a la vez abrirá una ventana con “*Opciones de línea de tendencia*” donde se podrá escoger la función exponencial y polinómica, entre otras.

Es importante habilitar las opciones *Presentar ecuación del gráfico* y *Presentar el valor R cuadrado del gráfico*. Este último se conoce como coeficiente de correlación, y entre mayor sea, mejor predice la función el comportamiento de los datos.



De este modo la ecuación de la recta está dada por $y = 34\ 957x + 73\ 304$ y el coeficiente de correlación es 0,9248.

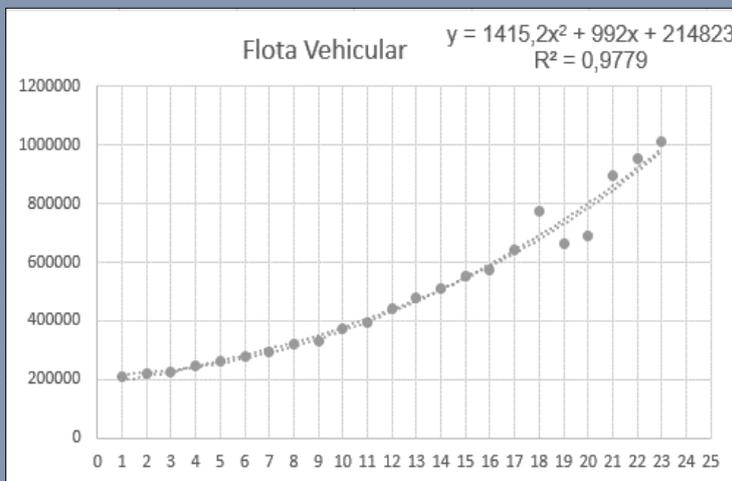
Si la flota vehicular siguiera esa tendencia lineal, en el 2018 habría la siguiente cantidad:
 $y = 34\ 957 \cdot 36 + 73\ 304 = 1\ 331\ 756$

Note que el valor de “x” no es 2018 sino 36, puesto que el 1 representaba al año 1983

De modo similar, la cantidad de vehículos para el 2020 se esperaría que fuera de
 $y = 34\ 957 \cdot 38 + 73\ 304 = 1\ 331\ 756 = 1\ 401\ 679$

El mismo proceso se debe realizar para obtener el criterio de una función exponencial y cuadrática.

Función cuadrática

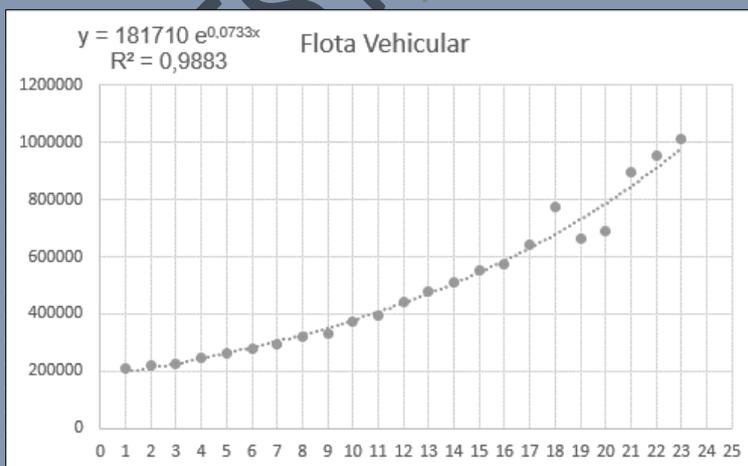


Esta curva predice mejor el modelo que estamos analizando, en comparación a la lineal.

Al usar este polinomio, se esperaría para el 2018:

$$1415,2 \cdot 36^2 + 992 \cdot 36 + 214823 = 2\ 084\ 634 \text{ vehículos}$$

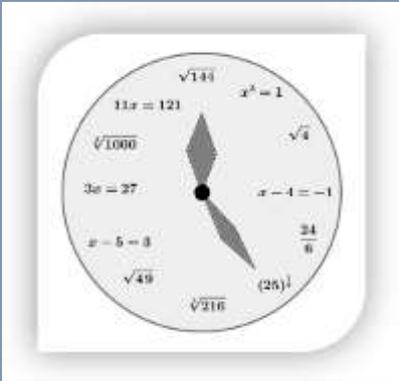
Función exponencial



Con esta función exponencial se obtiene el mayor coeficiente de correlación.

En el 2018 se esperaría una flota vehicular de:

$$181710e^{0,0733 \cdot 36} \approx 2\ 543\ 285$$



Tiempo para practicar 1.8

Parte A: En cada caso, tome para su análisis la posibilidad de una función lineal, cuadrática, exponencial o logarítmica, según sea.

1) Un modelo que relaciona la temperatura " T ", en grados Fahrenheit F , en función del número de sonidos que emite una especie de grillos es $T = 0,31N + 38$ donde " N " es el número de sonidos por minuto.

De acuerdo con la información anterior, indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

- El modelo presentado corresponde a una función lineal.
 La temperatura, en un lugar donde se contabilizan 54 sonidos por minuto, de un grillo de esa especie, es $54,74^\circ F$.

2) Una empresa telefónica cobra por mes $\$ 1\,500$ como tarifa básica y $\$ 65$ por minuto.

De acuerdo con la información anterior, indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

- El modelo presentado corresponde a una función cuadrática.
 Si un cliente no hace llamadas durante el mes, el monto de su recibo telefónico será de $\$ 0$

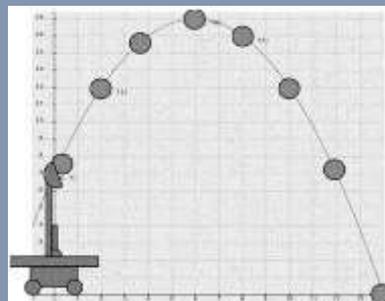
3) La cantidad, en mg, de sustancia de un medicamento en un organismo, según el tiempo transcurrido en horas, desde que es inyectado al paciente, está resumida en la siguiente tabla:

Tiempo (horas) transcurrido	0	1	2	3	4	5	6
Miligramos de sustancia	20	10	5	2,5	1,25	0,625	0,3125

De acuerdo con la información anterior, indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

- El modelo presentado corresponde a una función lineal.
 Al cabo de 7 horas, la cantidad de sustancia del medicamento en el cuerpo será de $0,15625$ mg

- 4) Considere la siguiente representación gráfica en la que aparece la secuencia de una piedra lanzada por una catapulta.

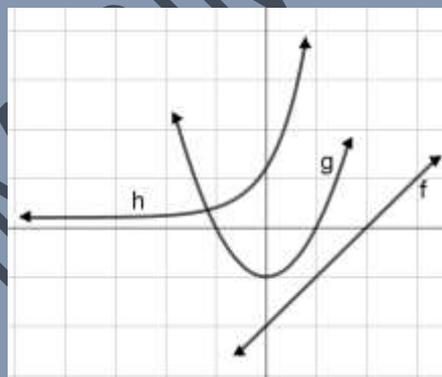


De acuerdo con la información proporcionada, la función que mejor se adapta como modelo para describir la altura con respecto al suelo, que alcanza la piedra, relación con el tiempo, corresponde a la función:

- A) Logarítmica. B) Lineal.
C) Cuadrática. D) Exponencial.

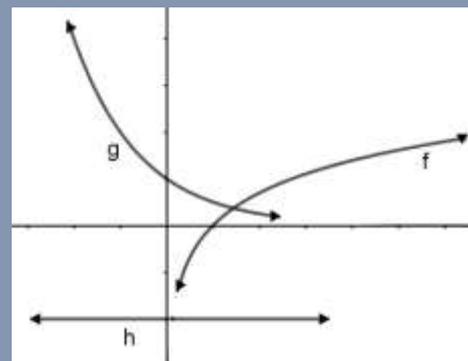
- 5) Considere la siguiente representación gráfica que corresponde a las funciones f , g , h .

- (a) ¿Cuál modelo describe mejor la función f ?
(b) ¿Cuál modelo describe mejor la función h ?
(c) ¿Cuál modelo describe mejor la función g ?



- 6) Considere la siguiente representación gráfica que corresponde a las funciones f , g , h .

- (a) ¿Cuál modelo describe mejor la función f ?
(b) ¿Cuál modelo describe mejor la función h ?
(c) ¿Cuál modelo describe mejor la función g ?



- 7) En una empresa, las utilidades o ganancias por la venta de un producto, están relacionadas con la inversión que se hace en publicidad. Pero la empresa debe saber cuánto invertir en publicidad, ya que a pesar de que, en ciertos casos, a mayor inversión, mayor ganancia, llega un momento donde más bien una excesiva inversión publicitaria, puede provocar disminución de ganancias. ¿Cuál modelo describe mejor la función f ?

- 8) El ingreso que obtiene un dueño de un teatro está dado por $I = p \cdot q$, donde p es el precio de la entrada y q la cantidad de personas que asisten al teatro.

El dueño se ha percatado, que la asistencia al teatro se relaciona con el precio de la entrada (a menor precio, mayor asistencia), mediante la función $q = 4500 - 2p$

- (a) De acuerdo con la información proporcionada, la relación de la asistencia q con el precio p , corresponde a una función:

- (A) Logarítmica. (B) Lineal.
(C) Cuadrática. (D) Exponencial

- (b) De acuerdo con la información proporcionada, la relación del ingreso I con el precio p , corresponde a una función:

- (A) Logarítmica. (B) Lineal.
(C) Cuadrática. (D) Exponencial

- (c) Determine el criterio del ingreso I , según el precio p .

- (d) De cuánto será el ingreso, si se fija un precio de $\text{C}\$2\,000$ la entrada

- 9) Considere la siguiente tabla.

x	81	27	9	3	1
y	4	3	2	1	0

De acuerdo con la información anterior, indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

_____ El modelo presentado corresponde a una función logarítmica.

_____ La imagen de $\frac{1}{3}$ es -1

Parte B

En cada caso, con la ayuda de una hoja de cálculo, determine la función que mejor describe el comportamiento de los datos y establezca una predicción, según se le solicite.

10) La siguiente tabla es tomada del Estado de la Nación, y en ella se presenta el salario mínimo, en colones, establecido en Costa Rica, desde 1996 hasta el 2014.

1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
37646	45240	51584	5760	63544	71968	77584	85358	95004	108888
2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	
122694	135356	156625	170950	187043	198681	211129	224087	242371	

- Determine la función lineal, cuadrática y exponencial que se ajustan a estos datos.
- Determine cuál de las funciones describe mejor el comportamiento de los datos
- Utilice la fórmula del punto anterior, para predecir el salario mínimo para el 2025.

11) Según datos del Estado de la Nación, el promedio de personas que viven en cada hogar, ha disminuido en las últimas décadas. Seguidamente se muestran los datos:

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
4,4	4,4	4,2	4,2	4,3	4,2	4,1	4,1	4,0	4,1	4,1	4,0
2002	2003	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
3,9	3,9	3,8	3,7	3,7	3,6	3,6	3,5	3,5	3,4	3,4	3,3

- Determine la función lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica que se ajustan a estos datos.
- Determine cuál de las funciones describe mejor el comportamiento de los datos
- Utilice la fórmula del punto anterior, para predecir el promedio de personas que vivirán en un hogar costarricense en el 2032

- 12) En el Estado de la Nación muestran el crecimiento de profesionales que trabajan en el sector de educación. En la tabla se muestran los datos correspondientes a los años del 2001 a 2014

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
85 007	91 895	98 376	95 770	104 079	108 409	110 589
2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
112 552	114 628	134 936	124 741	140 332	139 179	142 185

- (a) Determine la función lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica que se ajustan a estos datos.
- (b) Determine cuál de las funciones describe mejor el comportamiento de los datos
- (c) Utilice la fórmula del punto anterior, para predecir el número de profesionales que trabajarán en educación en Costa Rica para el año 2040
- 13) Un comerciante realizó un pequeño estudio para determinar la relación que hay entre la inversión en publicidad mensual y las ganancias. La tabla resume los datos. Las cantidades están dadas en miles de colones.

Inversión	2	3	5	8	12	20	25	40	42	50
Ganancia	7	8	14	16	30	50	55	40	32	12

- (b) Determine la función que mejor describe el comportamiento de los datos
- (c) Utilice la fórmula del punto anterior, para deducir las ganancias al invertir ₡18 000 en publicidad.
- (d) ¿Cuánto deberá invertir el comerciante para esperar una ganancia de aproximadamente ₡45 000?
- 14) Una profesora, preocupada por el ausentismo de los estudiantes, hizo un estudio, con el fin de establecer una relación entre el número de ausencias y las calificaciones del trimestre. La información se resume en la tabla:

Ausencias	2	0	1	2	4	6	1	0	8	12	2	0
Nota	80	90	85	85	70	50	80	85	45	40	70	85

- (a) Determine la función lineal, cuadrática y exponencial que se ajustan a estos datos.
- (b) Determine cuál de las funciones describe mejor el comportamiento de los datos
- (c) Utilice la fórmula del punto anterior, para estimar la nota de un estudiante que falta 10 veces durante el trimestre.

Selección única. APLICACIONES

- 1) El costo en dólares "C" de producir "x" unidades de un producto mensualmente está dado por $C(x) = 3x + 900$. ¿Cuál será el costo si se producen 300 unidades del producto?

(A) \$200 (B) \$400
(C) \$900 (D) \$1800

- 2) El salario "S" de un comerciante, según la cantidad de pantalones "p" que venda por semana, está dado por $S(p) = 45\,000 + 3000p$. En esta situación, la variable dependiente es

(A) el salario "S" (B) 45 000
(C) 3000 (D) la cantidad de pantalones "p"

- 3) Una compañía telefónica cobra como tarifa básica ₡1700 mensualmente, y por cada minuto de llamadas cobra ₡20. Una función que relacione el cobro "C" de la compañía, en términos de los "m" minutos de llamadas, corresponde a

(A) $C(m) = 1700 + 20m$ (B) $C(m) = 1700m + 20$
(C) $m(C) = 1700 + 20C$ (D) $m(C) = 1700C + 20$

- 4) El precio en colones "P" que cobra por día una compañía de alquiler de autos está dada por $P(x) = 25\,000 + 500x$, donde "x" representa la cantidad de kilómetros recorridos. Si Crisanto paga ₡35 500, ¿Cuántos kilómetros recorrió?

(A) 500 (B) 25
(C) 71 (D) 21

Analice el siguiente escenario:

Una compañía que fabrica computadoras portátiles estima que la ganancia al vender una computadora al momento de su lanzamiento ($t = 0$), al mercado es de ₡120 000 y tres años después es de la mitad de la ganancia inicial. La ganancia G tiene una relación lineal con la cantidad “ t ” de años después del lanzamiento; para $0 \leq t \leq 6$

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 5 y 6

5) El criterio de la función lineal que modela esta situación corresponde a

- (A) $G(t) = -20\,000 + 120\,000t$ (B) $G(t) = -20\,000t + 120\,000$
 (C) $G(t) = -20\,000 - 120\,000t$ (D) $G(t) = 20\,000t + 120\,000$

6) La ganancia que obtiene la compañía a los 5,8 años del lanzamiento de las computadoras, es de

<input type="text"/>	,	<input type="text"/>	<input type="text"/>					
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	---	----------------------	----------------------

7) Una tienda que ofrece camisas establece una promoción, vende 2 camisas por ₡6000 y 5 por ₡12 000. Si la relación es modelada de forma lineal. ¿Cuántas camisas compró un cliente que pagó ₡24 000?

<input type="text"/>	,	<input type="text"/>	<input type="text"/>				
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	---	----------------------	----------------------

8) El valor inicial de un terreno es de ₡40 000 000 y su valor “ V ” aumenta cada año en ₡480 000. ¿Cuál es el precio de ese terreno al cabo de 12 años?

- (A) ₡48 000 000 (B) ₡48 800 000
 (C) ₡40 480 000 (D) ₡ 45 760 000

Analice el siguiente escenario:

En una empresa de venta de paquetes turísticos, a los empleados se les ofrece 2 formas de pago salarial por semana que pueden escoger.

Forma A: un salario base de ₡110 000 más ₡24 000 por paquete vendido

Forma B: un salario base de ₡170 000 más ₡18 000 por paquete vendido

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 9 y 10

- 9) Considere las siguientes proposiciones
- I. El salario de un empleado según la forma de pago A, que logra vender por semana 8 paquetes turísticos, es de ₡ 302 000
 - II. Si un empleado vende 12 paquetes, gana más salario mediante la forma B

¿Cuál o cuáles de ellas son **verdaderas**?

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) ninguna | (B) ambas |
| (C) solo la II | (D) solo la I |

- 10) ¿Cuántos paquetes debe venderse para que el salario sea el mismo en las dos formas de pago?

--	--	--	--	--	--

Analice el siguiente escenario:

Luego de modelizar una serie de datos, el dueño de un automóvil, logra relacionar el costo en colones “C”, según la velocidad “v” (en km/h). El criterio obtenido fue $C(v) = 0,015v^2 - 2,5v + 120$, con $10 \leq v \leq 120$

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 11, 12 y 13

- 11) La velocidad aproximada, en km/h, para la cual el costo es el mínimo, corresponde a

- | | |
|-----------|-----------|
| (A) 10,00 | (B) 83,33 |
| (C) 95,00 | (D) 32,48 |

- 12) El costo mínimo aproximado en colones, corresponde a

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

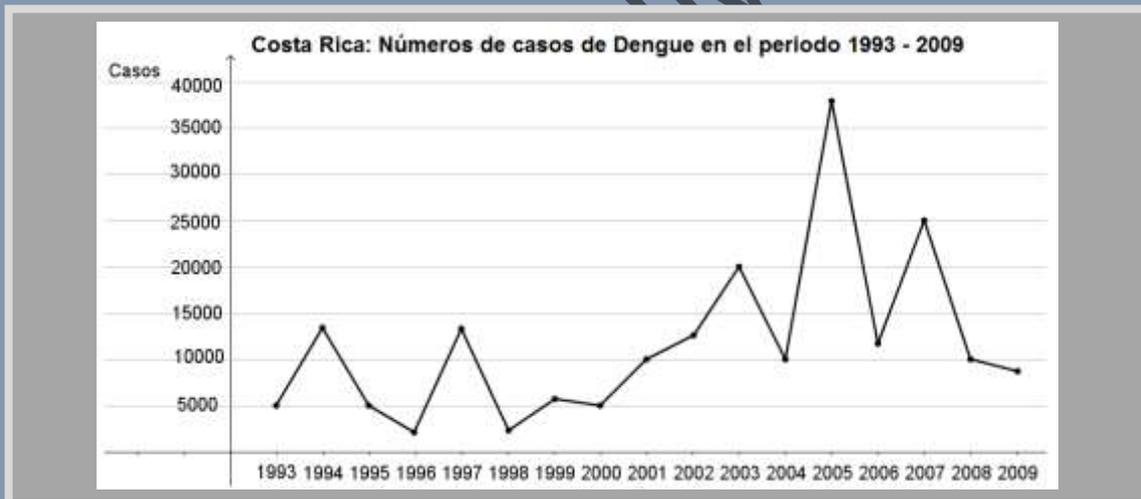
- 13) Considere las siguientes proposiciones

- I. Existen dos velocidades distintas para las cuales el costo es de ₡100.
- II. Si la velocidad del automóvil se duplica, entonces el costo también se duplica.

De ellas, con certeza son verdaderas

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) ninguna | (B) ambas |
| (C) solo la II | (D) solo la I |

Analice el siguiente escenario:



Fuente CCSS

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 14 y 15.

- 14) Un intervalo de tiempo, en el que los casos de Dengue decrecieron, corresponde a

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (A) [1996,1998] | (B) [2007,2008] |
| (C) [1994,1996] | (D) [2003,2005] |

- 15) El intervalo más largo de tiempo en el que creció el número de casos de Dengue corresponde a

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (A) [2002,2006] | (B) [1996,1997] |
| (C) [2000,2003] | (D) [1993,1997] |

- 16) El administrador de una fábrica que su ganancia en miles de colones semanales como función del número de x productos vendidos, está dada por la función $G(x) = -0,02x^2 + 16x - 1300$ ¿Cuántos artículos debe vender semanalmente para obtener la máxima ganancia?

--	--	--	--	--	--	--	--

Analice el siguiente escenario:

La función h dada por $h(t) = -4,9 t^2 + 7,5t$ permite calcular la altura "h" en metros, que alcanza un objeto en función del tiempo "t" en segundos, trascurrido desde su lanzamiento.

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 17 y 18

- 17) Desde su lanzamiento, ¿aproximadamente cuánto tiempo, en segundos, tarda el objeto en tocar el suelo?

- | | |
|----------|----------|
| (A) 1,53 | (B) 4,9 |
| (C) 7,5 | (D) 1,24 |

- 18) ¿Cuál es aproximadamente la altura máxima, en metros, que alcanza el objeto?

- | | |
|----------|----------|
| (A) 0,76 | (B) 2,86 |
| (C) 4,59 | (D) 1,53 |

- 19) Las ganancias "G" que obtiene una compañía en miles de colones según la inversión "x" en publicidad (en miles de colones) está dada por $G(x) = -3x^2 + 3000x$. Según esta información, considere:
- La ganancia máxima posible es de 750 000 colones
 - Si se invierte más de 1 000 000 de colones en publicidad, la compañía tendrá pérdidas.

De ellas, son verdaderas

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) ninguna | (B) ambas |
| (C) solo la II | (D) solo la I |

- 20) Cierta calmante, varía su efectividad "E" en el tiempo según el criterio $E(t) = -3t^2 + 18t$, donde "t" es el tiempo en horas. Según esta información, considere:
- El calmante tiene efectividad durante 6 horas
 - La máxima efectividad del calmante se logra a las 6 horas de haberse suministrado

De ellas, son verdaderas

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) ninguna | (B) ambas |
| (C) solo la II | (D) solo la I |

- 21) La función de costo total de una empresa está constituida por ₡1 860 000 mensuales fijos, más ₡1200 por cada unidad producida. Además la función de ingreso "I" en colones está modelada por $I(x) = 6000x$, donde "x" es la cantidad de artículos producidos y vendidos por mes. ¿Cuál es la **mínima** cantidad de unidades que deben venderse para tener alguna ganancia?

--	--	--	--	--	--	--

- 22) Una compañía telefónica tiene dos planes telefónicos para servicios móviles. En el primero se cobra una mensualidad de ₡3500 más ₡80 por cada minuto de llamadas nacionales. En el segundo plan, cobra ₡100 por minuto en llamada nacional más ₡3 100 fijos mensuales. Según esta información, considere las siguientes proposiciones:

- Si se realiza 20 minutos en llamadas nacionales en un mes, el monto a pagar en ambos planes es el mismo.
- Si una persona en promedio realiza 2 horas de llamadas nacionales al mes, le conviene utilizar el segundo plan.

De ellas, son verdaderas

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) ninguna | (B) ambas |
| (C) solo la II | (D) solo la I |

- 23) Una empresa adquiere el mismo día dos máquinas industriales. La máquina M a un costo de ₡ 7000 000 y la máquina N a ₡6 5000 000. Ambas máquinas se devalúan anualmente respecto al precio de adquisición en ₡ 800 000 y ₡550 000 respectivamente. ¿Cuántos años deben transcurrir para que M y N tengan el mismo valor?

 ,

- 24) Un comerciante fija los precios de la venta de sus artículos mediante una relación lineal, según el precio de compra. Así un pantalón que lo adquiere en ₡8 400, lo vende en ₡12 000, mientras que una camisa que la compra en ₡4 800, la vende en ₡6 000. ¿En cuánto compró una pantaloneta la cual vendió a un precio de ₡5000?

 ,

- 25) Una empresa paga ₡ 24 a otra compañía por etiquetar sus productos. Si la empresa produjera sus propias etiquetas, el costo en colones de producción "C" según la cantidad "x" de etiquetas estaría dado por $C(x) = 6x + 180\,000$. ¿Cuál es la cantidad mínima de etiquetas que debe utilizar la empresa, para que a partir de ella le sea rentable producir sus propias etiquetas?

- | | |
|-------------|------------|
| (A) 180 001 | (B) 2 250 |
| (C) 8001 | (D) 10 001 |

- 26) Con dos camiones A y B cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas. Se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó el camión B?

 ,

- 27) Para una actividad del colegio, se harán helados para vender. El costo por un helado tamaño regular es de ₡180 y por uno pequeño ₡120. Si se dispone de ₡18 000 y quieren hacer 140 helados, ¿cuántos helados de tamaño regular se podrán hacer?

- | | |
|---------|---------|
| (A) 40 | (B) 20 |
| (C) 120 | (D) 100 |

28) El costo de las entradas a una función de títeres es de ₡3000 para los adultos y ₡2000 para los niños. En una función asistieron 248 personas y se recaudaron ₡593 000. Según la información analice:

- I. La cantidad de adultos que asistieron no sobrepasó a 100
- II. Más de 150 niños asistieron a la función de títeres

De ellas, son verdaderas

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) ninguna | (B) ambas |
| (C) solo la II | (D) solo la I |

29) El perímetro de un rectángulo es de 40 metros. Si se duplica el largo del rectángulo y se aumenta en 6 metros el ancho, el perímetro queda en 76 metros. ¿Cuál es la medida original del ancho del rectángulo?

- | | |
|--------|--------|
| (A) 12 | (B) 8 |
| (C) 24 | (D) 16 |

30) El precio "P" de una computadora, en dólares (\$), está dado por $P(t) = 900 \cdot (0,6)^t$, donde "t" representa los años desde el momento en que el equipo salió al mercado. Con base en la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. El precio de un equipo nuevo es de \$900.
- II. Para que un equipo tenga un precio inferior a los \$70 deben transcurrir 5 años o más de haber salido al mercado.

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) ninguna | (B) ambas |
| (C) solo la II | (D) solo la I |

31) La población "P" de cierta bacteria se modela mediante la fórmula $P(t) = 2 \cdot (1,5)^t$ donde "t" representa el tiempo en horas. ¿Cuál es la población aproximada de bacterias a las 12 horas?

- | | |
|-------------|-------------|
| (A) 259 | (B) 36 |
| (C) 531 441 | (D) 265 720 |

- 32) Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 25mg y la función que asocia la cantidad de medicamento "M" es $M(t) = 25 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^t$ respecto al tiempo "t" en horas que ha estado el medicamento en el organismo ¿Cuántos miligramos de medicamento aproximadamente quedan el cuerpo al transcurrir 5 horas?

(A) 5	(B) 20
(C) 10	(D) 15

- 33) La presión atmosférica "P" sobre un avión que se encuentra a una altura "h" en kilómetros sobre el nivel del mar está dada por $P(h) = 765 \cdot e^{-0,148h}$. Si la presión atmosférica sobre el avión es de 83, ¿a qué altura aproximada en km se encuentra el avión sobre el nivel del mar en ese momento?

(A) 20	(B) 35,3
(C) 14,8	(D) 15

- 34) La función de interés compuesto que permite obtener el capital "C" después de "t" años de invertir un capital inicial de ₡250 000 a un interés del 6,5% capitalizable continuamente, está dada por $C(h) = 250\,000 \cdot e^{0,065t}$. ¿Cuántos años se requieren como mínimo si se dese obtener un capital superior a ₡420 510?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 35) La escala Richter "R" es usada para medir la magnitud de un terremoto, mediante la fórmula $R = \log L$, donde "L" es la intensidad de un terremoto en decibeles. En Costa Rica se registraron dos temblores muy sentidos por la población, uno de magnitud 6,1 y otro de 6,8 en la escala de Richter. ¿Cuál fue la diferencia aproximada, en decibeles, entre las intensidades de dichos sismos?

(A) 5	(B) 0,7
(C) 5 050 648	(D) 4 005 000

- 36) La relación entre el tiempo “t” en horas y el crecimiento de una población de “n” cantidad de bacterias, está dada por $\log_3\left(\frac{n}{k}\right) = t$, donde “k” es la población inicial de bacterias. Si la población inicial de bacterias es de 12, entonces ¿cuántas bacterias habrá en 4 horas?

<input type="text"/>					
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Analice el siguiente escenario:

Existen diversas escalas para medir la intensidad de los terremotos. La medida apropiada debería ser la energía liberada. Sin embargo esta medida se escapa de la noción intuitiva del desastre. El **terremoto de mayor intensidad** ha liberado una energía aproximada $2 \cdot 10^{17}$ joules, esto es exorbitantemente grande comparado con un ligero movimiento. Se ha convenido en estandarizar la energía por $E_0 = 10^{4,4}$ joules, que corresponde a la energía liberada por un leve movimiento. De esta forma la magnitud M en la escala de Richter se define como $M = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{10^{4,4}}\right)$ donde E es la energía liberada

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 39 y 40

- 37) ¿Cuál fue la magnitud en la escala de Richter del terremoto más intenso?

- | | |
|---------|---------|
| (A) 9,1 | (B) 8,6 |
| (C) 7,9 | (D) 7,4 |

- 38) ¿Cuántas veces aproximadamente es mayor la energía liberada por un sismo de magnitud 7,8 en la escala de Richter, en comparación con otro de magnitud 6,1?

- | | |
|-----------|----------|
| (A) 1,3 | (B) 25,6 |
| (C) 354,8 | (D) 55,4 |

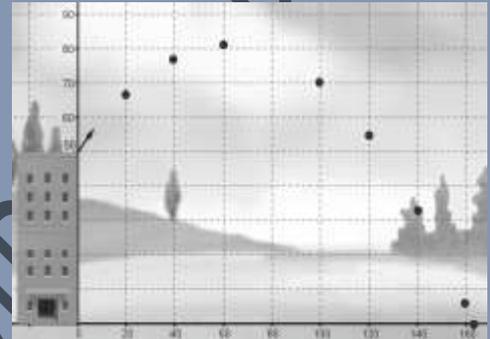
- 39) La función de demanda de un producto está dada por $p = \frac{5000}{\ln(x+1)}$ donde “p” es el precio en colones y “x” la cantidad de productos demandados. ¿Cuántos artículos aproximadamente serán demandados a un precio de ₡ 700?

- | | |
|---------|----------|
| (A) 763 | (B) 1264 |
| (C) 7 | (D) 35 |

- 4) Un agente de ventas de líneas telefónicas recibe un salario fijo de ₡ 375 000, más una comisión de ₡700 por línea vendida. De acuerdo con la información, el mejor modelo para representar la relación entre el salario del agente, según la cantidad de líneas vendidas corresponde a una función

- (A) lineal (B) cuadrática
(C) exponencial (D) logarítmica

- 5) Al lanzar un balón desde una altura de 50 metros, describe una trayectoria, tal como lo muestra la gráfica adjunta, donde se relaciona el tiempo en segundos, con la altura a la que se encuentra el balón.

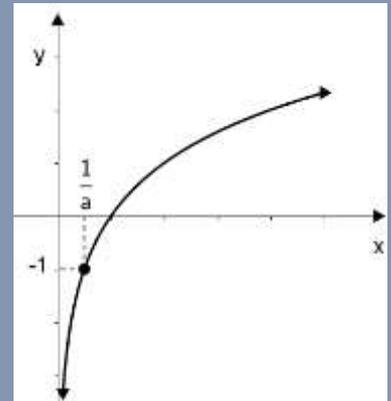


De acuerdo con la información, el mejor modelo para representar esta relación, corresponde a una función

- (A) lineal (B) cuadrática
(C) exponencial (D) logarítmica

- 6) La gráfica adjunta, representa una función f . Según la información proporcionada, el criterio que mejor se ajusta a la función corresponde a

- (A) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ (B) $f(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$, $a > 0, a \neq 1$
(C) $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ (D) $f(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$



- 7) La dosis "D" en miligramos, de un medicamento para un tipo de perro, está relacionada con la masa corporal "m" del mismo, dada en kilogramo. Un veterinario tiene una tabla que le permite saber cuál debe ser esa dosis:

m	2	4	6	8
D	8	14	20	26

De acuerdo con la información anterior, el criterio de f corresponde a

- (A) $f(m) = 2^{3m}$ (B) $f(m) = m^2 + 2m$
(C) $f(m) = 2 + 3m$ (D) $f(m) = \log_{\sqrt[3]{2}} m$

- 8) Considere la siguiente tabla referente a una función f

x	1	2	3	4
$f(x)$	15	75	375	1875

De acuerdo con la información anterior, el criterio de f corresponde a

- (A) $f(x) = 5x + 10$ (B) $f(x) = 3 \cdot 5^x$
 (C) $f(x) = 5x^2 + 8x + 2$ (D) $f(x) = 15 + \log_5 x$

- 9) Considere la siguiente información: Una empresa, calcula sus ganancias en colones, según el monto que invierte en publicidad. Algunos datos se resumen en la siguiente tabla

Inversión en publicidad	Ganancia en colones
₡0	0
₡500	19 500
₡1 000	38 000
₡10 000	200 000

De acuerdo con la información anterior, la ganancia G en colones, según la inversión publicitaria P , en colones, puede modelarse mediante la función dada por

- (A) $G(P) = 19 \cdot P + 10 000$ (B) $G(P) = 19 500 \cdot 2^P$
 (C) $G(P) = \frac{-P^2}{500} + 40 \cdot P$ (D) $G(P) = 38 000 \cdot \log(P)$

- 10) En un estudio sobre crecimiento de poblaciones, se consideran a 50 individuos como población inicial. Se observa que la población se cuadruplica cada cinco días. Algunos de los datos de ese crecimiento se muestran en la tabla siguiente.

Días	0	5	10	15	20	25
Cantidad de individuos	50	200	800	3200	12800	51200

De acuerdo con la información anterior, el modelo que mejor se adapta para describir el número de individuos " P ", según la cantidad de días transcurridos " d ", corresponde a una función cuyo criterio es

- (A) $P(d) = 50 \cdot 4^{\frac{d}{5}}$ (B) $P(d) = \frac{4 \cdot d + 50}{5}$
 (C) $P(d) = \frac{4d^2}{5} + 50 \cdot d$ (D) $P(d) = 50 \cdot \log_4(5d)$

- 11) En el dibujo adjunto, la altura del balón, con respecto al tiempo, puede modelarse mediante una función

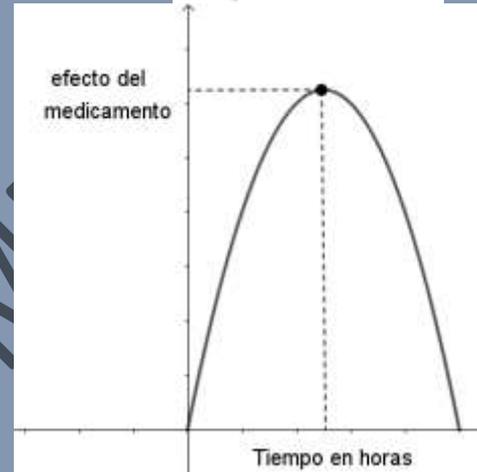
(A) lineal (B) exponencial
(C) cuadrática (D) logarítmica



- 12) La gráfica adjunta, presenta el efecto que tiene un medicamento en el organismo según el tiempo que transcurre desde el momento que se aplica.

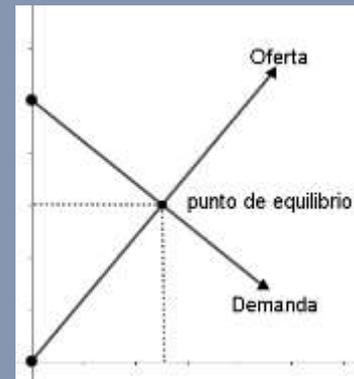
La función que mejor modela este fenómeno es

(A) exponencial (B) lineal
(C) logarítmica (D) cuadrática



- 13) El punto de equilibrio entre la oferta y la demanda, puede visualizarse mediante la intersección de ambas gráficas, tal como se aprecia en la representación adjunta. Según la información proporcionada, las relaciones de oferta y demanda se pueden modelar mediante funciones

(A) exponenciales (B) lineales
(C) logarítmicas (D) cuadráticas



ESTADÍSTICA



MUESTRA

Conocimientos:

Medidas de
variabilidad y
diagrama de
cajas

**Habilidades:**

1. Identificar la importancia de la variabilidad para el análisis de datos.
2. Reconocer la importancia de la variabilidad de los datos dentro de los análisis estadísticos y la necesidad de cuantificarla.
3. Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido, el recorrido intercuartílico, la variancia o la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.
4. Utilizar diagramas de cajas para comparar la posición y la variabilidad de dos grupos de datos.
5. Emplear la calculadora o la computadora para simplificar los cálculos matemáticos en la determinación de las medidas de variabilidad.
6. Resolver problemas del contexto estudiantil que involucren el análisis de las medidas de variabilidad.

Estadística

• **Variabilidad**

La variabilidad es el nombre que reciben las diferencias en el comportamiento de un fenómeno observable que se repite bajo iguales condiciones. Estas diferencias pueden ser casi imperceptibles, como en el caso de experimentos de laboratorio, donde hay un alto grado de control sobre los factores que influyen sobre el fenómeno; y pueden ser grandes, como en el caso de fenómenos en que está involucrado el comportamiento humano.

Las medidas de dispersión o variabilidad son útiles porque proporcionan información que permite juzgar la confiabilidad de la medida de tendencia central. Si los datos están muy dispersos, la posición central es menos representativa de los datos, como un todo, que cuando estos se agrupan más estrechamente alrededor de ella.

Seguidamente, se explican algunas medidas de variabilidad más utilizadas.

Definición • Recorrido

Es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de un conjunto de datos. Aunque esta medida es un referente de variabilidad, no es una buena medida debido a que depende exclusivamente de los valores extremos. Si uno de ellos (máximo o mínimo) se comporta muy diferente al resto de las observaciones, entonces el recorrido tiende a sobredimensionar la variabilidad de los datos.

Definición • Recorrido Intercuartílico

Esta medida corresponde a la diferencia entre el tercer y el primer cuartil, es decir corresponde al rango de variabilidad de 50% de los valores centrales. Aunque esta medida es mucho más precisa que el recorrido total pues elimina la influencia de los valores extremos, para mayor precisión se requiere de una medida que utilice para su cálculo todos los datos del conjunto.

Definición • Varianza

La varianza es un indicador estadístico de medida de dispersión, es decir, mide la cantidad de variación de una variable estadística. Es equivalente a la suma de los cuadrados de las diferencias de los datos y de una lista con respecto a su media y dividida por el número de datos n . Usualmente se representa con el símbolo σ^2

$$\sigma^2 = \begin{cases} \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} & \text{si los datos conforman toda la población} \\ \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1} & \text{si los datos conforman una muestra} \end{cases}$$

Cuando se desean comparar dos grupos de una misma naturaleza, va a ser más variable aquel que tenga una mayor varianza.

Definición • Desviación estándar

Como la varianza está constituida por la suma de cuadrados de las desviaciones, las unidades de medida que tienen los datos quedan al cuadrado; para simplificar esto se acostumbra obtener la raíz cuadrada de la varianza. Esa nueva medida, se llama desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$. Entre más grandes sean los valores que tome la desviación estándar, mayor será la variabilidad del conjunto de datos. Indica cuánto pueden alejarse los valores respecto al promedio (media).



Ejemplo 1

La administración de un colegio está preocupada por el rendimiento de un grupo de estudiantes en el I parcial de Estudios Sociales, pues el promedio del grupo fue de 63,8.

Estas fueron sus notas

72 60 65 18 76 73 70 60 74 70

Un estudiante, en defensa del grupo, aclaró que ese promedio no refleja el rendimiento de la mayoría, puesto que existe una nota muy baja, de un compañero que no estudió para la prueba porque se iría a vivir a otro país.

Realice un análisis de variabilidad tomando en cuenta todas las notas, y luego otro, en el que se elimina la nota más baja.

Recorrido	$76 - 18 = 58$
Primer Cuartil	$P_1 = 1 \cdot \frac{10+1}{4} = 2,75$ $Q_1 = 60 + 0,75(60 - 60) = 60$
Tercer cuartil	$P_3 = 3 \cdot \frac{10+1}{4} = 8,25$ $Q_3 = 73 + 0,25(74 - 73) = 73,25$
Recorrido intercuartílico	$73,25 - 60 = 13,25$
Promedio	$\frac{72 + 60 + 65 + 18 + 76 + 73 + 60 + 74 + 70}{10} = 63,8$

Cálculo de varianza		
Notas	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
18	$18 - 63,8 = -45,8$	2097,64
60	$60 - 63,8 = -3,8$	14,44
60	$60 - 63,8 = -3,8$	14,44
65	$65 - 63,8 = 1,2$	1,44
70	$70 - 63,8 = 6,2$	38,44
70	$70 - 63,8 = 6,2$	38,44
72	$72 - 63,8 = 8,2$	67,24
73	$73 - 63,8 = 9,2$	84,64
74	$74 - 63,8 = 10,2$	104,04
76	$76 - 63,8 = 12,2$	148,84
		TOTAL = 2609,6

De este modo la varianza es $\sigma^2 = \frac{2609,6}{10-1} = 289,95$ y la desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{289,95} \approx 17,02$$

Esta desviación estándar es considerada muy grande y puede deberse a la nota atípica del estudiante que se iría del país. Se puede pensar en eliminar ese dato y repetir el cálculo.

El recorrido indica que las calificaciones se dispersan en un rango de 58

El recorrido intercuartílico expresa que el 50% de las notas centrales se dispersan en un rango de 13,25

Análisis eliminando la nota más baja

Para este caso, usaremos la calculadora científica.

Para ingresar al modo estadístico se presiona

MODE **3**



Para ingresar los datos se usa **SHIFT** **1** con lo que se despliega un menú de funciones estadísticas. Se escoge 2: Data.

Aparecerá una tabla, en la cual se van colocando los datos. Cada vez que se va a agregar un nuevo dato, se presiona la tecla **=**

En este caso introduciremos los 9 valores:

72	60	65	76	73	70	60	74	70
----	----	----	----	----	----	----	----	----

Para obtener el promedio se sigue los siguientes pasos:

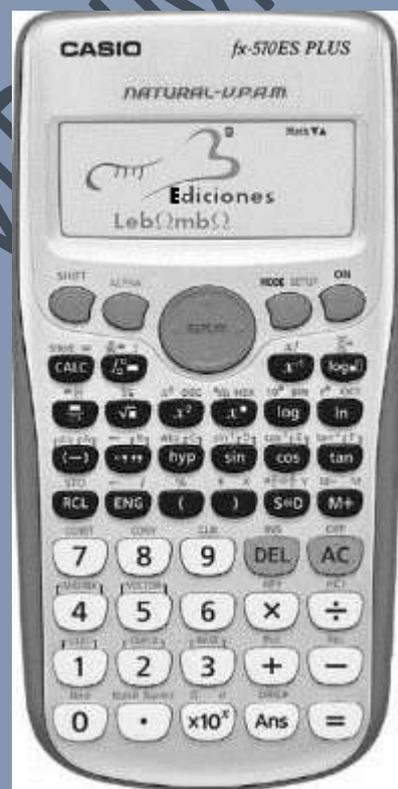
SHIFT **1** → **4: Var** **2: \bar{x}**

Así se obtiene que la media es de 68,8. Este es un promedio mucho mejor, puesto que se ha eliminado la nota más baja.

Para la desviación estándar, se sigue: **SHIFT** **1** → **4: Var** **4: s_x**

En este caso la desviación estándar bajó considerablemente a 5,90. Al eliminar el 18 de calificación, los datos restantes muestran más concentración alrededor de la media.

Por tanto la defensa del estudiante parece que sí tiene un buen sustento estadístico.



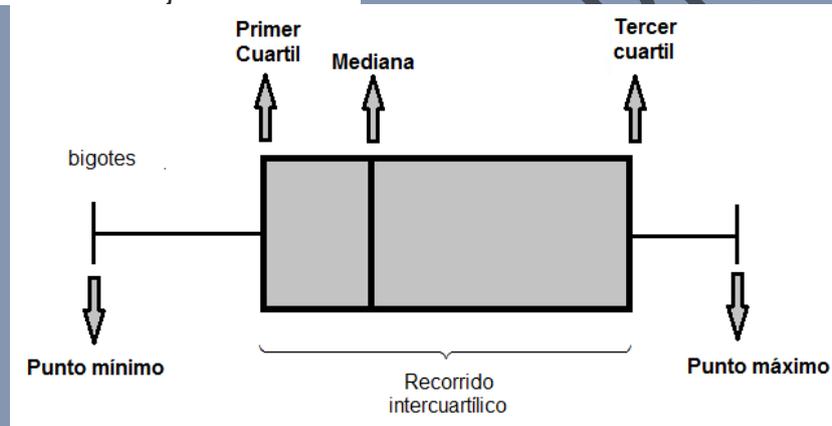
• Diagrama de cajas

Un diagrama de cajas o bigotes, es un gráfico que se utiliza para visualizar el comportamiento de un conjunto de datos, correspondientes a una variable cuantitativa. Mediante la ubicación de cuartiles, se describe cómo es la distribución, su grado de asimetría, los valores extremos y la posición de la mediana.

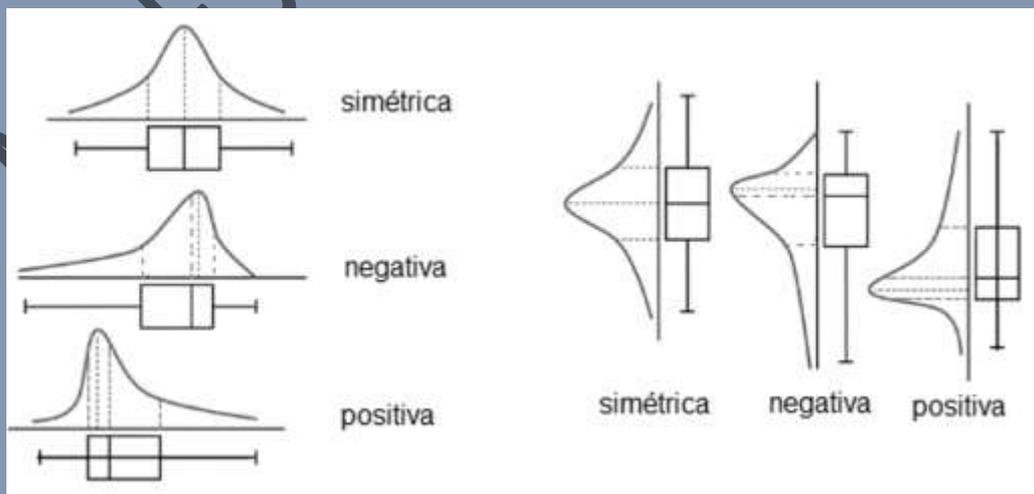
El diagrama consta de una caja que se inicia con el primer cuartil y termina en el tercero por lo que la magnitud de la caja representa el rango o recorrido intercuartílico.

La línea que atraviesa la caja es la mediana.

Las líneas que sobresalen de la caja (bigotes), se extienden desde el mínimo y hasta el máximo valor del conjunto de datos.



En la figura se muestran ejemplos de diagramas de cajas, según la asimetría de los datos



Escenario de aprendizaje

Una compañía que ofrece servicios de Internet, desea hacer un estudio sobre uso de redes sociales. Para iniciar, se consulta a dos grupos de estudiantes sobre la cantidad de horas que acceden a Internet por semana.

La idea, es trabajar con aquel grupo que presente menos variabilidad y que tenga mayor acceso a Internet

Grupo A

2	5	1	10	4	15	9	13	8	6	5	6	4	17	9	8	11	11	7	6	9	7	10	10	5	6	8	7	6	9
---	---	---	----	---	----	---	----	---	---	---	---	---	----	---	---	----	----	---	---	---	---	----	----	---	---	---	---	---	---

Grupo B

1	4	2	7	7	3	9	5	2	4	8	5	2	5	1	3	8	2	9	3	22	14	1	18	2	3	2	20	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	---	----	---	---	---	----	---	---

Determine cuál grupo presenta menos variabilidad.

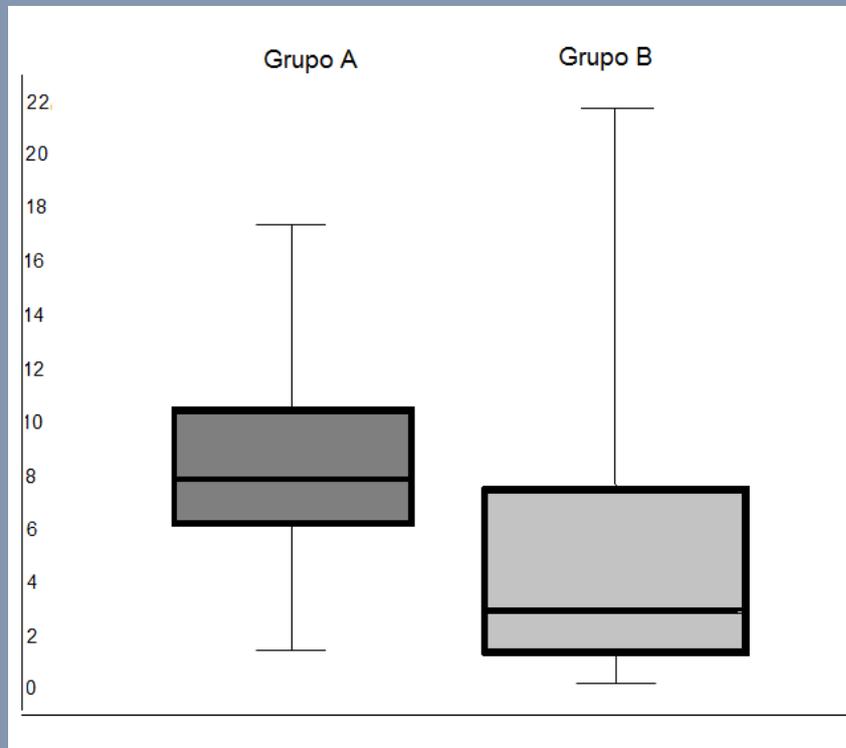
Con guía del docente, analice el diagrama de cajas que resume la variabilidad de datos.

Algunas medidas estadísticas que resumen los datos son las siguientes:

	Grupo A	Grupo B
Promedio	7,8	5,8
Varianza	12,23	32,62
Desviación Estándar	3,5	5,71
Máximo	17	22
Mínimo	1	1
Mediana	7,5	3,5
Cuartil 1	5,75	2
Cuartil 3	10	8

Si se analizan estas medidas de tendencia y dispersión se evidencia que el grupo A presenta menos variabilidad que el grupo B.

Esta información en diagramas de cajas se representa de la siguiente manera:



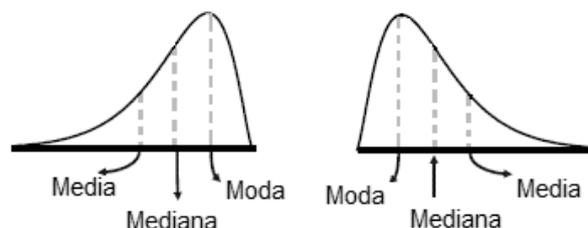
[Diagrama realizado online en <http://www.alcula.com/es/calculadoras/estadistica/diagrama-de-caja/> y modificado por el autor]

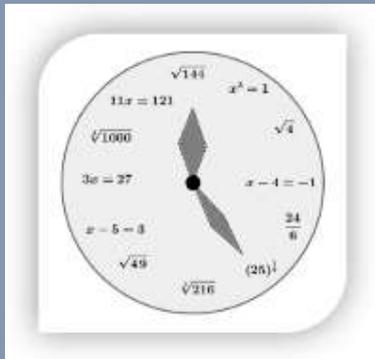
Se puede visualizar que el grupo B presenta mucha más variabilidad en comparación al grupo A. Por ejemplo, en el grupo B, del percentil 3 al valor máximo, hay cerca de 14 horas de diferencia. También se puede destacar que los cuartiles en ambos grupos presentan bastantes diferencias.

La cantidad de horas que usan Internet los estudiantes del grupo A, se concentran entre 6 y 10 aproximadamente. A pesar de que hay valores máximos en el grupo B que superan al grupo A, estos son datos aislados que no representan la tendencia de la totalidad de los datos.

Conviene que el estudio se realice con el grupo A.

Recuerde





Tiempo para practicar 2.1

1) El profesor de Biología desea hacer un estudio comparativo con respecto al rendimiento de los estudiantes de las secciones 10-1 y 10-3. En ambos grupos hay 22 estudiantes.

Sección 10 -1

70	65	92	84	80	42	77	65	70	30	80
84	72	88	80	96	54	86	40	86	80	72

Sección 10 -3

70	52	78	56	62	92	88	82	72	86	76
80	50	60	54	74	58	64	90	84	94	66

(a) Complete el cuadro con lo que se solicita

	Calificaciones	
	Sección 10 -1	Sección 10-3
Media		
Valor máximo		
Valor mínimo		
Recorrido		
Cuartil 1		
Mediana		
Cuartil 3		
Recorrido intercuartílico		
Varianza		
Desviación estándar		

(b) ¿Cuál grupo presenta menos variabilidad? Justifique.

2) El tiempo de espera aproximado en minutos (lapso que transcurre desde la hora en la que se le asignó la cita al paciente y el momento en que se le atiende), en un EBAIS del país, fue resumido a través de la información adjunta.

Promedio	34
Varianza	16,8
Máximo	92
Recorrido	84
Cuartil 1	36
Cuartil 3	64

Determine.

- (a) Desviación estándar
- (b) Valor mínimo
- (c) Recorrido intercuartílico

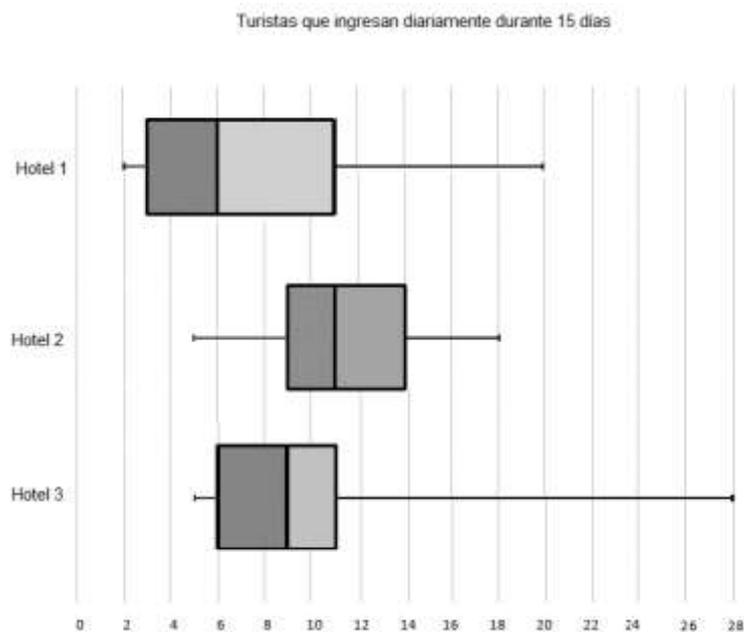
(d) Según la información anterior, indique cuáles proposiciones son verdaderas

La hora de espera varía en un rango de aproximadamente 17 minutos con respecto al promedio.

La mayoría de pacientes tuvieron un tiempo de espera de 34 minutos.

Ningún paciente tuvo que esperar más de hora y media para ser atendido

3) Una empresa que vende paquetes turísticos desea establecer un *stand* para promocionar diversas actividades. Para ello indagan en 3 hoteles sobre la cantidad de turistas que ingresan diariamente, durante 15 días. La información está resumida en el diagrama de cajas.



(a) De acuerdo con los datos proporcionados, complete con la información que se le solicita.

	Turistas que ingresan diariamente		
	Hotel A	Hotel B	Hotel C
Cuartil 1			
Cuartil 3			
Mediana			
Recorrido intercuartílico			
Recorrido			

- (b) ¿Cuál hotel representa la asimetría positiva más marcada?
- (c) ¿Cuál hotel alcanzó el número de ingresos mayor en un día? ¿Se puede asegurar que ese hotel obtuvo el mayor promedio de ingresos de turistas?
- (d) Si la compañía desea instalar su *Stand* en el hotel que mantenga menor variación con respecto al número de ingresos diarios de turistas, ¿cuál hotel escogería?

(e) Según la información dada, indique cuáles proposiciones son verdaderas

- En el 25 % de los días, el ingreso en el Hotel 3 fue menor o igual a 6 personas.
- Los ingresos diarios de turistas, comprendidos entre el 25% y 50% de los días, fueron más dispersos para el Hotel 3 que para el Hotel 1
- El 50% de los días, el número de ingresos en el Hotel 2 es de 11 turistas o más.
- Los valores extremos más distantes, se presentan en el Hotel 3, por tanto es donde hay mayor concentración de datos.
- Durante los 15 días, al menos hubo dos nuevos ingresos de turistas en cada hotel.
- En el Hotel 1, el 25% de los días hubo un ingreso de turistas mayor o igual a 11, mientras que en el Hotel 3, fue el 50% de las veces que el ingreso igualó o superó los 11 turistas diarios.

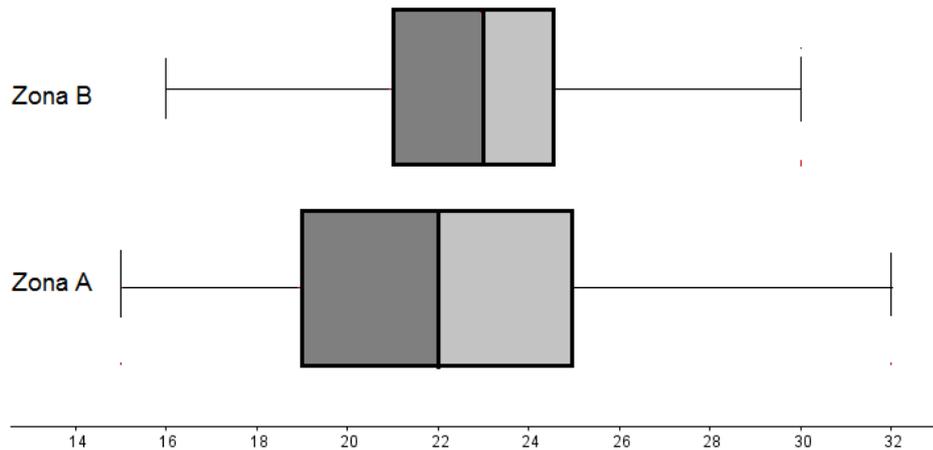
- 4) Una familia desea hacer un tour al avistamiento de ballenas en el Pacífico Sur de Costa Rica en el séptimo fin de semana, para lo cual busca información de tres compañías que han prestado el servicio en los 6 fines de semana anteriores.

- (a) Determine la desviación estándar para cada compañía.
- (b) Si la familia decide contratar la compañía que presenta menor variabilidad, ¿cuál escogerían?

Compañía Ballenas por fin de semana	A	B	C
Primer fin de semana	6	5	5
Segundo fin de semana	7	8	8
Tercer fin de semana	9	9	9
Cuarto fin de semana	5	7	8
Quinto fin de semana	8	10	8
Sexto fin de semana	12	7	7

- 5) Un empresario agrícola tiene dos opciones de compra de terrenos para cultivar una especie de planta ornamental, la cual es muy delicada con respecto a la variación de la temperatura. Por ello, pide un registro de las temperaturas promedio en grados Celsius mensuales durante dos años, con el fin de establecer una comparación.

La información se presenta en los siguientes diagramas de cajas.



- (a) ¿En cuál zona le conviene cultivar la planta ornamental?
- (b) Determine, de modo aproximado el recorrido intercuartílico de cada zona.
- (c) Según la información dada, indique cuáles proposiciones son verdaderas

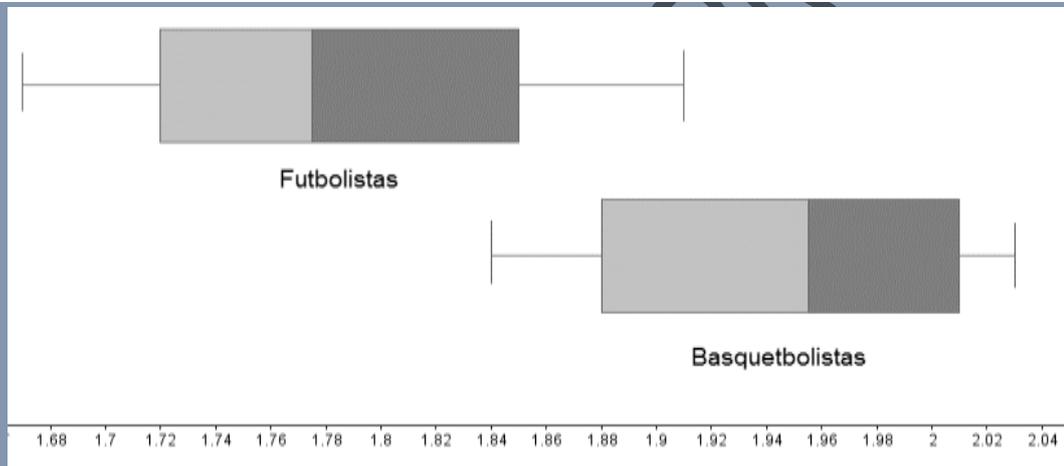
- Las temperaturas muestreadas en la zona B se dispersan en un rango de 14°C
- En la ciudad A el 50% de los datos centrales se dispersan en un rango de 17°C
- El 50% de las temperaturas muestreadas en la zona A fueron mayores o iguales a 22°C
- La diferencia entre la temperatura promedio máxima de la zona A con respecto a la zona B fue de 2°C
- La asimetría que presenta la zona A es negativa

- 6) En la tabla, se presenta la estatura de 20 deportistas, 10 que practican fútbol y otros 10 que juegan baloncesto.

Futbolista	1,86	1,73	1,75	1,69	1,91	1,83	1,80	1,85	1,67	1,72
Basquetbolista	1,95	2,01	1,94	1,84	2,02	1,88	2,03	1,98	1,84	1,96

- (a) Determine la desviación estándar correspondiente a la estatura de ambos grupos de deportistas.
- (b) ¿Existe una diferencia considerable entre la variabilidad de los datos de ambos grupos?

El diagrama de cajas que representa los datos es el siguiente:

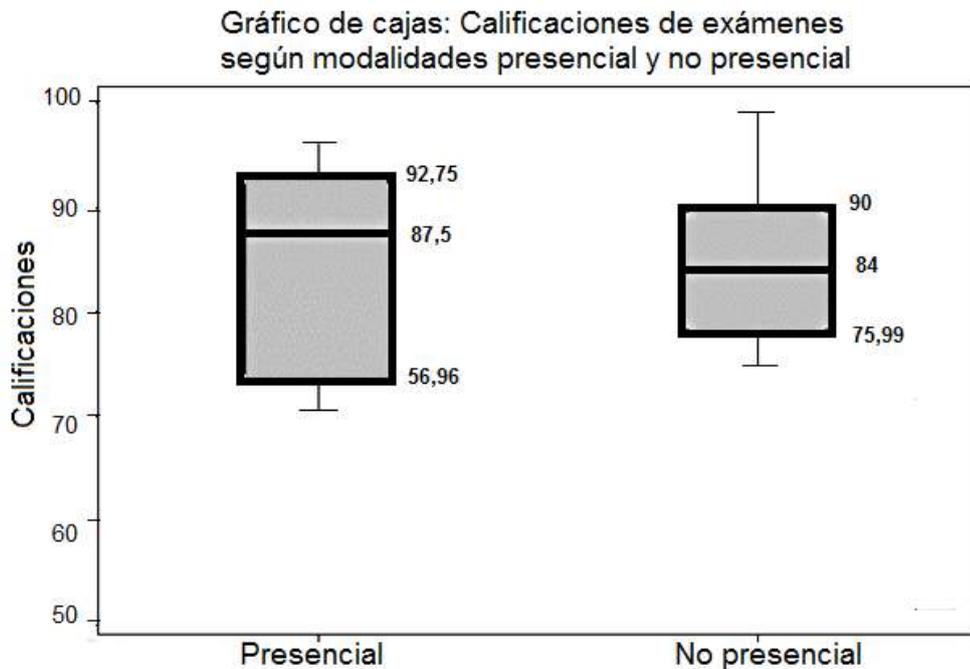


- (c) Según la información dada, indique cuáles proposiciones son verdaderas y cuáles falsas

- El tercer cuartil del grupo de futbolistas es menor que el primer cuartil del grupo de basquetbolistas.
- La diferencia entre el basquetbolista más alto y el futbolista más bajo, es de poco más de 30 cm.
- El 50% de las estaturas de los futbolistas se ubican entre 1,72m y 1,85
- El valor de la mediana de las estaturas de los basquetbolistas es menor que la mayor estatura de los futbolistas.
- La distribución de estaturas de los futbolistas presenta una leve asimetría positiva

- 7) En la actualidad, está tomando fuerza las modalidades virtuales de estudio, sin embargo existen muchas interrogantes acerca de si la formación no presencial aporta los mismos beneficios que la formación presencial. Para comprobar lo anterior, un investigador aplica el mismo examen a 62 estudiantes del sistema presencial y a 62 estudiantes del sistema no presencial y compara las notas obtenidas en el examen.

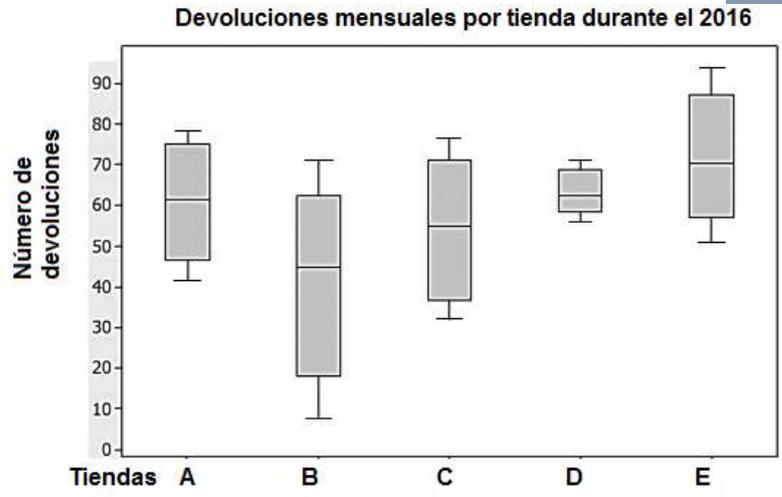
El investigador resume los datos (notas obtenidas) de ambos grupos en diagramas de caja, como se ven a continuación.



Conteste las siguientes preguntas:

- (a) ¿En cuál de las dos modalidades el 50% de los alumnos tienen mejor nota?
- (b) El 75% de los alumnos de la Modalidad Virtual obtiene notas mayores al siguiente valor _____
- (c) La modalidad donde las notas variaron **más** corresponde _____
- (d) El 25% de los alumnos de la Modalidad Presencial obtiene notas menores al siguiente valor _____

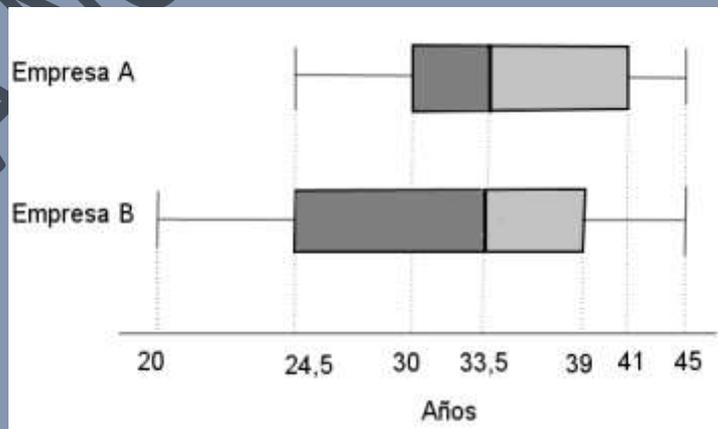
8) El siguiente gráfico de caja muestra la cantidad de devoluciones mensuales que recibieron 5 tiendas de componentes electrónicos durante un año. La eficiencia de las tiendas se mide según la cantidad de devoluciones. Evidentemente, entre menos devoluciones se reciban, es mejor.



Responda las siguientes preguntas referentes a las gráficas anteriores

- (a) ¿Cuál es la tienda que es menos variable en cuanto a las devoluciones?
- (b) ¿Cuál tienda tiene la mediana más alta?
- (c) Como la tienda B fue la que obtuvo en un mes la menor cantidad de devoluciones, ¿se podrá concluir que es la tienda más eficiente? Justifique.

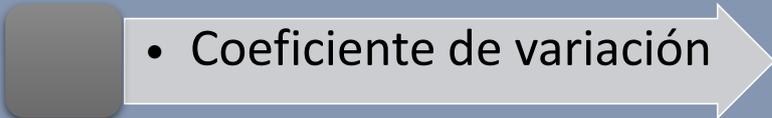
9) El siguiente diagrama de cajas representa información de un estudio acerca de la edad, en años, de trabajadores de dos empresas. Según la información dada, indique cuáles proposiciones son verdaderas y cuáles falsas



- _____ En ambas empresas al menos un 50% de sus empleados tienen 30 años o más.
- _____ El recorrido intercuartílico de las edades de los trabajadores de la empresa A es mayor que el de los empleados de la empresa B
- _____ Un 25% de los empleados de la empresa A tiene 41 años o más.
- _____ Entre los empleados de ambas empresas, el de menor edad es de la empresa B

Conocimientos:**Medidas
relativas****Habilidades:**

6. Reconocer la importancia de emplear medidas relativas al comparar la posición o la variabilidad entre dos o más grupos de datos.
7. Aplicar estandarización y el coeficiente de variación para comparar la posición y variabilidad de dos o más grupos de datos.


• Coeficiente de variación

Es una medida que se utiliza para comparar la variabilidad que presentan dos o más grupos de datos tomados de contextos distintos, para los cuales hay diferencias por magnitud, unidad de medida o ambas. El objetivo de esta medida es eliminar los efectos de dichas diferencias.

Se obtiene mediante la fórmula:
$$\frac{\text{Desviación estándar}}{\text{Promedio}} \cdot 100$$

Normalmente se multiplica por 100, para darle un enfoque porcentual a la medida, aunque debe quedar claro que esta medida no representa un porcentaje como tal.

**Ejemplo 1**

Los dueño del local *Amanecer*, revisa el consumo de electricidad y agua durante el 2016. La información se resume en la siguiente tabla

Consumo	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Set	Oct	Nov	Dic
Electricidad en Kwh	285	264	230	214	201	264	293	189	192	209	256	300
Agua en m ³	21	24	27	20	26	22	31	28	23	19	23	32

¿Dónde hubo más variabilidad, en el consumo de electricidad o de agua?

Primero, obtengamos algunas medidas estadísticas que nos ayuden a hacer las respectivas comparaciones

	Promedio	Desviación Estándar
Electricidad en Kwh	241,41	40,43
Agua en m ³	24,66	4,18

Ahora bien, como se está trabajando con magnitudes diferentes, es necesario determinar el coeficiente de variación para ambos casos:

	Coeficiente de variación
Electricidad en Kwh	$\frac{40,43}{241,41} \cdot 100 \approx 16,74$
Agua en m ³	$\frac{4,18}{24,66} \cdot 100 \approx 16,95$

Note que los conjuntos tienen una variabilidad relativa muy similar, levemente más homogéneo el consumo de electricidad. Esto era complicado determinarlo solo analizando la desviación estándar de cada conjunto de datos.

• Estandarización o tipificación de medidas

Cuando se efectúan comparaciones en cuanto a la posición que tienen dos o más valores ubicados en contextos diferentes, se debe eliminar el efecto del contexto.

Una forma de hacerlo consiste en estandarizar los datos mediante la fórmula:

$$\frac{\text{dato} - \text{promedio}}{\text{desviación estándar}}$$



Ejemplo 2

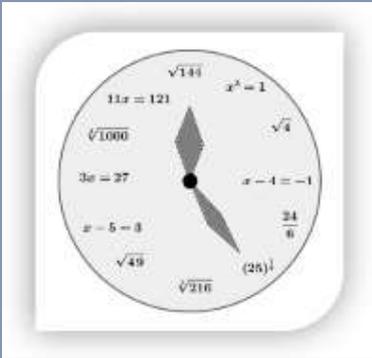
El dueño del local *Amanecer* desea comparar el consumo de Kwh en el mes de enero del 2017, con su amigo, que también tiene una tienda de la misma línea de mercadería, llamada *Crisol*. La idea es verificar si existe algún cambio significativo luego de pasadas las fiestas de fin de año.

El dueño de *Crisol* le comenta que el consumo eléctrico bajó considerablemente en enero, al llegar a 200 Kwh. Sin embargo, el dueño de *Amanecer* está seguro de que su ahorro fue mucho mayor, a pesar de tener un consumo de 216 Kwh. Si la desviación estándar y el promedio durante el año anterior en el local *Crisol* fueron de 38,2 Kwh y 221,34 Kwh respectivamente y en *Amanecer* 40,43 Kwh la desviación estándar y 241,41Kwh el promedio. ¿Cuál tienda tuvo un mayor ahorro relativo en enero del 2017?

Para realizar estas comparaciones es necesario analizar los promedios y desviaciones estándar del año anterior en ambas tiendas, de modo que se pueda estandarizar los datos proporcionados.

	Estandarización, consumo de electricidad en enero 2017
Amanecer	$\frac{216 - 241,41}{40,43} \approx -0,62$
Crisol	$\frac{200 - 221,34}{38,2} \approx -0,55$

Al obtener cantidades negativas en ambos casos, significa que tanto la tienda *Amanecer* como *Crisol* efectivamente presentaron una disminución en el consumo de electricidad, en comparación con el promedio y desviación estándar reportados del año anterior. Además, quien obtuvo un mayor ahorro fue la tienda *Amanecer*.



Determine:

- (a) Los coeficientes de variación para cada uno de los grupos.
 (b) ¿Cuál grupo presenta menos variabilidad relativa?
- 2) En la semana de estreno de una película de suspenso, se habilitan 3 salas de cine con la misma capacidad, en dos diferentes centros comerciales del país. La tabla muestra el promedio y desviación estándar diarios relacionados al número de personas que asistieron en esa semana a ver la película.

	Centro comercial 1	Centro comercial 2
Desviación estándar	5,19	4,58
Promedio	225	198

Determine:

- (a) Los coeficientes de variación para cada centro comercial.
 (b) ¿Cuál centro comercial presenta más variabilidad relativa?
- 3) A continuación se presenta las estadísticas del MEP relacionadas con la deserción estudiantil entre los años 2001 y 2006, tanto en séptimo como en undécimo nivel. [Número de estudiantes que abandonaron los estudios formales]

	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Séptimo	16 960	17 790	15 775	17 310	19 336	20 038
Undécimo	1 115	1 233	1 083	1 123	1 485	1 609

Según la información proporcionada, determine:

- (a) Los coeficientes de variación para cada nivel.
 (b) ¿Cuál nivel presenta menos variabilidad relativa con respecto a la deserción estudiantil?
 (c) En el 2007, la deserción en séptimo nivel fue de 20 128 estudiantes, mientras que en undécimo llegó a 1 575. ¿En cuál nivel hubo un mayor incremento relativo de deserción estudiantil ese año?

Tiempo para practicar 2.2

1) El profesor de Matemática de un colegio técnico desea hacer un estudio comparativo con respecto al rendimiento de los estudiantes en las materias de Informática y Logística. Los datos se resumen en la siguiente tabla

	Informática	Logística
Varianza	24,15	22,18
Promedio	88,22	87,01

- 4) El salario en miles de colones de 10 trabajadores de dos compañías se detallan en la siguiente tabla:

Compañía A	520	486	965	508	302	786	345	764	486	486
Compañía B	975	800	306	428	387	387	310	510	803	459

Según la información proporcionada, determine:

- (a) Los coeficientes de variación para cada compañía.
- (b) ¿Cuál compañía presenta mayor variabilidad relativa en la asignación de salarios?
- 5) Tres departamentos de una empresa fabrican diferentes componentes electrónicos. Durante el 2016, se obtuvo las siguientes estadísticas de producción mensual:

	Departamento A	Departamento B	Departamento C
Promedio	12 764,4	1 098,5	5 017,3
Desviación estándar	608,3	200,7	98,1

Según la información proporcionada, determine:

- (a) Los coeficientes de variación para cada departamento.
- (b) ¿Cuál departamento presenta mayor variabilidad relativa con respecto a la cantidad de unidades producidas?
- (c) En el mes de enero del 2017, las producciones generadas en los tres departamentos fueron las siguientes.

Departamento A	Departamento B	Departamento C
11 549	976	4 997

En términos relativos, ¿en cuál de estas empresas la producción durante el mes de enero del 2016 fue mayor?

- 6) Dos amigos cursan undécimo nivel en diferentes instituciones, uno estudia en Limón, mientras que el otro en San José. En marzo realizaron el I examen parcial de Matemática del I trimestre. En el colegio de Limón, el promedio de calificaciones fue 82,6 con una desviación estándar de 11,2; mientras que en el liceo de San José, el promedio fue de 74,2 con desviación estándar de 15,3.

El estudiante de Limón obtuvo un 80 y el de San José un 78 en dicho examen de Matemática. En términos relativos, ¿cuál estudiante obtuvo la nota mayor?

- 7) La estatura promedio de los hombres en India es de 165,3 cm con una desviación estándar de 8,7 cm; mientras que en Alemania el promedio es de 180cm, con una desviación estándar de 12,2 cm [Considere que estos datos son para varones mayores de 19 años]. Un habitante de India mide 164 y un alemán 178cm. En términos relativos, ¿quién tiene mayor estatura según su país de origen?
- 8) En un circuito educativo del MEP se desea seleccionar a un estudiante de undécimo nivel para que compita en un concurso académico a nivel regional. Para ellos se proporciona al equipo de jueces la información de cuatro estudiantes con mejores promedios, cada uno de un distinto centro educativo del circuito. Se decide seleccionar al estudiante con mejor promedio relativo durante el trimestre anterior. La información se resume en la siguiente tabla.

Estudiante	Promedio trimestral del estudiante	Promedio en undécimo nivel	Desviación estándar
Beltrán	93,8	78,4	5,3
Atilana	94,4	87,3	4,2
Cándida	91,3	81,5	2,1
Beregiso	96,8	83,7	3,6

¿Cuál estudiante será seleccionado para la competencia académica?

- 9) La siguiente tabla muestra datos relacionados sobre las puntuaciones obtenidas por los estudiantes en la prueba de Química de Bachillerato [Los datos presentan una situación ficticia]

- El estudiante A obtuvo 74 puntos en el examen de Química en el 2015.
- El estudiante B obtuvo 67 puntos el examen de Química en el 2016.
- El estudiante C obtuvo 63 puntos el examen de Química en el del 2017.

Año	Media aritmética	Desviación estándar
2015	82,68	5,93
2016	76,28	8,03
2017	69,82	7,84

Según la información, indique si las proposiciones son verdaderas o falsas.

_____ En los datos sobre las puntuaciones obtenidas en el examen de Química en el 2015, el coeficiente de variación es aproximadamente 7,17.

_____ El coeficiente de variación de las puntuaciones en el examen de Química en el 2016 es 0,19 menor que el coeficiente de variación de las puntuaciones obtenidas en el examen de Química en el 2015.

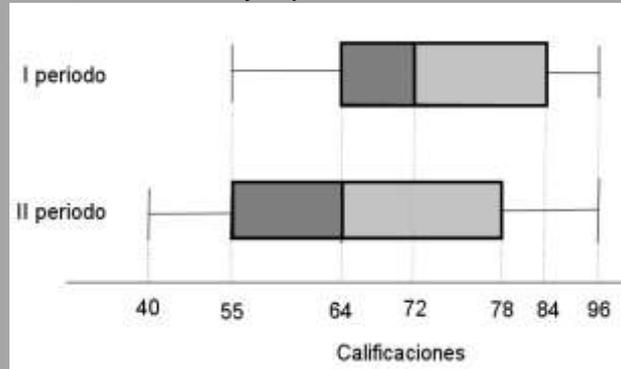
_____ En los datos sobre las puntuaciones obtenidas por los estudiantes en el 2015, la posición relativa del estudiante A fue de aproximadamente $-0,5$.

_____ Si consideramos la puntuación del estudiante B en el 2016 y la puntuación del estudiante en el C en el 2017, entonces el estudiante C fue el que obtuvo la mejor posición relativa.

Selección única: CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA

Analice el siguiente escenario:

El siguiente diagrama que cajas, resume el rendimiento académico (calificaciones) de una sección de undécimo nivel, conformada por 32 estudiantes, en la asignatura de Química, durante el I y II periodo lectivos.



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 1 y 2

- 1) De acuerdo con la información, analice las proposiciones
- El 50% de las notas del II periodo fueron inferiores o iguales al 25% de las notas del I periodo.
 - 78 estudiantes obtuvieron notas menores o iguales a 75
- De ellas, son verdaderas

- (A) ninguna (B) ambas
(C) solo la II (D) solo la I

- 2) ¿Cuántos estudiantes obtuvieron calificaciones iguales o superiores a 84 en el I periodo?

□	□	□	□	□	□
---	---	---	---	---	---

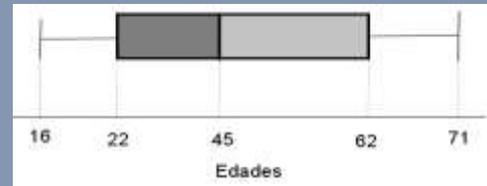
- 3) De acuerdo con la información, analice las proposiciones

- La nota más baja registrada en el I periodo fue de 55
- 8 estudiantes obtuvieron notas inferiores o iguales a 55 en el II periodo

De ellas, son verdaderas

- (A) ninguna (B) ambas
(C) solo la II (D) solo la I

- 4) Una asociación comunal está promoviendo el deporte, y los sábados dan clases de zumba. En el informe mensual, resumieron las edades de los participantes mediante un diagrama de cajas



Con base en la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

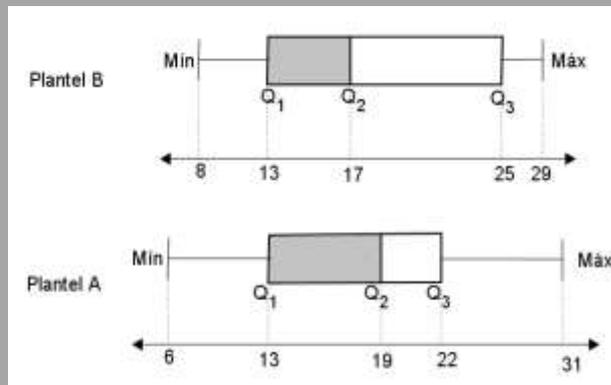
- I. Al grupo de zumba no va nadie que tenga 15 años
- II. Con certeza al grupo de zumba va una persona con 64 años

¿Cuál o cuáles de ellas son **verdaderas**?

- | | |
|-------------|----------------|
| (A) ninguna | (B) solo la II |
| (C) ambas | (D) solo la I |

Analice el siguiente escenario:

La presencia de manganeso en la gasolina genera daños a los vehículos, a la salud de las personas y contamina el ambiente. Por tal razón se hizo un muestreo durante el mes de diciembre del 2016, en dos planteles y los resultados fueron resumidos en los siguientes diagramas de cajas. (La concentración de manganeso está dada en mg/L)



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 5 y 6

- 5) Considere las siguientes proposiciones:
- I. El recorrido intercuartílico de las concentraciones de manganeso presentes en el plantel A es menor que el respectivo recorrido intercuartílico en el plantel B.
 - II. Las concentraciones de manganeso presentan mayor variabilidad en el plantel A que en el plantel B.

De ellas, cuáles son verdaderas

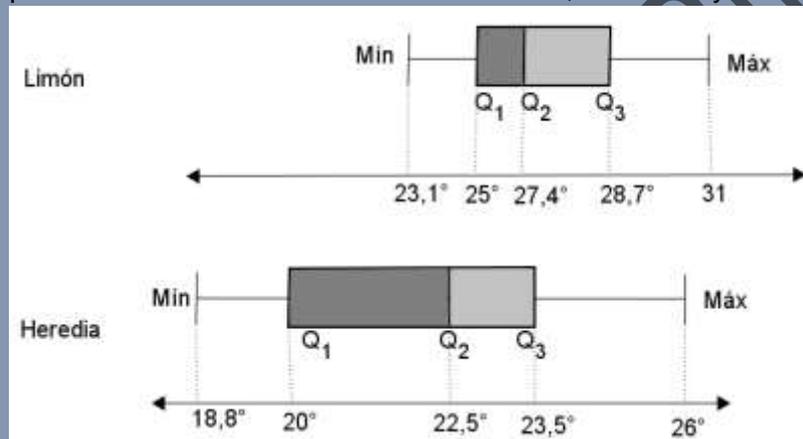
- | | |
|-------------|----------------|
| (A) ninguna | (B) solo la II |
| (C) ambas | (D) solo la I |

6) Considere las siguientes proposiciones:

- I. Del 25% al 50% de las concentraciones de manganeso del plantel A está menos disperso que del 25% al 50% de las concentraciones de manganeso del plantel B.
- II. El recorrido de las concentraciones de manganeso en el plantel A es de 25mg/L. De ellas, cuáles son verdaderas

- | | |
|-------------|----------------|
| (A) ninguna | (B) solo la II |
| (C) ambas | (D) solo la I |

7) Considere la información referida a la comparación de las temperaturas promedio durante los días del mes de abril, en Limón y en Heredia.



Analice las proposiciones:

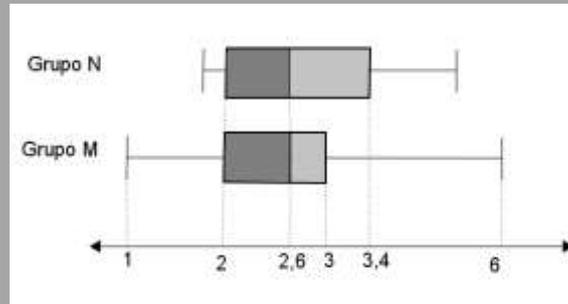
- I. Las temperaturas comprendidas entre el 25% y 50% en Limón están más dispersas que las temperaturas comprendidas entre el 25% y el 50% en Heredia.
- II. Las temperaturas presentan más variabilidad en Heredia que en Limón.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) solo la II | (B) ninguna |
| (C) ambas | (D) solo la I |

Analice el siguiente escenario:

El siguiente diagrama de cajas representa los datos de un estudio, acerca del tiempo, en horas, que dedican dos grupos de jóvenes M y N al uso de las redes sociales por día.



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 8, 9 y 10

- 8) Considere las siguientes proposiciones:
- El valor de la mediana de los datos del grupo M es menor que el valor de la mediana de los datos del grupo N
 - La cantidad de horas empleadas en redes sociales entre el 50% y 75% del grupo M, están más dispersas que las comprendidas entre el 50% y el 75% del grupo N

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) solo la II | (B) ninguna |
| (C) ambas | (D) solo la I |

- 9) Considere las siguientes proposiciones:
- La mínima cantidad de horas que dedica un joven del grupo N al uso de las redes sociales, es mayor a 1.
 - En el grupo M existe al menos un joven que dedica más de 5 horas por día en las redes sociales.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

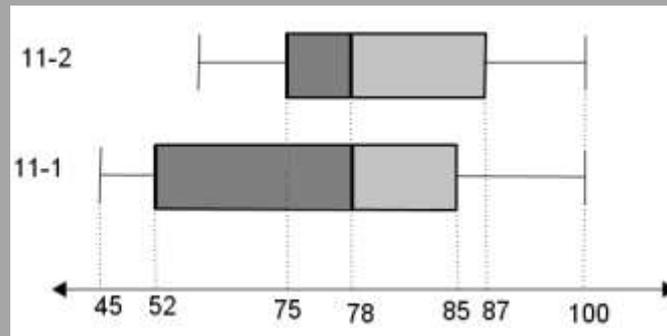
- | | |
|----------------|---------------|
| (A) solo la II | (B) ninguna |
| (C) ambas | (D) solo la I |

- 10) ¿Cuál es, en horas, el recorrido intercuartílico en el grupo N?

--	--	--	--	--	--	--	--

Analice el siguiente escenario:

El siguiente diagrama de cajas representa los datos de las calificaciones trimestrales de las secciones 11-1 y 11-2 de un liceo rural, en Biología.



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 11 y 12

11) Considere las siguientes proposiciones:

- I. Al menos un estudiante de cada sección obtuvo un 100
- II. El valor de la mediana de los datos de la sección 11 -1 es mayor que el valor de la mediana de los datos de la sección 11-25

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) solo la II | (B) ninguna |
| (C) ambas | (D) solo la I |

12) Considere las siguientes proposiciones:

- I. Al menos un estudiante de la 11-1 tuvo una menor calificación que los estudiantes de la 11-2.
- II. El 50% de las calificaciones en la 11-1 se concentran entre 45 y 100 inclusive,

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) solo la II | (B) ninguna |
| (C) ambas | (D) solo la I |

Analice el siguiente escenario:

El consumo mensual en metros cúbicos de agua de tres familias, durante el 2016, se resume en la siguiente tabla.

	Promedio	Desviación Estándar
Familia M	24,4	2,62
Familia N	21,0	4,21
Familia R	25,5	2,08

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 1 y 2.

- 1) Considere las siguientes proposiciones
- La familia R es la que presenta más variabilidad relativa respecto al consumo de agua.
 - El consumo de agua en la familia R varía $2,08 \text{ m}^3$ por debajo o por encima de $25,5 \text{ m}^3$

De ellas son verdaderas

- (A) ninguna (B) solo la II
(C) ambas (D) solo la I

- 2) ¿En cuánto se diferencia aproximadamente la variancia de la Familia M y la variancia de la Familia N?

- (A) 3,4 (B) 2,08
(C) 10,86 (D) 1,59

- 3) El consumo diario por persona, de calcio en mg por día, en Brasil y Finlandia en 1992 está resumido en la siguiente tabla

Considere las siguientes proposiciones

- En Brasil, la variación de los datos, con respecto a la media, es mayor que en Finlandia.
- En Finlandia, el consumo de calcio diario varía en 27 posiciones, con respecto a su media.

	Media	Variancia
Brasil	406	68,6
Finlandia	1267	27

De ellas son verdaderas

- (A) ninguna (B) solo la II
(C) ambas (D) solo la I

- 4) La media de las calificaciones de los estudiantes de un colegio en la prueba de Estudios Sociales fue de 85, con una desviación estándar de 3,0. Según esta información, considere:

- I. Las calificaciones se alejan o acercan del promedio en 3 puntos.
- II. La variancia en estos datos es de 9 puntos.

De ellas, cuáles son verdaderas

- | | |
|-------------|----------------|
| (A) ninguna | (B) solo la II |
| (C) ambas | (D) solo la I |

Analice el siguiente escenario:

La estatura media de los varones de séptimo nivel de un colegio de Cartago es de 160cm y su desviación estándar es 2,5 cm. La estatura media de las mujeres es de 155cm y su desviación estándar es de 3,5 cm

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 5 y 6

- 5) ¿Cuál es aproximadamente el coeficiente de variación de las estaturas de las mujeres?

- | | |
|-----------|----------|
| (A) 44,28 | (B) 7,09 |
| (C) 2,25 | (D) 0,12 |

- 6) Considere las siguientes proposiciones:

- I. La estatura de los hombres posee mayor variabilidad relativa que la estatura de las mujeres
- II. Un hombre que mide 167cm es **más alto relativamente** que una mujer con estatura de 166cm

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) solo la II | (B) ninguna |
| (C) ambas | (D) solo la I |

Analice el siguiente escenario:

En el cuadro se resumen las notas de la 11-4 en 4 asignaturas durante el I trimestre, así como la calificación de Teodoro en cada una de ellas.

Asignatura	Media	Desviación Estándar	Nota obtenida por Teodoro
Español	82,4	6,1	81
Química	72,6	6,0	78
Biología	87,3	5,8	82
Inglés	91,2	7,3	80

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 7, 8 y 9

7) La asignatura que presentó mayor variabilidad relativa corresponde a

- | | |
|--------------|-------------|
| (A) Español | (B) Química |
| (C) Biología | (D) Inglés |

8) Teodoro obtuvo mayor rendimiento relativo en la asignatura de

- | | |
|--------------|-------------|
| (A) Español | (B) Química |
| (C) Biología | (D) Inglés |

9) Teodoro obtuvo un menor rendimiento relativo en la asignatura de

- | | |
|--------------|-------------|
| (A) Español | (B) Química |
| (C) Biología | (D) Inglés |

Analice el siguiente escenario:

La siguiente tabla muestra información relacionada con las calificaciones generales de 4 colegios de Guanacaste en el I trimestre 2017.

Colegio	Media	Desviación Estándar
M	74	6
N	78	8
R	81	11
T	68	6

Egipciaca es estudiante en el colegio M y tiene un promedio de 78

Hilario es estudiante en el colegio N y tiene un promedio de 79

Anastasia es estudiante en el colegio R y tiene un promedio de 84

Apolonia es estudiante en el colegio T y tiene un promedio de 77

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 13 y 14

13) Considere las siguientes proposiciones:

- I. Las calificaciones del colegio M presentan menor variabilidad relativa con respecto a las del colegio T
- II. Las calificaciones del colegio N presentan mayor variabilidad relativa con respecto a las del colegio R

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- | | |
|----------------|---------------|
| (A) solo la II | (B) ninguna |
| (C) ambas | (D) solo la I |

14) ¿Cuál estudiante obtuvo la mejor posición relativa con respecto a su colegio?

- | | |
|---------------|--------------|
| (A) Egipciaca | (B) Hilario |
| (C) Anastasia | (D) Apolonia |

- 15) En un grupo, se realiza una prueba de resistencia, que consiste en correr una milla. El tiempo, en minutos, se resume en la siguiente tabla.

Estudiante	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Tiempo	5,5	6,3	4,2	6,6	7,8	5,0	8,9	6,9	7,0

- I. El tiempo obtenido en la prueba de resistencia, se dispersa de la media en 1,35 minutos, aproximadamente.
- II. El 50% de los que realizaron la prueba de resistencia, tardaron 6,6 minutos o más.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- | | |
|-------------|----------------|
| (A) ninguna | (B) solo la II |
| (C) ambas | (D) solo la I |

Analice el siguiente escenario:

En el “Word Champions Ships London 2017”, para el lanzamiento de jabalina en la rama femenina, hubo un promedio de 66,09 metros y una desviación estándar de 0,62m. En la rama masculina la media fue de 89,31 metros, con una varianza de 0,49 metros.

El checo Jakub Vadlejch obtuvo un resultado de 89,73m; mientras que su compatriota Barbora Spotáková obtuvo 66,76m

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 16 y 17

- 16) La diferencia aproximada, entre los coeficientes de variación de los lanzamientos de jabalina en la rama femenina y masculina, corresponde a:

- | | |
|----------|----------|
| (A) 0,78 | (B) 0,93 |
| (C) 1,71 | (D) 0,15 |

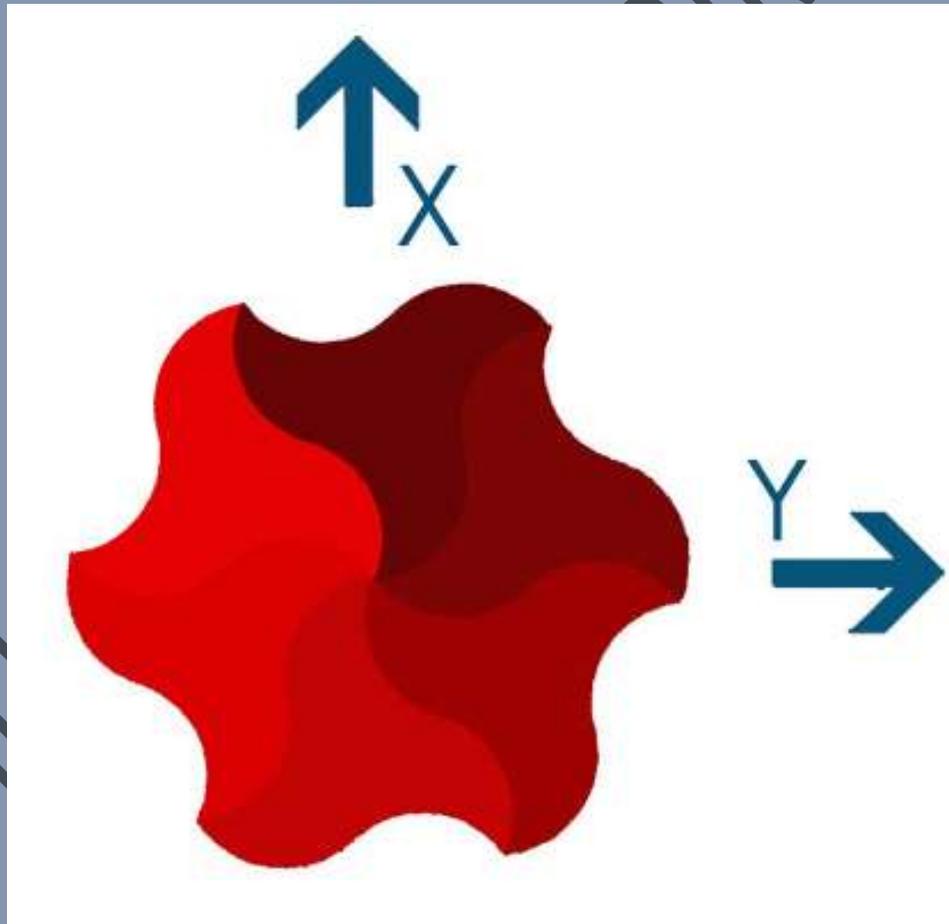
- 17) Según la información proporcionada, considere las siguientes proposiciones

- I. Los resultados en lanzamiento de jabalina fueron más variables en la rama masculina, comparados con la rama femenina.
- II. La posición relativa de Jakub fue mejor que la de Barbora

De ellas son verdaderas

- | | |
|-------------|----------------|
| (A) ninguna | (B) solo la II |
| (C) ambas | (D) solo la I |

GEOMETRÍA



Dibujo realizado por el estudiante Sebastián Ocampo, del Colegio Técnico Profesional Mercedes Norte

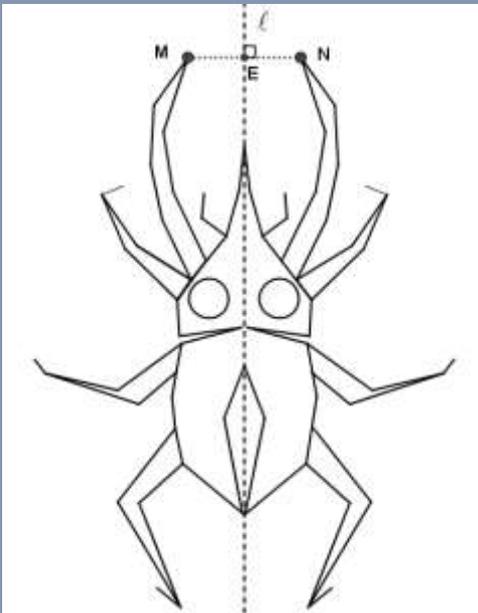
Conocimientos:
Simetría Axial

Habilidades:

1. Determinar ejes de simetría en figuras simétricas.
2. Identificar elementos homólogos en figuras que presentan simetría axial.
3. Trazar figuras simétricas utilizando un sistema de ejes coordenados en el plano.
4. Resolver problemas relacionados con la simetría axial.

• **Simetría axial**

Una figura presenta simetría axial, si existe un eje (línea imaginaria) que la divide en dos partes, de tal modo que todos los puntos opuestos homólogos a dicho eje son equidistantes entre sí. Se puede definir como la transformación de una figura respecto a un eje que relaciona a esta con una homóloga de manera que cada punto homólogo de las figuras está a la misma distancia del eje de simetría.



En el dibujo adjunto, l es el **eje de simetría**.

N es **la reflexión** del punto M sobre l , por lo cual $ME = EN$ y $\overline{MN} \perp l$

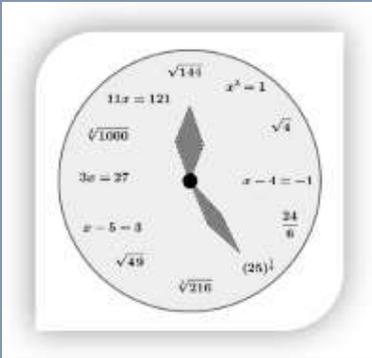
En la simetría, M es el punto homólogo a N

M es **preimagen** de N, con respecto al eje l

N es **imagen** de M con respecto al eje l

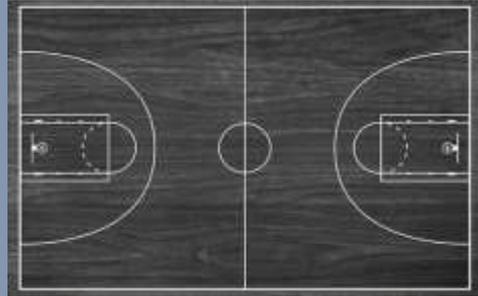
El eje de simetría se puede asociar con un espejo, en el que se refleja la figura.

La figura reflejada será congruente a la original.

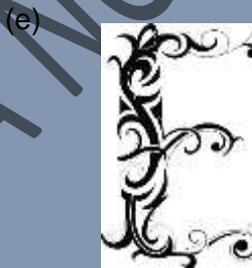
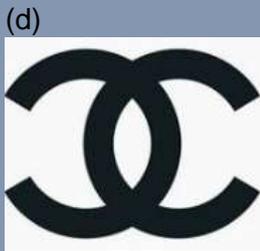
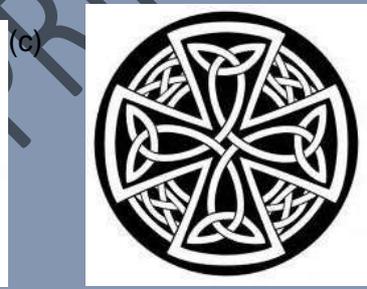
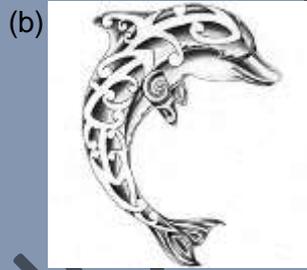


Tiempo para practicar 3.1

1) Señale los ejes de simetría axial que tiene la cancha de baloncesto.

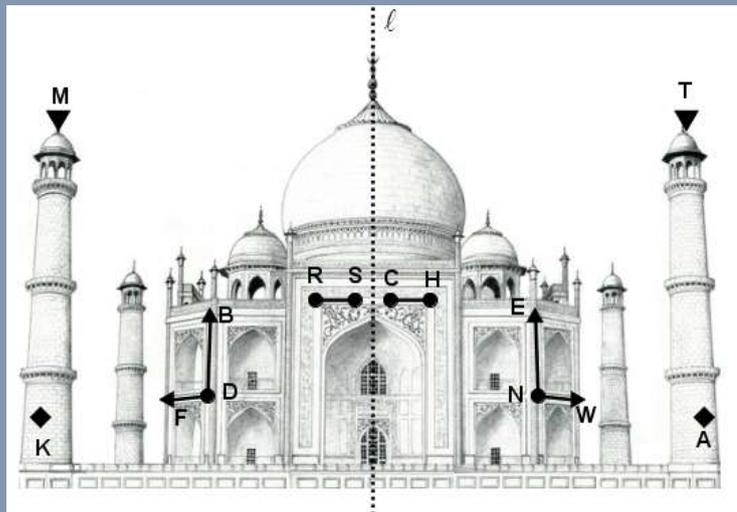


2) Determine cuáles figuras presentan simetría axial. Dibuje, en los casos que corresponda, el eje de simetría.

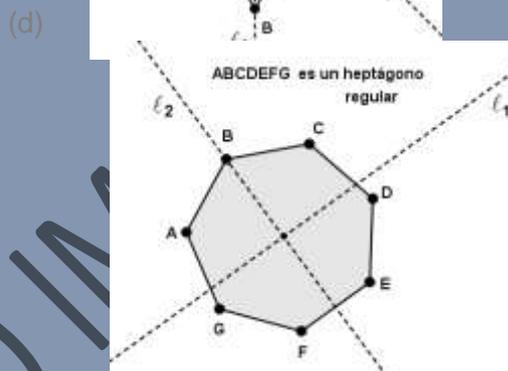
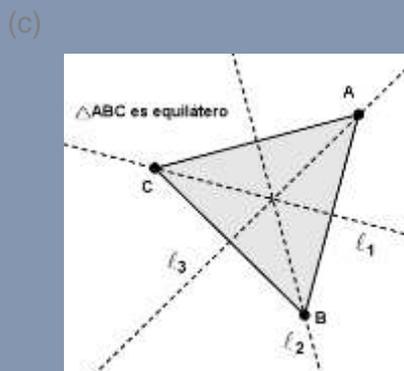
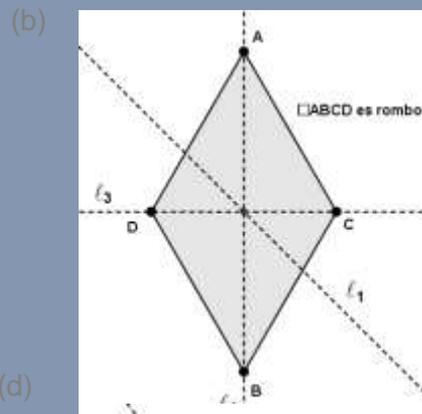
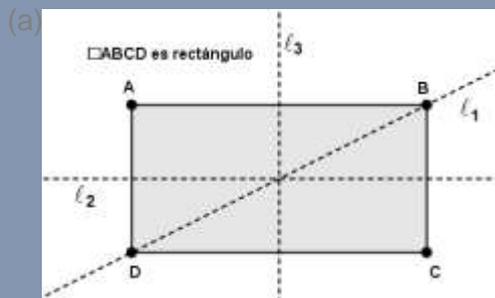


3) Considere el dibujo que representa el Taj Mahal, donde l es un eje de simetría. Determine:

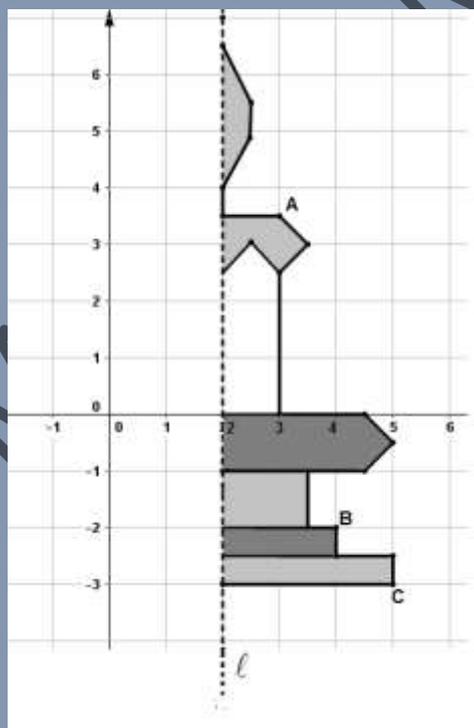
- (a) La imagen de K
- (b) La preimagen de \overline{CH}
- (c) La imagen del $\angle BDF$
- (d) La preimagen de T
- (e) El homólogo de D



4) En cada caso, indique cuáles de las rectas dadas corresponden a ejes de simetría.



5) En el dibujo, considere a l como eje de simetría.

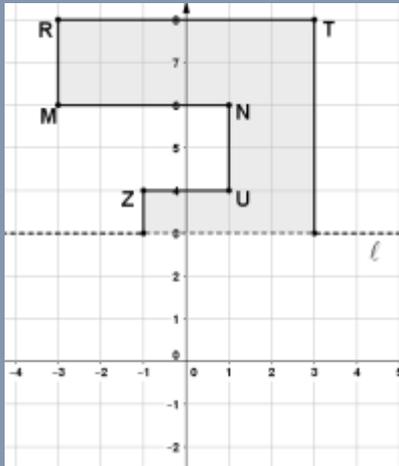


(a) Construya la reflexión de la imagen sobre la recta l

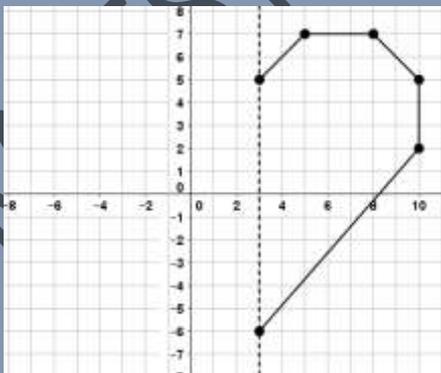
(b) Determine las coordenadas de los puntos homólogos a A, B y C.

(c) ¿Cuántas unidades mide el segmento $\overline{AA_1}$, donde A_1 es el punto de reflexión de A sobre l ?

- 6) En el dibujo, considere a ℓ como eje de simetría.



- (a) Construya la reflexión de la imagen sobre la recta ℓ
- (b) Determine las coordenadas de las imágenes de los puntos R, N y U
- (c) Si $\overline{M_1N_1}$ es la imagen de \overline{MN} , ¿cuántas unidades mide $\overline{M_1N_1}$?
- (d) Si, $m\angle NZU = 45^\circ$ ¿cuál es la medida de su ángulo homólogo?
- 7) El punto $(1, -3)$ se refleja sobre la recta $y = -2$. Determine las coordenadas de su homólogo.
- 8) Sea $A\left(-2, \frac{-1}{2}\right)$, determine las coordenadas de su imagen, si el eje de simetría es la recta $x = 1$
- 9) Sean $M(3,5)$, $N(5,1)$ que se reflejan sobre el eje de simetría $y = -1$. Si $\overline{M_1N_1}$ es la imagen de \overline{MN} , determine la medida de $\overline{M_1N_1}$
- 10) Al construir el reflejo sobre la recta $x = 3$, se completa la figura de un corazón. Determine el área y perímetros totales de dicho corazón.



Conocimientos:
Transformaciones
en el plano



Habilidades:

5. Aplicar el concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación para determinar qué figuras se obtienen a partir de figuras dadas.
6. Identificar elementos de las figuras geométricas que parecen invariantes bajo reflexiones o rotaciones.
7. Trazar la imagen reflejada de una figura dada con respecto a una recta.
8. Trazar la imagen de una figura dada si se la somete a una rotación.
9. Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter una figura a una traslación, rotación u homotecia o combinaciones de ellas.
10. Determinar el punto imagen de puntos dados mediante una transformación.
11. Resolver problemas relacionados con diversas transformaciones en el plano.
12. Utilizar software de geometría dinámica para el análisis de las propiedades de las traslaciones, homotecias y reflexiones.
13. Plantear ejercicios o problemas que involucren alguna transformación o transformaciones de figuras en el plano.

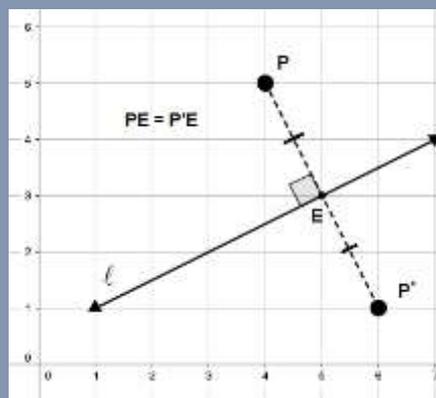
• Transformaciones isométricas

Una transformación isométrica es un movimiento de una figura geométrica en que se conserva la medida de sus lados y de sus ángulos. Por tanto, una transformación isométrica convierte una figura en otra congruente, que es imagen de la original.

Dentro de las transformaciones isométricas están: la traslación, la rotación y la reflexión

• Reflexión

Una reflexión en el plano con respecto a una recta l , es una transformación tal que a cada punto P fuera de l se le asigna un punto P' (llamado homólogo de P) de modo que l es perpendicular a $\overline{PP'}$ y lo interseca en su punto medio.



• Punto reflejado en una recta.

Para obtener la reflexión de un punto (x_0, y_0) sobre la recta $l: y = mx + b$, se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Se determina la recta perpendicular a l .

$$\text{Si } l: y = mx + b \longrightarrow l_{\perp}: y = \frac{-1}{m}x + b_1 \text{ donde } b_1 = y_0 - \frac{-1}{m} \cdot x_0$$

Se halla el punto de intersección (w, z) de las rectas l y l_{\perp} , mediante un sistema de ecuaciones. El punto obtenido será el punto medio entre (x_0, y_0) y su imagen reflejada (c, d)

2. Se resuelve la igualdad que relaciona el punto medio $(w, z) = \left(\frac{x_0 + c}{2}, \frac{y_0 + d}{2} \right)$

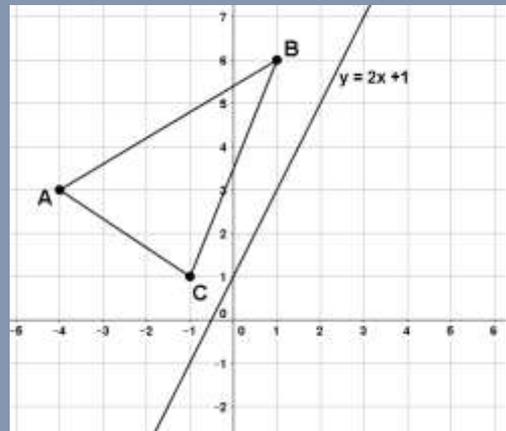
Es decir, se realiza las ecuaciones: $w = \frac{x_0 + c}{2}$, $z = \frac{y_0 + d}{2}$, de modo que se

logren despejar las variables c y d , las cuales corresponden a las coordenadas del punto reflejado.



Ejemplo 1

Determine las coordenadas del triángulo que resulta de reflejar el $\triangle ABC$ sobre la recta $y = 2x + 1$. Grafique.



Para determinar la imagen de B, primero obtenemos la recta perpendicular a $y = 2x + 1$ y que pasa por B:

$$m = \frac{-1}{2} \quad b = 6 - \frac{-1}{2} \cdot 1 = \frac{13}{2} \quad l_{\perp}: y = \frac{-1}{2}x + \frac{13}{2}$$

Ahora se halla el punto de intersección de las rectas $y = 2x + 1$, $y = \frac{-1}{2}x + \frac{13}{2}$

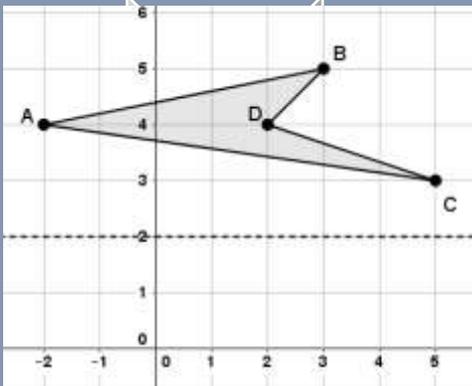
$$2x + 1 = \frac{-1}{2}x + \frac{13}{2} \Rightarrow 2x + \frac{1}{2}x = \frac{13}{2} - 1 \Rightarrow \frac{5}{2}x = \frac{11}{2} \Rightarrow x = \frac{11}{2} \div \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{5} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{11}{5} + 1 \Rightarrow y = \frac{27}{5}$$



Determine las coordenadas del cuadrilátero que resulta de reflejar el \square ABCD sobre la recta $y = 2$. Grafique.

Ejemplo 2

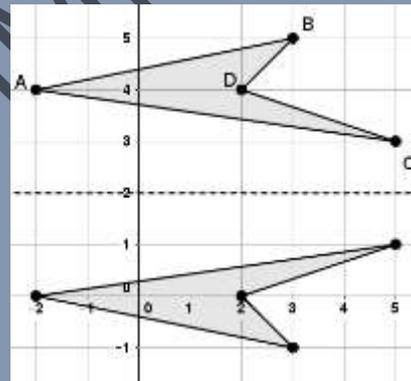


En este caso no es necesario determinar rectas perpendiculares a $y = 2$, puesto que es más fácil contar los espacios que hay entre cada punto y dicha recta, y reflejarlos con esa información.

De este modo se obtiene

Punto	Homólogo
A (-2,4)	(-2,0)
B (3,5)	(3,-1)
C (5,3)	(5,1)
D (2,4)	(2,0)

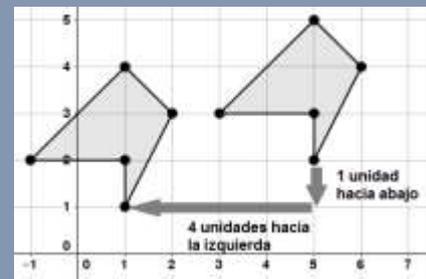
La figura y su reflexión quedan graficadas así:



• Traslación

Una traslación es una transformación en la que a cada coordenada de un punto A le corresponde las coordenadas del punto A' sumando o restando un valor a las primeras. La figura trasladada es congruente con la original y localizada en otro lugar del plano.

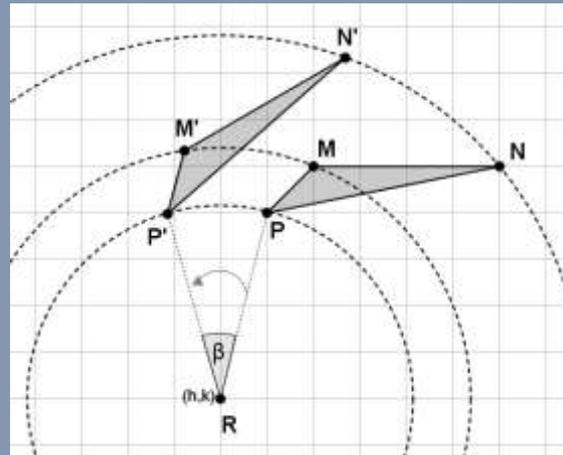
Si por ejemplo, un punto (x, y) se traslada "h" unidades a la derecha y "k" unidades hacia abajo, el punto trasladado corresponde a $(x + h, y - k)$. También se puede expresar como la traslación de vector $(h, -k)$



• Rotación

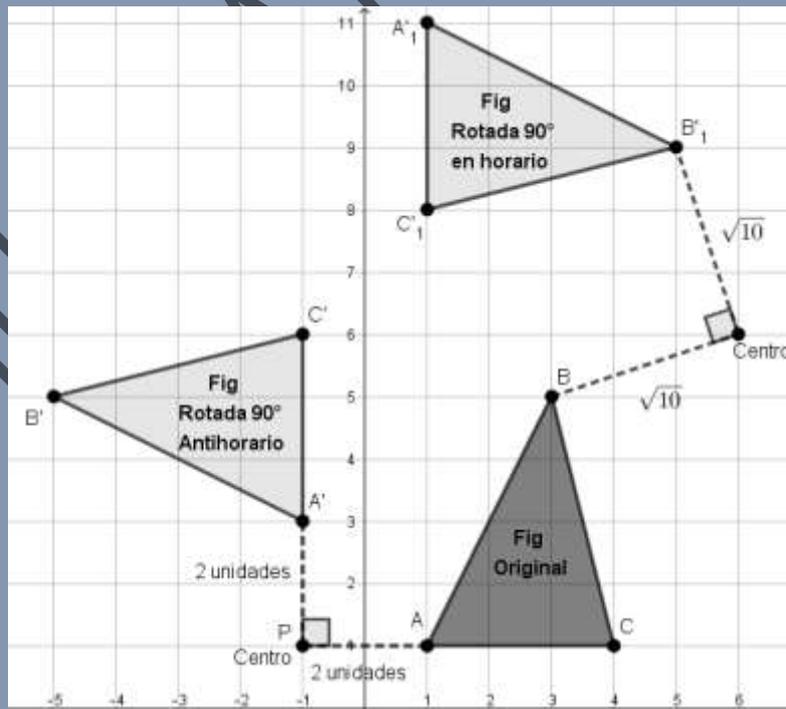
Una rotación de centro R y amplitud β es una transformación del plano en la que el homólogo de un punto P es otro punto P' tal que P y P' equidistan de R y $\beta = \angle P'RP$

Una rotación es una isometría; es decir, conserva las distancias y las medidas de los ángulos. Los puntos de la rotación se mueven a lo largo de arcos de círculos concéntricos.



El triángulo PMN se ha rotado con un ángulo β , con respecto al centro $R(h,k)$ en antihorario [contra las manecillas del reloj]

Rotación a 90° Al rotar una figura con un ángulo de 90° y un centro P , se puede determinar el punto homólogo de A , calculando la distancia entre A y P . Luego esa misma distancia se aplica de forma perpendicular desde A , tomando en cuenta si es horario o antihorario.



Abordaje adicional

Si (h, k) es el centro de una rotación del punto $P(x, y)$ con un ángulo $\sphericalangle \beta$ en sentido antihorario, de modo que se obtiene $P' (x', y')$, entonces para obtener la coordenadas después de la rotación se realiza:

$$x' = (x - h) \cdot \cos\beta - (y - k) \cdot \operatorname{sen}\beta + h$$

$$y' = (y - k) \cdot \cos\beta + (x - h) \cdot \operatorname{sen}\beta + k$$

Si la rotación es en sentido horario (en dirección a las manecillas del reloj), se usa la medida $-\beta$:

$$x' = (x - h) \cdot \cos(-\beta) - (y - k) \cdot \operatorname{sen}(-\beta) + h$$

$$y' = (y - k) \cdot \cos(-\beta) + (x - h) \cdot \operatorname{sen}(-\beta) + k$$

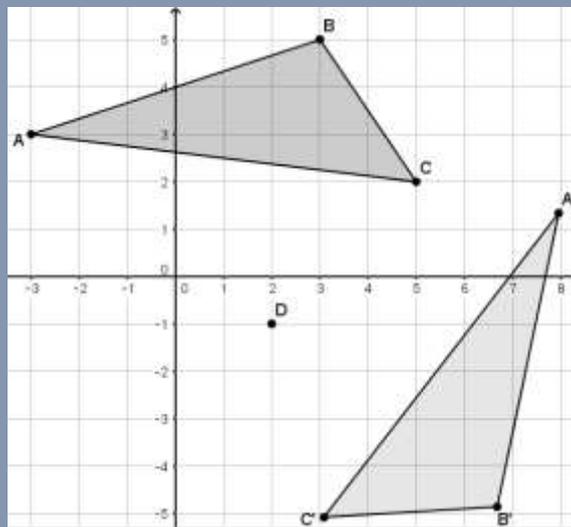
**Ejemplo 1**

Determine las coordenadas del $\Delta A'B'C'$ que resulta de rotar en sentido horario al ΔABC con un ángulo de 120° y centro $(2, -1)$. Las coordenadas de los vértices $A(-3,3)$ $B(3,5)$ $C(5,2)$

Se calculan las coordenadas con las fórmulas respectivas

A (-3,3)	$x' = (-3 - 2)\cos(-120^\circ) - (3 - 1)\operatorname{sen}(-120^\circ) + 2 \approx -7,9$	A' (7,9 , 1,33)
	$y' = (3 - 1)\cos(-120^\circ) + (-3 - 2)\operatorname{sen}(-120^\circ) + -1 \approx 1,3$	
B (3,5)	$x' = (3 - 2)\cos(-120^\circ) - (5 - 1)\operatorname{sen}(-120^\circ) + 2 \approx 6,7$	B' (6,7 , -4,8)
	$y' = (5 - 1)\cos(-120^\circ) + (3 - 2)\operatorname{sen}(-120^\circ) + -1 \approx -4,8$	
C (5,2)	$x' = (5 - 2)\cos(-120^\circ) - (2 - 1)\operatorname{sen}(-120^\circ) + 2 \approx 3,1$	C' (3,1 , -5,1)
	$y' = (2 - 1)\cos(-120^\circ) + (5 - 2)\operatorname{sen}(-120^\circ) + -1 \approx -5,1$	

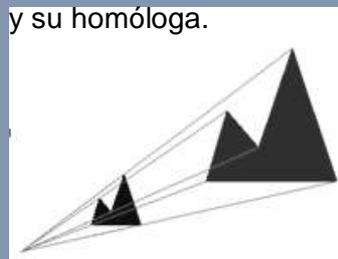
Note que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$



• Transformaciones isomórficas

Una transformación isomórfica, es aquella en la que se conserva la forma de la figura original y existe una proporcionalidad entre la figura original y su homóloga.

• Homotecia



Una homotecia de centro O y razón k es la transformación que hace corresponder a un punto A otro A_1 , alineado con A y O , tal que

$$OA_1 = k \cdot OA$$

Si estamos trabajando en el plano cartesiano, donde cada punto se representa mediante un par ordenado (x, y) , la homotecia de centro $O(m, n)$ y razón k envía al punto $A(x, y)$ al punto $A_1(x_1, y_1)$ mediante la siguiente relación:

$$A_1 = k \cdot A + (1 - k)O$$

$$(x_1, y_1) = k(x, y) + (1 - k) \cdot (m, n)$$

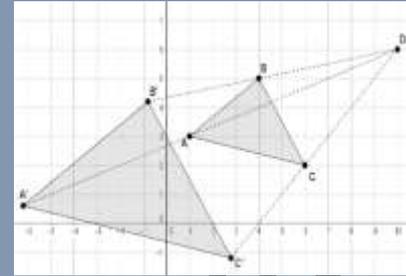
Homotecia directa

Son aquellas homotecias en las cuales los elementos están a un mismo sentido direccional respecto a su centro. Se da cuando $k > 0$

Existen tres posibilidades para las homotecias directas:

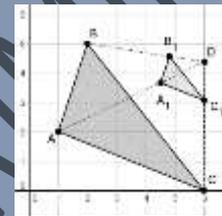
☒ $k > 1$

La figura que se forma mediante la homotecia tendrá dimensiones mayores a la original.



☒ $0 < k < 1$

La figura que se forma mediante la homotecia tendrá dimensiones menores a la original.



☒ $k = 1$

La figura que se forma coincide en dimensiones y posición con la original

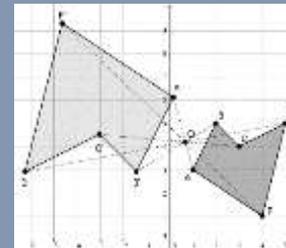
Homotecia indirecta

Son aquellas homotecias en las cuales los elementos están a un sentido direccional opuesto respecto a su centro. Se da cuando $k < 0$

Existen tres posibilidades para las homotecias indirectas:

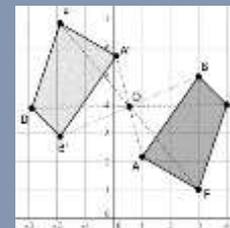
☒ $k < -1$

La figura que se forma mediante la homotecia tendrá dimensiones mayores a la original.



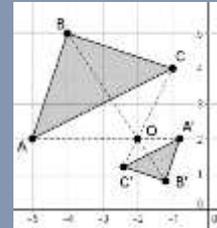
☒ $k = -1$

La figura que se forma coincide en dimensiones con la original, pero en sentido direccional opuesto.



$-1 < k < 0$

La figura que se forma mediante la homotecia tendrá dimensiones menores a la original.



Ejemplo 1

Determine las coordenadas del triángulo Determine y grafique la homotecia del triángulo ABC determinado por los puntos $A(-6,2), B(-3,4), C(-3,2)$ con una razón de -2 y centro $(-1,1)$

Para determinar la homotecia de ese triángulo, se determinan los puntos homólogos de A, B y C, para lo cual usamos la fórmula descrita anteriormente.

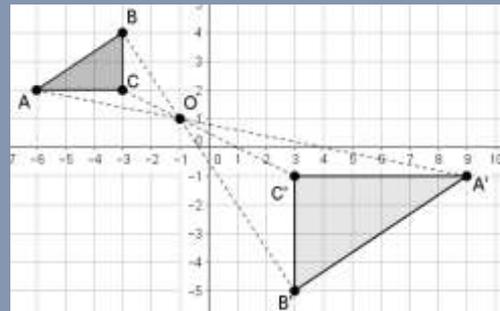
$A_1 = -2 \cdot (-6, 2) + (1 - (-2))(-1, 1)$ $= (12, -4) + 3(-1, 1) = (12, -4) + (-3, 3) = (9, -1)$
$B_1 = -2 \cdot (-3, 4) + (1 - (-2))(-1, 1)$ $= (6, -8) + 3(-1, 1) = (6, -8) + (-3, 3) = (3, -5)$
$C_1 = -2 \cdot (-3, 2) + (1 - (-2))(-1, 1)$ $= (6, -4) + 3(-1, 1) = (6, -4) + (-3, 3) = (3, -1)$

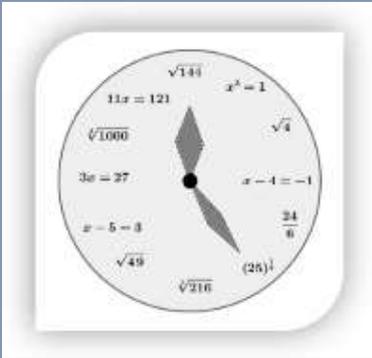
En la figura se observa que $A_1 C_1 = 6$ unidades, mientras que $AC = 3$ unidades. Es decir, $A_1 C_1$ es el doble de AC . Esto concuerda con el hecho de que la constante "k" de proporción es -2 .

$$\frac{A_1 C_1}{AC} = \frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{B_1 C_1}{BC} = 2$$

También es importante destacar que:

$$m\angle A_1 = m\angle A, \quad m\angle B_1 = m\angle B, \quad m\angle C_1 = m\angle C$$

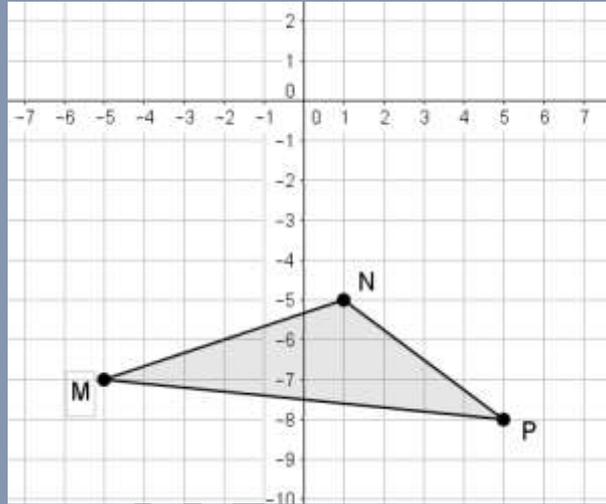




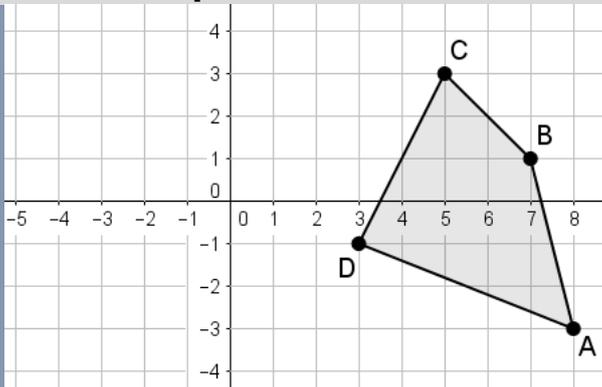
Tiempo para practicar 3.2

Reflexión

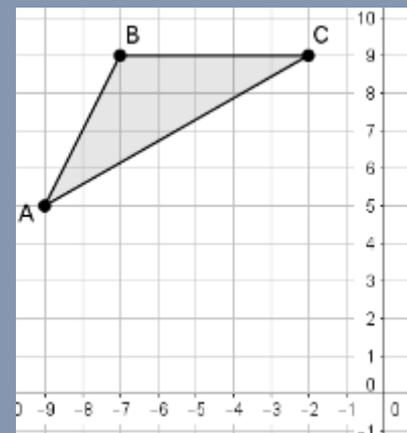
- 1) Construya la reflexión del $\triangle MNP$ sobre la recta $y = -4$ [Determine las coordenadas de los vértices]



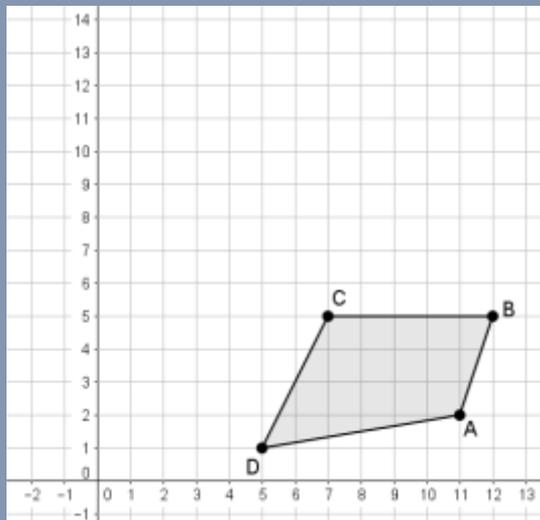
- 2) Construya la reflexión del $\square ABCD$ sobre la recta $x = 2$ [Determine las coordenadas de los vértices]



- 3) Construya la reflexión del $\square ABCD$ sobre la recta $y = x + 9$. [Determine las coordenadas de los vértices]

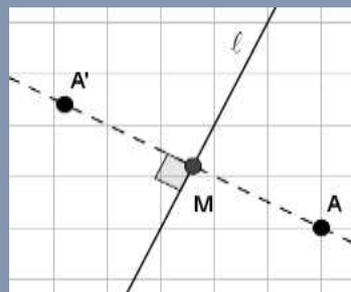


- 4) Construya la reflexión del $\square ABCD$ sobre la recta $y = x + 1$ [Determine las coordenadas de los vértices]



- 5) Determine la imagen del punto $(3, -1)$ que es reflejado sobre la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$

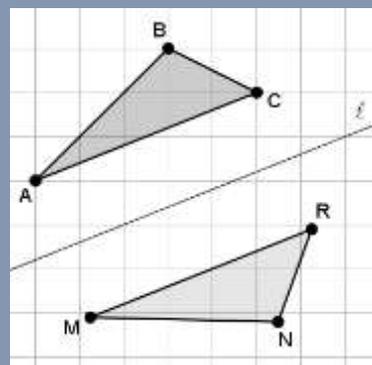
- 6) En la figura adjunta, A' es la imagen de A reflejada sobre la recta ℓ , donde $A' \left(\frac{-14}{5}, \frac{22}{5} \right)$, $A(2, 2)$. Determine las coordenadas de punto M



- 7) El $\triangle ABC$ se refleja sobre la recta ℓ tal como se muestra la figura adjunta. Las coordenadas del triángulo original son $A(-6, 2)$, $B(-3, 5)$, $C(-1, 4)$.

Determine:

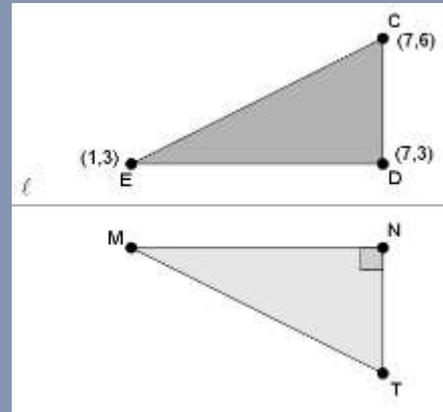
- (a) La longitud de \overline{MN}
- (b) La longitud de \overline{RN}
- (c) La medida de $\angle MRN$, si $m\angle CAB = 23,2^\circ$, $m\angle ABC = 108,4^\circ$.



- 8) El $\triangle EDC$ se refleja sobre la recta ℓ , tal como lo muestra la figura adjunta. Según la información proporcionada, determine

- (a) El área del $\triangle MNT$
 (b) El perímetro del $\triangle MNT$

- 9) Determine la imagen del punto $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ que se refleja respecto al eje "y"

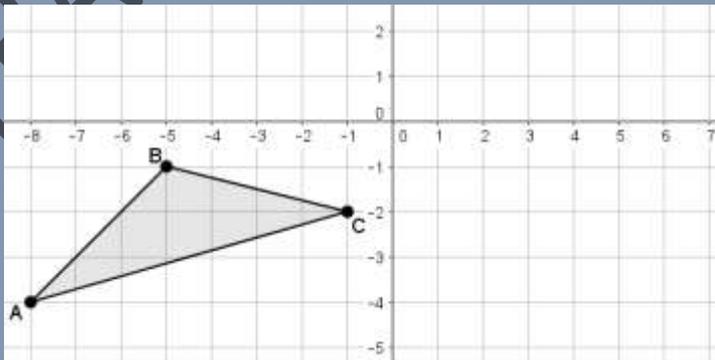


- 10) Determine la imagen del punto $(-\sqrt{3}, 5)$ que se refleja respecto al eje "x"

- 11) Las coordenadas de los vértices del cuadrilátero MNRS son $M(-9,3)$, $N(-7,5)$, $R(-5,3)$, $S(-6,1)$
- (a) Determine las coordenadas de la reflexión del $\square MNRS$ respecto al eje "x"
 (b) Determine las coordenadas de la reflexión del $\square MNRS$ respecto al eje "y"

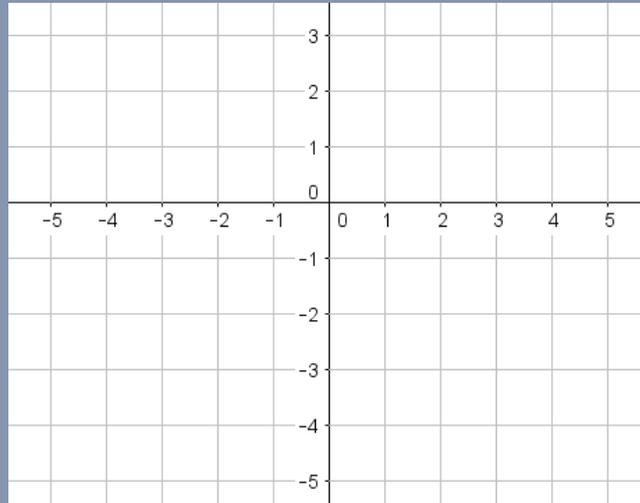
Traslación

- 12) Determine las coordenadas de los vértices que resultan de trasladar el $\triangle ABC$ nueve unidades a la derecha y dos hacia arriba. Grafique

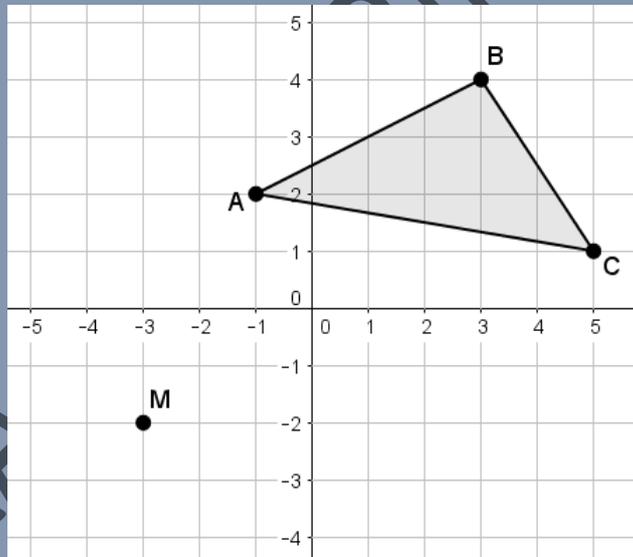


- 13) Los vértices de un cuadrilátero ABCD son $A(-4,1), B(-2,3), C(-2,2), D(-1,1)$.

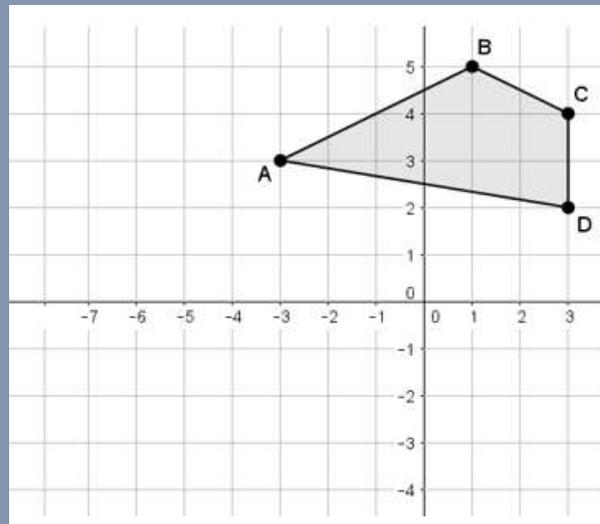
Determine las coordenadas de los vértices del cuadrilátero que resulta de trasladar al $\square ABCD$ 4 unidades abajo y 3 a la derecha. Grafique



- 14) En la figura adjunta, el punto M es resultado de trasladar el vértice A del triángulo ABC. Determine las coordenadas de los otros dos vértices y grafique.



- 15) Si al $\square ABCD$ se le aplica una traslación de vector $(-5, -3)$, determine las coordenadas del cuadrilátero trasladado. Grafíquelo.

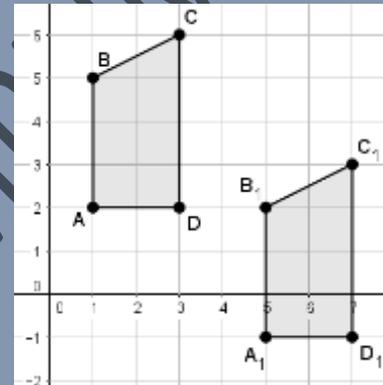


16) Determine la imagen del punto $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{4}\right)$ al que se le aplica una traslación de vector $(2, -8)$

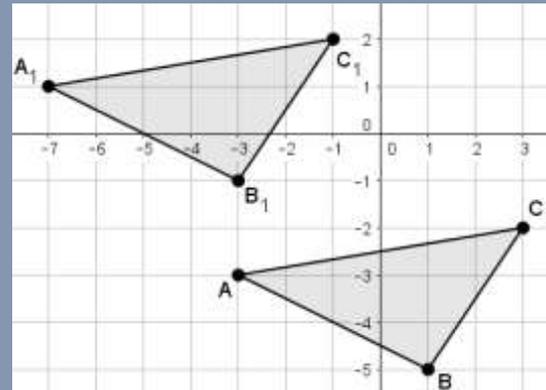
17) Determine la imagen del punto $(-4, 0)$ al que se le aplica una traslación de vector $\left(\frac{-3}{2}, 4\right)$

18) Determine la imagen del punto $(\sqrt{2}, 8)$ al que se le aplica una traslación de vector $(0, 7)$

19) De acuerdo con los datos de la figura adjunta, al trasladar el $\square ABCD$, se obtiene el $\square A'B'C'D'$. Determine el vector de traslación utilizado.



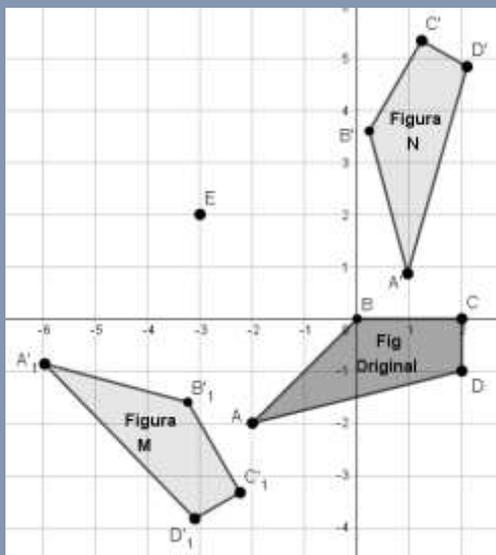
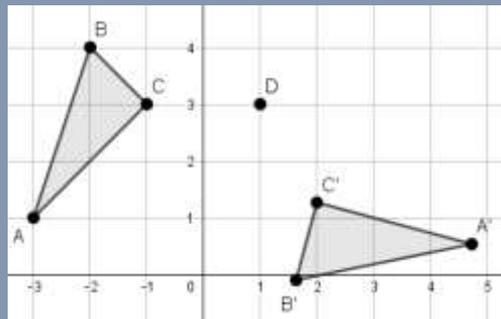
20) De acuerdo con los datos de la figura adjunta, al trasladar el $\triangle ABC$, se obtiene el $\triangle A'B'C'$. Determine el vector de traslación utilizado.



21) El $\triangle ABC$ se traslada de modo que se obtiene el $\triangle A'B'C'$, donde A es homólogo a A' y B' es la imagen de B. Las coordenadas del $\triangle ABC$ son $A(2, 4), B(6, 2), C(8, 5)$. Si $A'(-5, 0)$. Determine las coordenadas de B' y C'

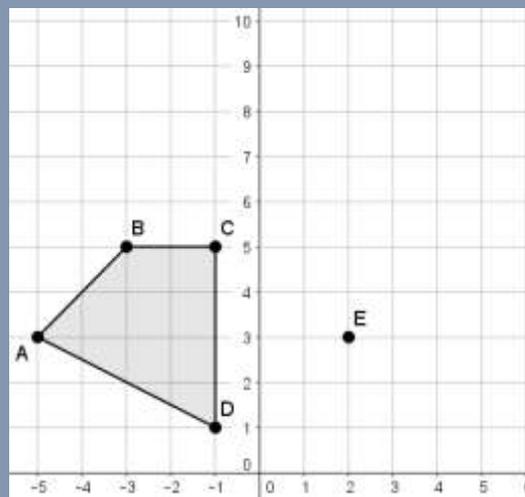
Rotación

- 22) Al $\triangle ABC$ se le ha aplicado una rotación con centro D, con lo cual se produjo el $\triangle A'B'C'$, tal como se muestra en la figura.
- (a) Determine la medida de $A'C'$
 - (b) La rotación aplicada, ¿es horaria o antihoraria?

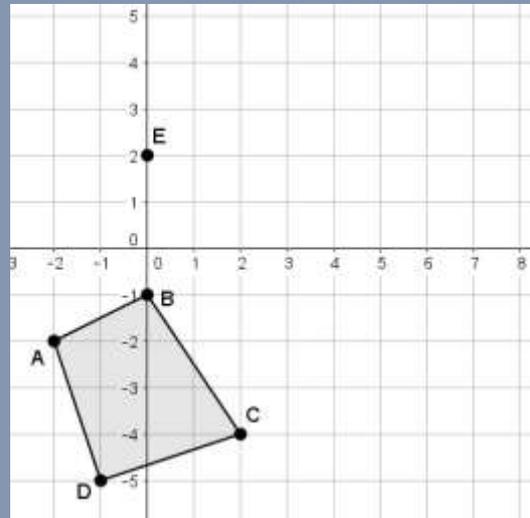


- 23) A la figura denominada "Fig original" se le aplicó dos rotaciones, ambas con centro en E. Esto dio como resultado a las figuras M y N, tal como lo muestra en la representación adjunta.
- (a) ¿Cuál figura fue el resultado de una rotación horaria?
 - (b) ¿Cuál figura fue el resultado de una rotación antihoraria?
 - (c) Determine la medida de D_1C_1
 - (d) Determine la medida del $m\angle B'C'D'$

- 24) Determine las coordenadas del $\square A'B'C'D'$ que resulta de rotar en sentido horario al $\square ABCD$ con un ángulo de 90° y centro E. Grafique

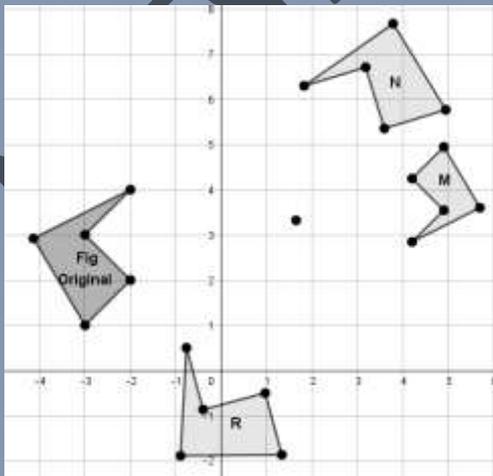
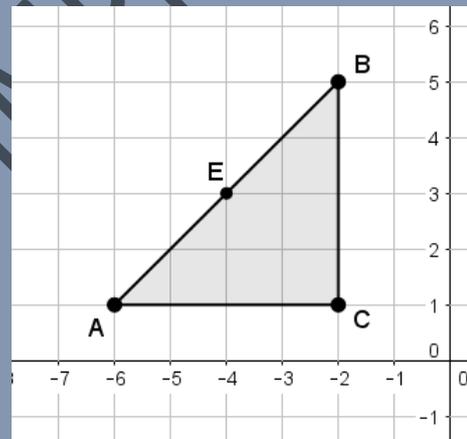


- 25) Determine las coordenadas del $\square A'B'C'D'$ que resulta de rotar en sentido antihorario al $\square ABCD$ con un ángulo de 90° y centro E. Grafique



- 26) El $\triangle ABC$ es rotado con un ángulo de 180° en sentido antihorario. El centro de rotación es el punto E, que corresponde al punto medio de \overline{AB} .

- (a) Determine las coordenadas del triángulo $\triangle A'B'C'$ que resulta de esa rotación.
 (b) Si C' es la imagen de C, ¿cómo se clasifica el $\square ACBC'$?

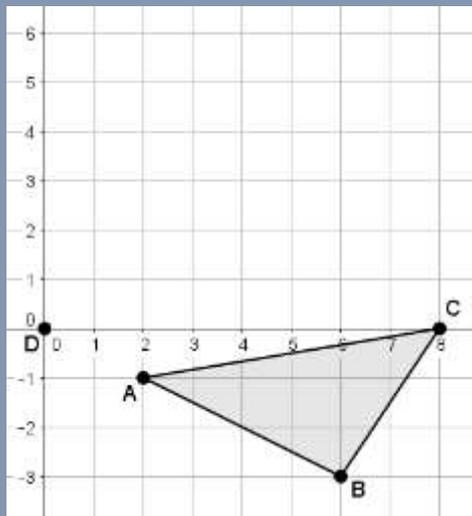


- 27) En la representación adjunta, considere la figura original y 3 figuras que se les ha aplicado alguna transformación a partir de ella.

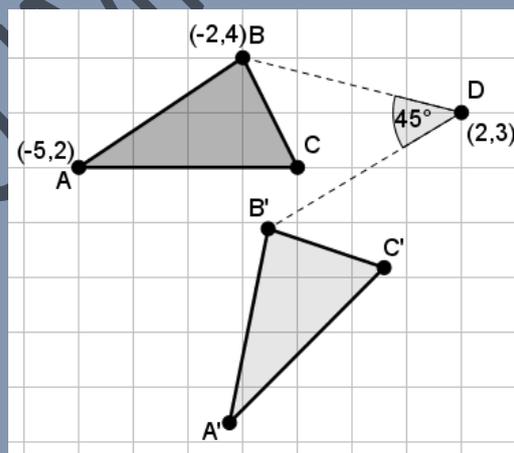
¿Cuál de las figuras fue resultado de una rotación? ¿Es horaria o antihoraria?

Abordaje adicional

- 28) Determine las coordenadas del $\triangle A'B'C'$ que resulta de rotar en sentido antihorario al $\triangle ABC$ con un ángulo de 45° y centro $(0, 0)$. Grafique



- 29) En la figura adjunta, el $\triangle A'B'C'$ resulta de rotar en sentido antihorario al $\triangle ABC$ con centro en D. Determine:
 (a) La medida del $\angle ADA'$
 (b) Las coordenadas de A'
 (c) Las coordenadas de C'



- 30) Al rotar el punto M $(-2,5)$ desde el centro $(0,0)$ con un ángulo de 135° en sentido horario, se obtiene el punto R. Determine las coordenadas de R.
- 31) Al rotar el punto N $(1,7)$ desde el centro $(3,-1)$ con un ángulo de 60° en sentido antihorario, se obtiene el punto T. Determine las coordenadas de T

- 32) Complete el cuadro, de modo que determine la imagen de cada punto que ha sido rotado desde el centro C y con un ángulo β . [Las respuestas pueden ser aproximadas]

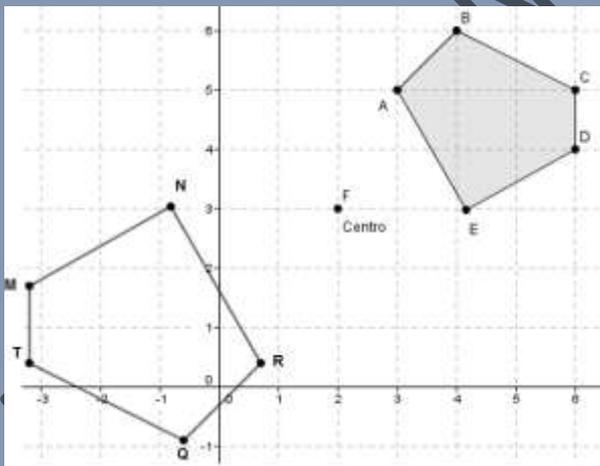
Punto	Centro	β	Rotación en anti horario	Rotación en horario
$(0, -4)$	$(-6, 0)$	135°		
$(2, 1)$	$(3, 2)$	15°		
$(-3, 3)$	$(0, 0)$	120°		

- 33) Si se toma $(-2, 2)$ como centro de rotación, determine la coordenada "y" transformada de un punto $(3, 6)$ si se gira en un ángulo de 60° en sentido antihorario.

Homotecias

- 34) En cada plano, se presenta un polígono sombreado y su respectiva homotecia. Determine el lado, vértice y ángulo homólogo, según sea el caso. Además indique qué condición cumple la razón de la homotecia "k".

(I)



(a) $\overline{CD} \rightarrow$ _____

(b) $E \rightarrow$ _____

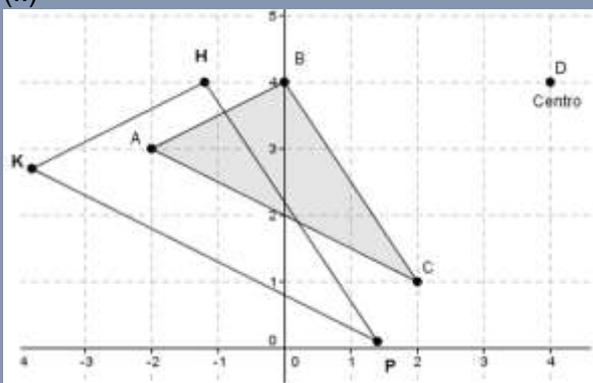
(c) $\angle EDC \rightarrow$ _____

(d) k :

$k < -1$ $-1 < k < 0$ $k = -1$

$k > 1$ $0 < k < 1$ $k = 1$

(II)



(a) $\overline{BC} \rightarrow$ ____ (b) $A \rightarrow$ ____

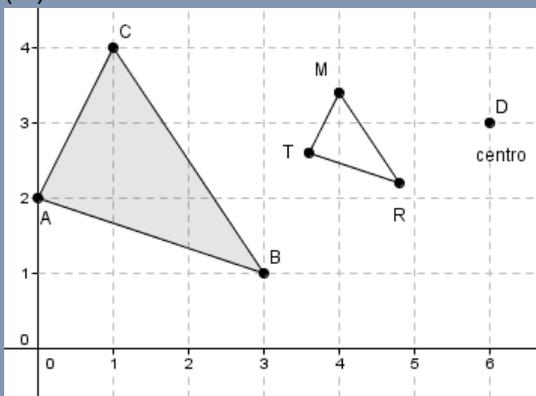
(c) $\sphericalangle CBA \rightarrow$ ____

(d) $k:$

$k < -1$ $-1 < k < 0$ $k = -1$

$k > 1$ $0 < k < 1$ $k = 1$

(III)



(a) $\overline{AC} \rightarrow$ ____ (b) $C \rightarrow$ ____

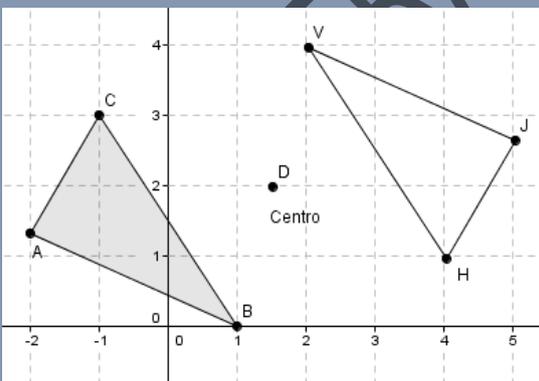
(c) $\sphericalangle CBA \rightarrow$ ____

(d) $k:$

$k < -1$ $-1 < k < 0$ $k = -1$

$k > 1$ $0 < k < 1$ $k = 1$

(IV)



(a) $\overline{BC} \rightarrow$ ____ (b) $B \rightarrow$ ____

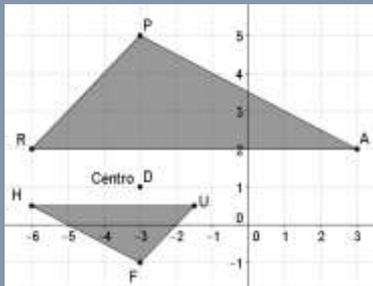
(c) $\sphericalangle ACB \rightarrow$ ____

(d) $k:$

$k < -1$ $-1 < k < 0$ $k = -1$

$k > 1$ $0 < k < 1$ $k = 1$

- 35) Considere la figura, en la que se presenta un triángulo y su respectiva homotecia.



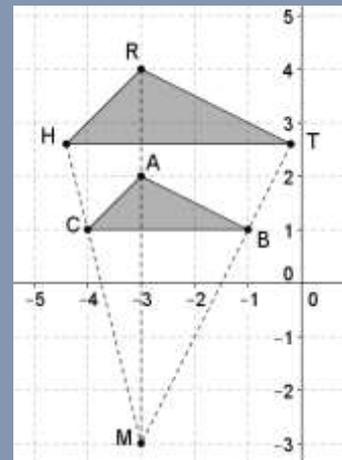
De acuerdo a la información proporcionada, conteste:

- (a) El lado homólogo de \overline{PR} es el siguiente _____
- (b) El ángulo homólogo del $\sphericalangle H$ es el siguiente _____
- (c) El vértice homólogo de R es el siguiente _____
- (d) El lado homólogo de \overline{HU} es el siguiente _____

- 36) Selección Única

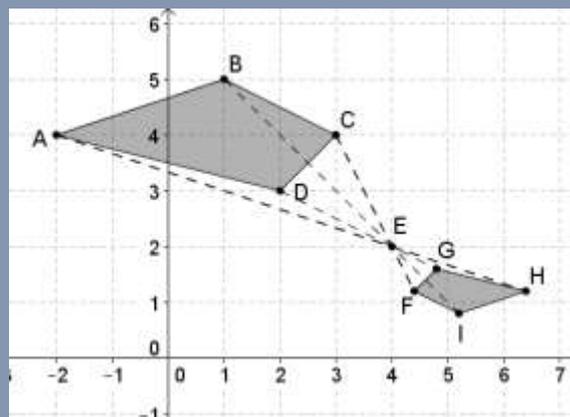
- (i) Al $\triangle ABC$ de la figura adjunta, se le aplicó una homotecia de razón "k" y centro M, con lo que se obtuvo el $\triangle RTH$; por tanto es cierto que

- (A) $k < -1$
 (B) $k = 1$
 (C) $k > 1$
 (D) $-1 < k < 0$



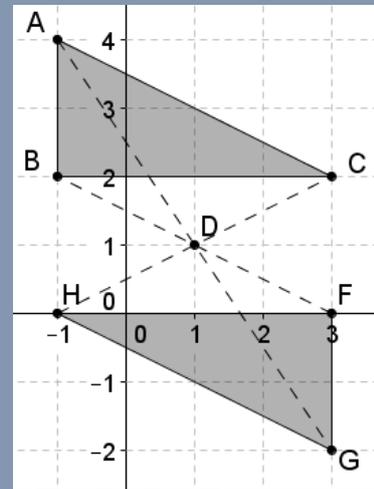
- (ii) Al $\square ABCD$ de la figura se le aplicó una homotecia de razón "k" y centro E, con lo que se obtuvo el $\square FGHI$. Por tanto es cierto que

- (A) $k < -1$
 (B) $0 < k < 1$
 (C) $k > 1$
 (D) $-1 < k < 0$



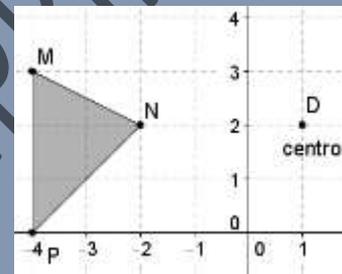
(iii) Al $\triangle ABC$ de la figura se le aplicó una homotecia de razón "k" y centro D, con lo que se obtuvo el $\triangle FGH$. Por tanto es cierto que

- (A) $k = -1$
- (B) $0 < k < 1$
- (C) $k = 1$
- (D) $-1 < k < 0$



(iv) Si al $\triangle MNP$ de la figura adjunta, se le aplica una homotecia de razón 2 y centro D, entonces, la coordenada del punto homólogo a N corresponde a

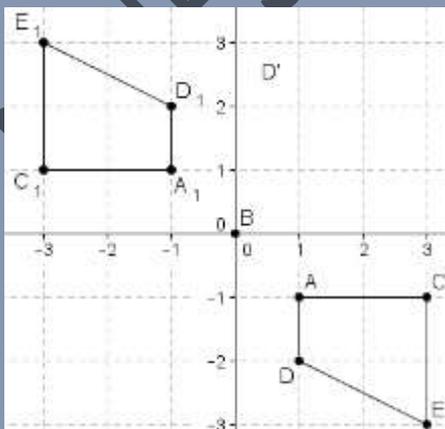
- A) $(-5,2)$
- B) $(-9,4)$
- C) $(-9,-2)$
- D) $(-2,-9)$



37) Determine la homotecia del punto $R(-4,7)$ con una razón de $\frac{5}{4}$ y centro $(-6,5)$

38) Determine la homotecia del punto $Q(0,0)$ con una razón de $-\frac{1}{5}$ y centro $(-1,-1)$

39) Considere la figura.

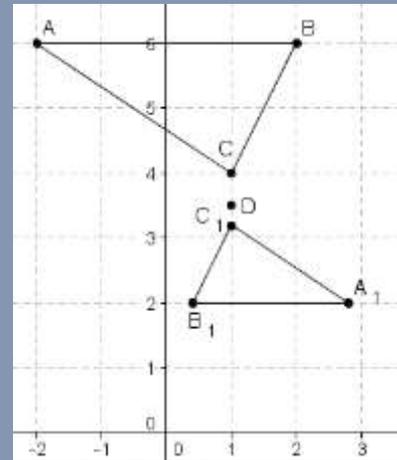


En la figura se muestra la homotecia del $\square ABCD$ hacia el $\square A_1B_1C_1D_1$ con centro $(0,0)$

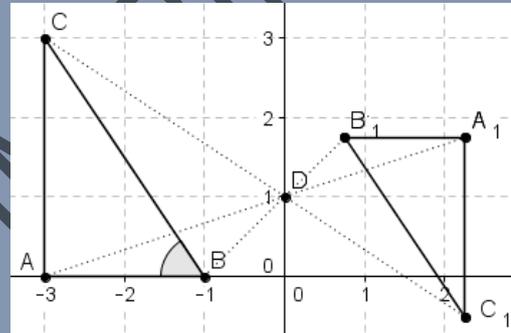
- (a) Determine la razón "k" de dicha homotecia.
- (b) ¿Qué relación cumplen los lados homólogos?

- 40) Determine y grafique la homotecia del triángulo MNR determinado por los puntos $M(-5,-1), N(-3,1), R(-3,-3)$ con una razón de $\frac{-1}{4}$ y centro $(0,-1)$
- 41) Determine y grafique la homotecia del $\square ABCD$ determinado por los puntos $A(0,0), B(1,1), C(2,1), D(1,-1)$ con una razón de -2 y centro $(-1,0)$
- 42) Determine y grafique la homotecia del $\triangle DEF$ determinado por los puntos $D(-1,4), E\left(3,\frac{7}{2}\right), F\left(\frac{-1}{2},2\right)$ con una razón de $\frac{3}{4}$ y centro $(2,2)$
- 43) Determine y grafique la homotecia del cuadrado $ABCD$ determinado por los puntos: $A(-4,-3), B(-3,-2), C(-4,-1), D(-5,-2)$ con una razón de $\frac{5}{2}$ y centro $(-2,-1)$
- 44) Construya una homotecia sobre el $\triangle DEF$ determinado por $D(-1,4), E\left(3,\frac{7}{2}\right), F\left(\frac{-1}{2},2\right)$ y centro $(-2,-1)$, de modo que los lados del triángulo resultante sean el triple del original.
- 45) Grafique la homotecia del triángulo ABC de coordenadas $A(-4,2), B(-2,1), C(-1,5)$ con un razón de $0,5$ centro en el punto $(6,3)$
- 46) Grafique la homotecia del $\square ABCD$, con un razón de -1 y centro en el punto $(6,1)$, dadas las coordenadas $A(2,-2), B(3,-1), C(6,-1), D(5,-4)$
- 47) Construya una homotecia del $\triangle ABC$ con coordenadas $A(-2,3), B(0,3), C(0,0)$ con una razón de $-3/5$ y centro ubicado en $(2,3)$
- 48) Construya una homotecia del $\square ABCD$ con coordenadas $A(2,5), B(4,6), C(7,4), D(6,4)$, con una razón de $-3/2$ y centro ubicado en $(4,3)$

- 49) De acuerdo con los datos de la figura, donde se representa una homotecia de centro D. Si $AB = 4$; $AC = 3,61$; $A_1B_1 = 2,4$; determine $m\overline{A_1C_1}$

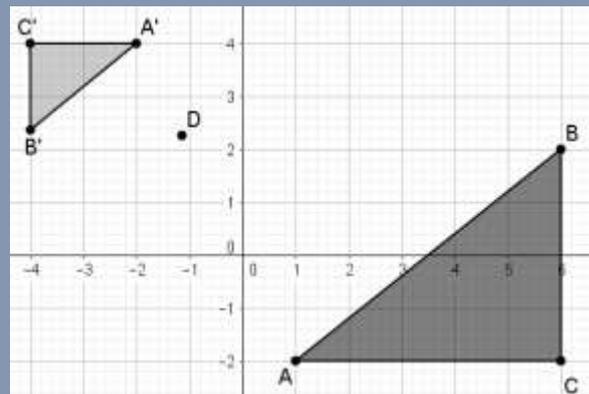


- 50) La figura adjunta representa una homotecia de centro D. Según los datos proporcionados, conteste:

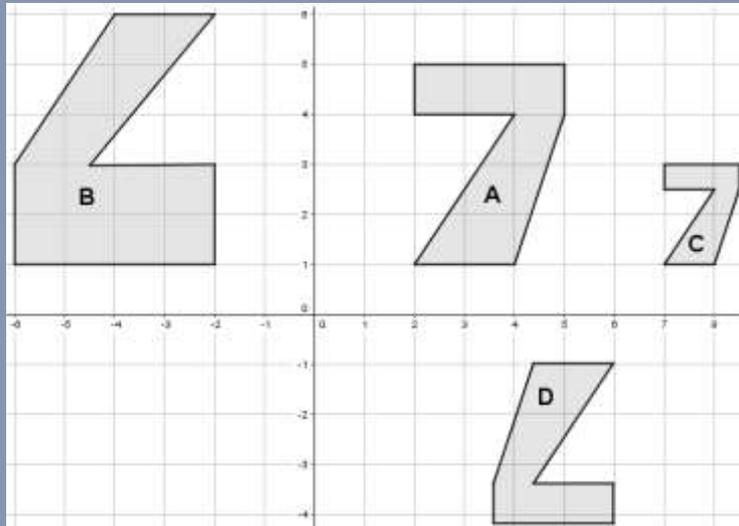


- (a) Si $A_1B_1 = \frac{3}{2}$; determine $m\overline{A_1C_1}$
 (b) Si $m\angle ABC = 56^\circ$, determine la $m\angle C_1$

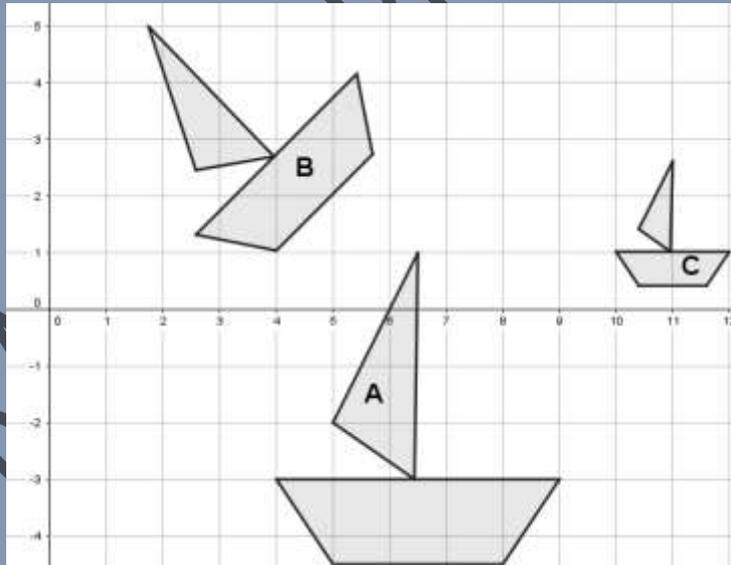
- 51) De acuerdo con los datos de la figura, al ΔABC se le aplica una homotecia de centro D, con lo que se obtiene el $\Delta A'B'C'$. Determine la razón de homotecia del ΔABC con respecto al $\Delta A'B'C'$



- 52) Determine cuáles figuras son homotecias de la figura A



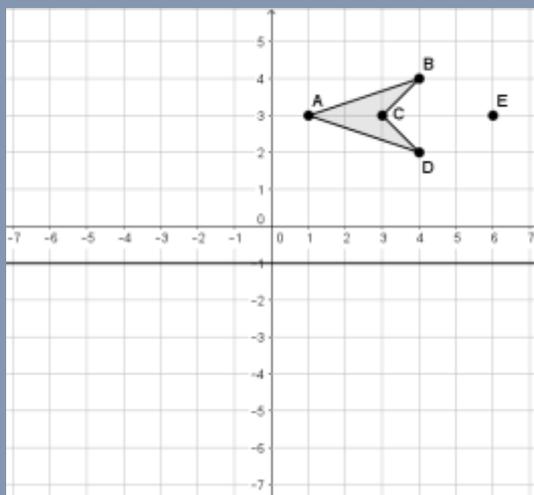
- 53) Determine el barco que es resultado de una homotecia de barco A.



Combinación de transformaciones

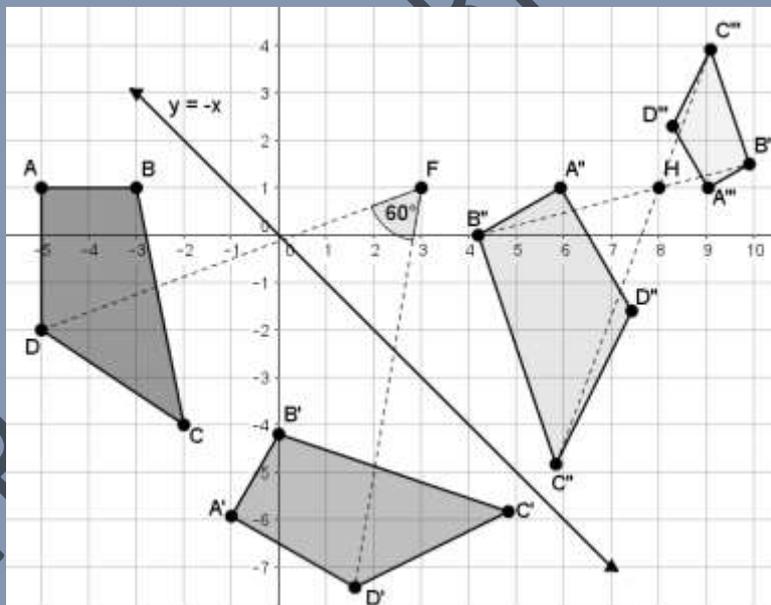
- 54) Al punto M (2,3) se le aplica una traslación de vector $(-3, 2)$. Luego se le aplica una reflexión sobre la recta $y = \frac{x+11}{3}$. Determine las coordenadas del punto resultante.
- 55) Al punto M $(-1, 2)$ se le aplica una rotación con centro $(1, 4)$ y ángulo 90° en sentido antihorario. Luego se le aplica una traslación de vector $(4, 0)$. Determine las coordenadas del punto resultante.

- 56) Según los datos de la figura, construya la homotecia del $\square ABCD$ con centro $(6,3)$ y constante 2 , a ese cuadrilátero que resulta, aplíquelo una reflexión respecto la recta $y = -1$. Grafique ambas transformaciones.



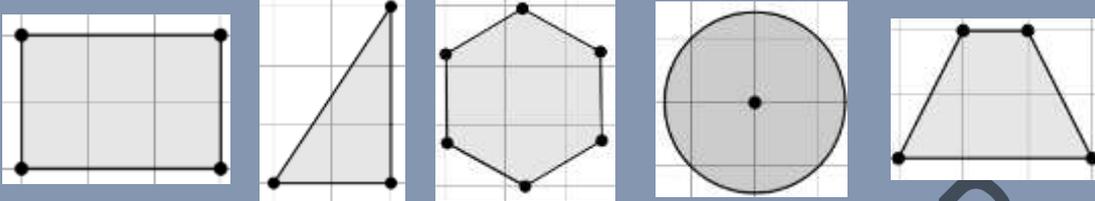
- 57) Al $\square ABCD$ se le aplican una serie de transformaciones hasta obtener el cuadrilátero cuyo vértice A''' tiene coordenadas $(9,1)$ y $AB=2 \cdot A'''B'''$ tal como lo detalla la figura.

- Indique qué transformaciones fueron aplicadas en cada caso.
- Determine el perímetro del último cuadrilátero.



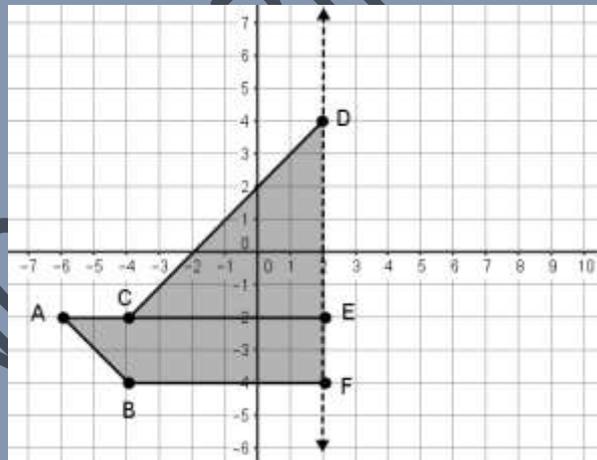
REPASE

A. En cada caso determine la cantidad de ejes de simetría que presenta la figura.



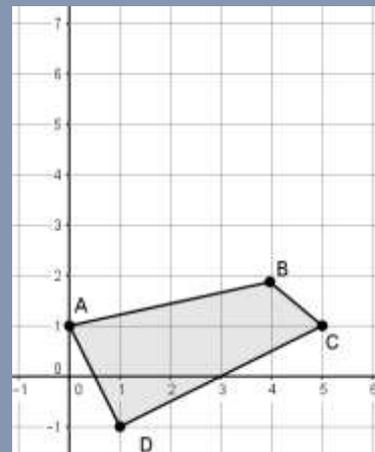
B. La figura adjunta destacada con gris, se refleja sobre la recta $x = 2$. Según la información proporcionada, determine lo que se le solicite.

- (1) Las coordenadas del punto homólogo a C _____
- (2) Las coordenadas del punto homólogo a A _____
- (3) La medida del segmento homólogo a \overline{AB} _____
- (4) El área del $\triangle C'E'D'$ que es imagen del $\triangle CED$ _____
- (5) La medida del segmento homólogo a \overline{BF} _____



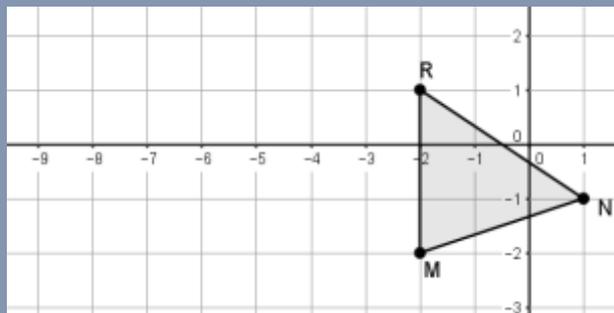
C. En la figura adjunta el cuadrilátero ABCD se refleja sobre la recta $y = 3$. Según la información proporcionada, determine lo que se le solicite.

- (1) Las coordenadas del punto homólogo a D _____
- (2) Las coordenadas del punto homólogo a C _____
- (3) La medida del segmento homólogo a \overline{DC} _____
- (4) La medida del segmento homólogo a \overline{AD} _____
- (5) Las coordenadas del punto homólogo a A _____



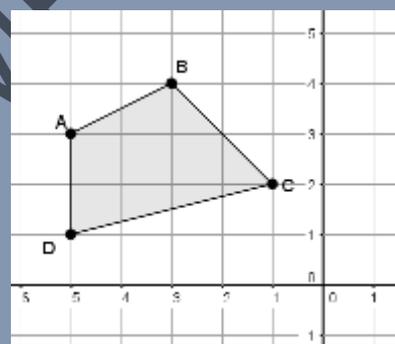
D. En la figura adjunta el triángulo MNR se refleja sobre la recta $x = -4$. Según la información proporcionada, determine lo que se le solicite.

- (1) Las coordenadas del punto homólogo a N _____
- (2) Las coordenadas del punto homólogo a R _____
- (3) Las coordenadas del punto homólogo a M _____
- (4) La medida del segmento homólogo a \overline{RM} _____
- (5) El área del $\Delta R'M'N'$ que es imagen del ΔRMN _____



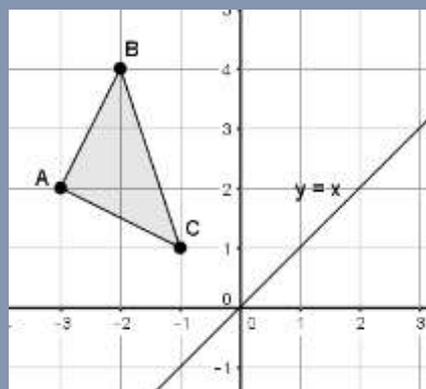
E. Se presenta el cuadrilátero ABCD. En cada caso, construya por aparte la transformación del plano que se le solicita e indique las coordenadas de cada uno de los vértices homólogos de la figura resultante.

- (1) Una traslación 3 unidades hacia arriba y cuatro a la izquierda
- (2) La reflexión sobre el eje "y"
- (3) La reflexión sobre la recta $y = -2$
- (4) La homotecia de centro $(-2, 1)$ y constante -2



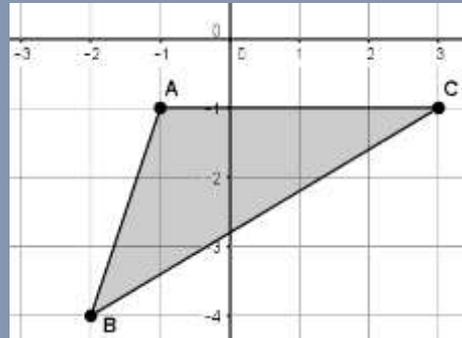
F. Considere el triángulo ABC de vértices $A(3, 2)$, $B(5, 4)$, $C(7, 1)$. A ese triángulo se le aplica una traslación con vector $(-3, -3)$, luego una homotecia de centro $(-4, 3)$ y de constante $\frac{1}{2}$. Grafique ambas transformaciones en un mismo plano y determine las coordenadas de la figura final.

G. Construya la reflexión del triángulo ABC sobre la recta $y = x$. Determine los puntos homólogos.

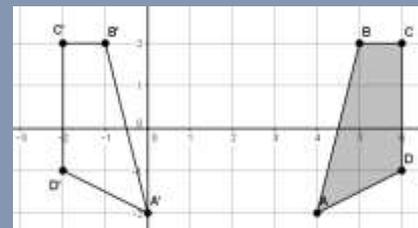
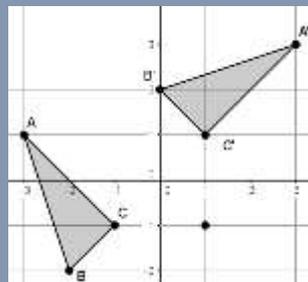
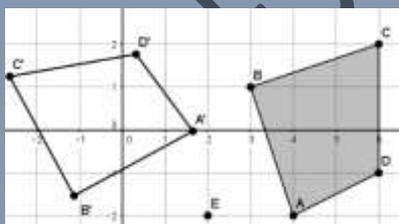
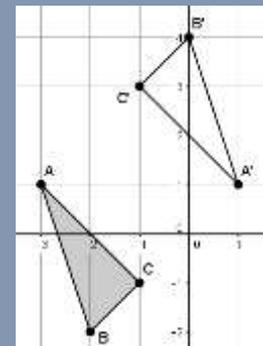
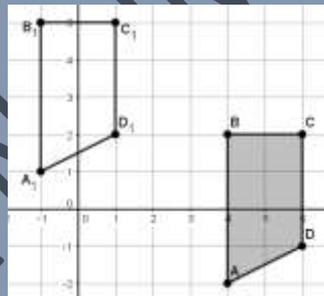
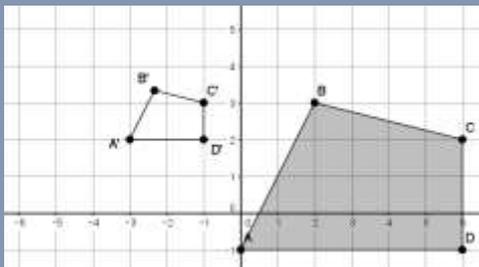


H. Se presenta el triángulo ABC. En cada caso, construya por aparte la transformación del plano que se le solicita e indique las coordenadas de cada uno de los vértices homólogos de la figura resultante.

- (1) Una traslación con vector $(-5, 4)$
- (2) La reflexión sobre el eje "x"
- (3) La reflexión sobre la recta $y = 1$
- (4) La homotecia de centro $(1, 1)$ y constante $-0,5$
- (5) La homotecia de centro $(4, -6)$ y constante $\frac{3}{2}$



I. En cada caso, determine qué transformación del plano se realizó, para que, de la figura sombreada, se obtuviera la otra. En el caso ser una traslación, indique el vector utilizado. Si es una homotecia, señale el vértice y determine la constante. Si se trata de una rotación, especifique el sentido (horario o antihorario). Para las reflexiones, escriba la recta sobre la que se reflejan las figuras.



Selección única: SIMETRÍA Y TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

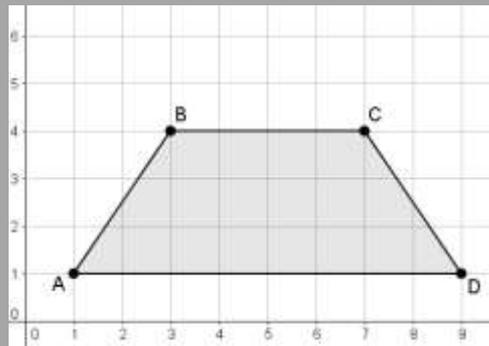
- 1) Considere las siguientes proposiciones
- I. La recta que contiene la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles, es un eje de simetría
 - II. Una diagonal del un rectángulo es un eje de simetría

De ellas, cuáles son verdaderas

- (A) Solo la I (B) Solo la II
 (C) Ambas (D) Ninguna

Analice el siguiente escenario:

Considere el trapecio ABCD



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 4 y 5

- 2) En la figura, el eje de simetría pasa por los puntos

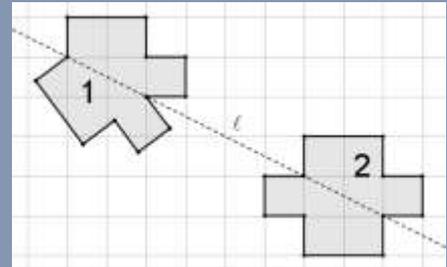
- (A) $\left(2, \frac{5}{2}\right), \left(8, \frac{5}{2}\right)$ (B) (1,1), (7,4)
 (C) (5,1), (5,4) (D) (9,1), (3,4)

- 3) Al tomar en cuenta el único eje de simetría del trapecio, el homólogo de (3,2) es

- (A) (6,3) (B) (7,2)
 (C) (3,4) (D) (-3,-2)

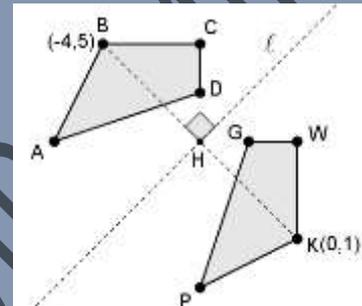
4) Según la figura adjunta, ¿para cuál o cuáles polígonos, la recta l es un eje de simetría?

- (A) Polígono 1 (B) Polígono 2
 (C) Polígonos 1 y 2 (D) Ninguno



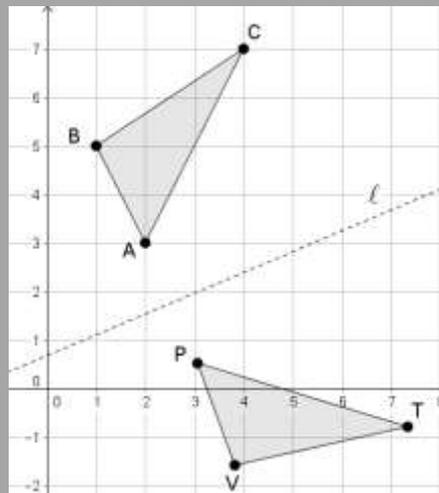
5) En la figura, los polígonos son simétricos respecto a la recta l . Las coordenadas del punto H corresponde a

- (A) $(-2,2)$ (B) $(-4,6)$
 (C) $(-2,3)$ (D) $(0,0)$



Analice el siguiente escenario:

En la representación gráfica, los triángulos se reflejan sobre la recta l



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 8 y 9

6) La medida de \overline{PT} corresponde a

- (A) $2\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{5}$
 (C) $\sqrt{6}$ (D) $\sqrt{10}$

7) Considere las siguientes proposiciones

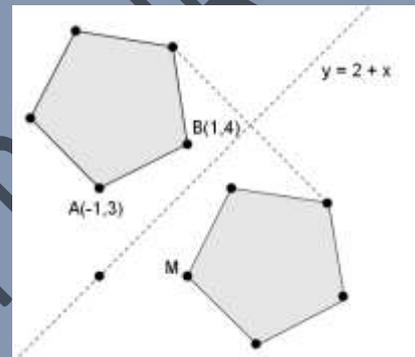
- I. $\triangle ABC \cong \triangle PVT$
- II. $\sphericalangle T$ es homólogo al $\sphericalangle C$

De ellas, son verdaderas

- | | |
|---------------|----------------|
| (A) Solo la I | (B) Solo la II |
| (C) Ambas | (D) Ninguna |

8) En la representación gráfica adjunta, los polígonos se reflejan con respecto a la recta $y = 2 + x$. Las coordenada de M corresponde a

- | | |
|------------|-----------|
| (A) (1,1) | (B) (2,3) |
| (C) (1,-3) | (D) (0,2) |

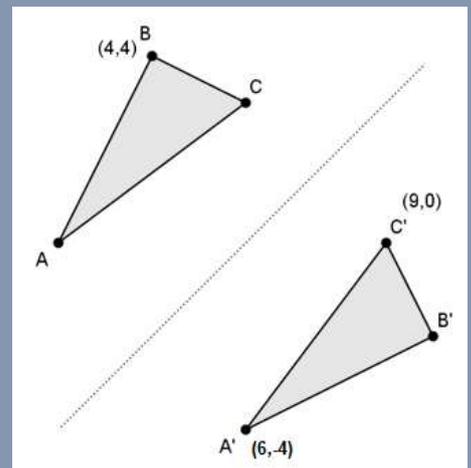


9) La imagen de A (-3,-2) que resulta de ser reflejado el punto A con respecto a la recta $x + y = -3$ corresponde a

- | | |
|------------|------------|
| (A) (-1,0) | (B) (3,2) |
| (C) (-3,2) | (D) (0,-1) |

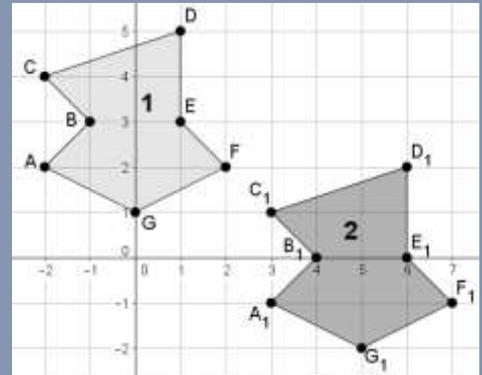
10) En la figura adjunta el triángulo $A'B'C'$ es la imagen del $\triangle ABC$ que resulta de la reflexión sobre la recta $y = x - 6$. La medida de \overline{AB} corresponde a

- | | |
|----------------|-----------------|
| (A) $\sqrt{5}$ | (B) $3\sqrt{2}$ |
| (C) 20 | (D) $2\sqrt{5}$ |



- 11) De acuerdo con la figura adjunta, el vector de traslación de la figura 1 con respecto a la figura 2 corresponde a

- (A) $(5, -3)$ (B) $(-5, 3)$
 (C) $(-5, -3)$ (D) $(5, 3)$

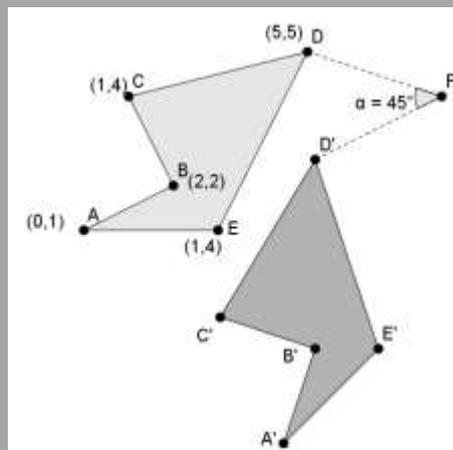


- 12) El $\triangle ABC$ se traslada de modo que se obtiene el $\triangle A'B'C'$, donde C es homólogo a C' y B' es la imagen de B. Las coordenadas del $\triangle ABC$ son $A(3, -3), B(1, 1), C(4, 4)$. Si $A'(-3, -4)$, entonces el punto C' corresponde a

- (A) $(0, 3)$ (B) $(-2, 3)$
 (C) $(-5, 0)$ (D) $(3, 4)$

Analice el siguiente escenario:

A la figura ABCDE se le aplica una transformación con centro F obteniendo el polígono A'B'C'D'E'



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 15 y 16

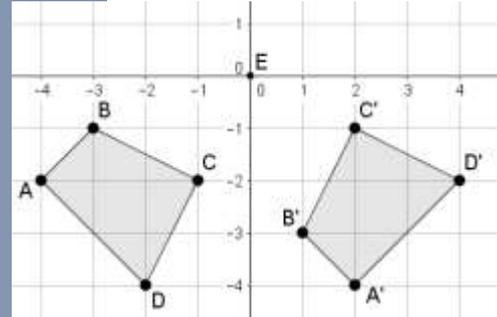
- 13) La transformación aplicada corresponde a

- (A) rotación antihoraria (B) homotecia directa
 (C) rotación horaria (D) homotencia indirecta

14) La medida en grados de $\angle BFB'$ es la siguiente

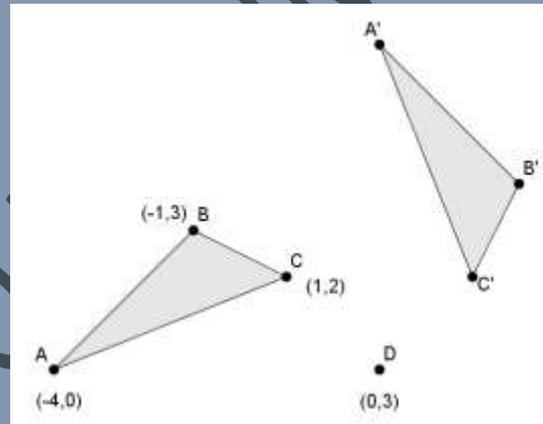
□	□	□	□	□	□	,	□	□
---	---	---	---	---	---	---	---	---

15) En la figura adjunta, al $\square ABCD$ se le aplica una transformación, con lo que se obtiene su imagen, dada por $\square A'B'C'D'$. ¿Cuál fue la transformación que se realizó?



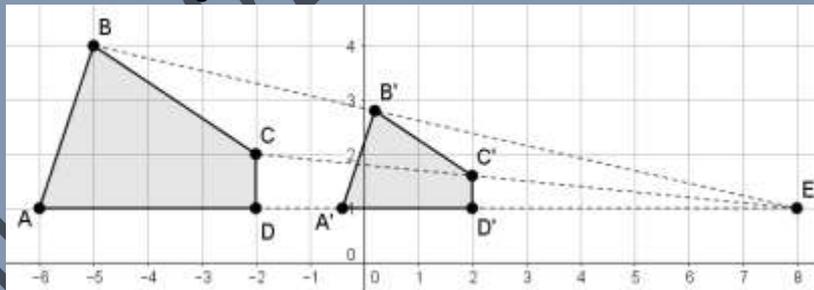
- | | |
|---------------|----------------|
| (A) reflexión | (B) traslación |
| (C) rotación | (D) homotecia |

16) En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es rotado en sentido horario con un ángulo de 90° y centro $(0,3)$, con lo que se obtiene el $\triangle A'B'C'$. Las coordenadas del punto B' son



- | | |
|--------------|-------------|
| (A) $(5,2)$ | (B) $(3,7)$ |
| (C) $(1,-2)$ | (D) $(6,4)$ |

17) Considere la figura:

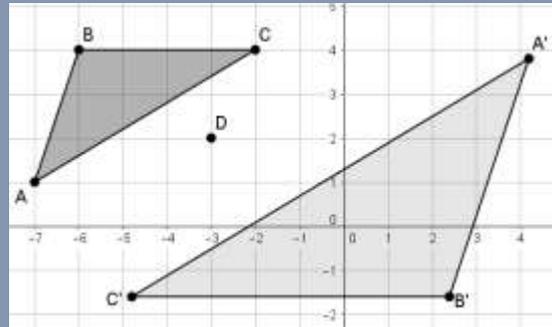


Según los datos proporcionados, $\square ABCD$ se le aplica una homotecia de centro E , obteniendo el $\square A'B'C'D'$. Si las coordenadas de A' son $\left(\frac{-2}{5}, 1\right)$, entonces la razón de homotecia del $\square ABCD$ con respecto al $\square A'B'C'D'$ es

- | | |
|-------------------|--------------------|
| (A) $\frac{3}{5}$ | (B) $\frac{1}{2}$ |
| (C) 2 | (D) $\frac{-3}{5}$ |

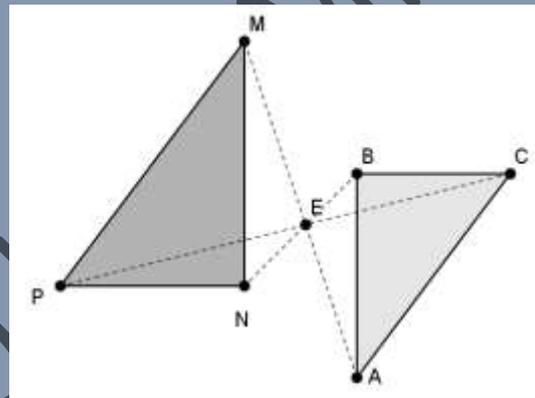
- 18) Al $\triangle ABC$ de la figura se le aplicó una homotecia de razón "k" y centro D, con lo que se obtuvo el $\triangle A'B'C'$. Por tanto es cierto que

(A) $k = -1$ (B) $k > 1$
 (C) $k < -1$ (D) $-1 < k < 0$



- 19) En la figura adjunta al $\triangle PMN$ se le aplica una homotecia de centro E, donde $\frac{PE}{EC} = \frac{6}{5}$, $BC = 3$ cm, $AB = 4$ cm. La medida de \overline{MN} corresponde a

(A) $\frac{18}{5}$ cm (B) $\frac{24}{5}$ cm
 (C) 6 cm (D) $\frac{6}{5}$ cm



- 20) Si se transforma el triángulo ABC con vértices A (-5,-2), B(-3,2), C (-1,-4) mediante una homotecia centrada en (1,0) y de razón $\frac{5}{2}$ ¿Cuáles son las coordenadas del vértice homólogo a B?

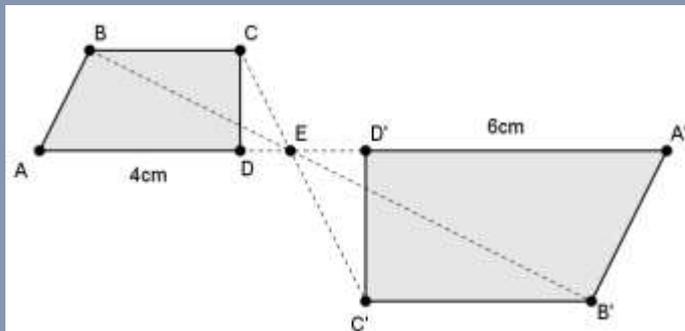
(A) (-14,-5) (B) (-4,-10)
 (C) (-6,2) (D) (-9,5)

21) En la figura adjunta, al ABCD se le aplica una homotecia de centro E.

Considere las siguientes proposiciones:

I. $\frac{\text{Perímetro } A'B'C'D'}{\text{Perímetro } ABCD} = \frac{3}{2}$

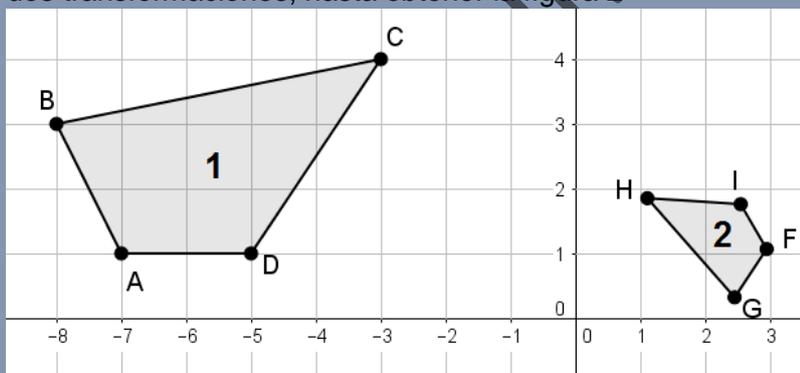
II. $\frac{C'E}{CE} = \frac{2}{3}$



De ellas, son verdaderas

- | | |
|-------------|----------------|
| (A) ambas | (B) solo la I |
| (C) ninguna | (D) solo la II |

22) Considere la siguiente representación gráfica donde a la figura 1 se le aplica dos transformaciones, hasta obtener la figura 2

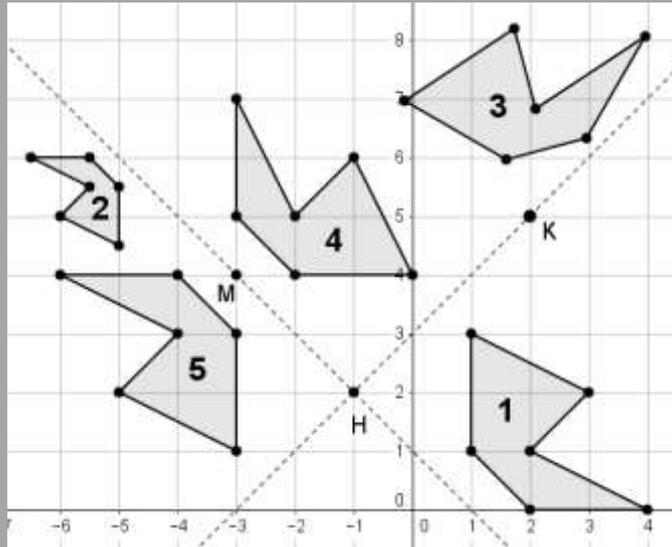


¿Cuáles transformaciones se realizaron?

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| (A) rotación y homotecia | (B) traslación y reflexión |
| (C) homotecia y traslación | (D) reflexión y rotación |

Analice el siguiente escenario:

Considere la representación gráfica



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 25, 26, 27 y 28.

23) ¿Cuál es la transformación aplicada en la figura 1, para obtener la figura 5?

- (A) rotación (B) traslación
(C) reflexión (D) homotecia

24) Al reflejar la figura 1 con respecto a la recta \overline{HK} , se obtiene la figura

- (A) 5 (B) 3
(C) 4 (D) 2

25) Al realizar una homotecia de centro M a la figura 1, se obtiene la figura

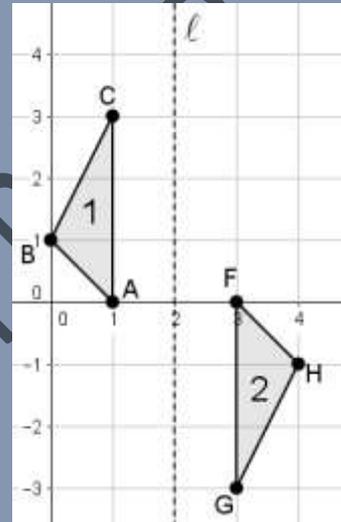
- (A) 5 (B) 3
(C) 4 (D) 2

26) Al realizar una rotación de centro M a la figura 1, se obtiene la figura

- (A) 5 (B) 3
(C) 4 (D) 2

27) De acuerdo con los datos de la figura adjunta, analice las siguientes proposiciones:

- I. La figura 1 se puede obtener de la figura 2 mediante una rotación de 180° con centro en el punto (2,0).
II. La figura 2 se puede obtener de la figura 1 si se aplica primero una reflexión con respecto a la recta ℓ y luego a la figura que se obtiene se le aplica una reflexión con respecto al eje x.



De estas proposiciones son verdaderas

- (A) ambas (B) solo la I
(C) ninguna (D) solo la II

28) Considere las siguientes proposiciones relacionadas a un $\triangle MNR$ al que se le aplica una rotación antihoraria de centro $P(1,5)$ con un ángulo de 90° , obteniendo el $\triangle M'N'R'$

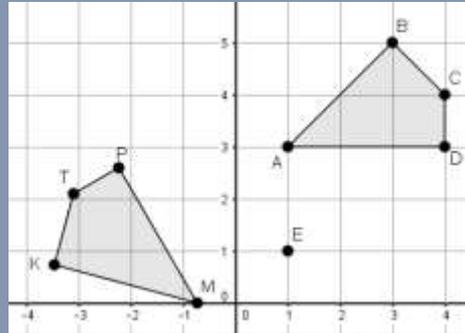
- I. Si las coordenadas del punto N son (-1,2), entonces las coordenadas de su punto homólogo son (4,3)
II. La medida de NR es igual a la medida de $R'N'$

De estas proposiciones son verdaderas

- (A) ambas (B) solo la I
(C) ninguna (D) solo la II

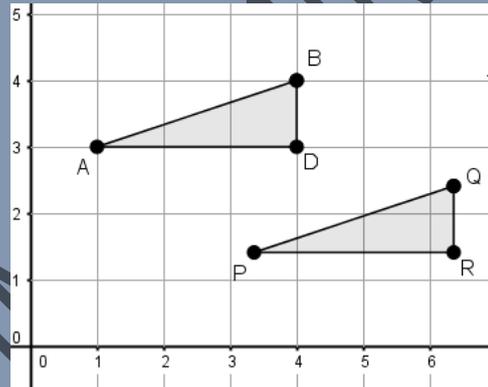
- 29) En la figura adjunta, al $\square ABCD$ se le aplica una rotación de 120° y centro E. La medida de \overline{PT} corresponde a

(A) 1 (B) 3
(C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$



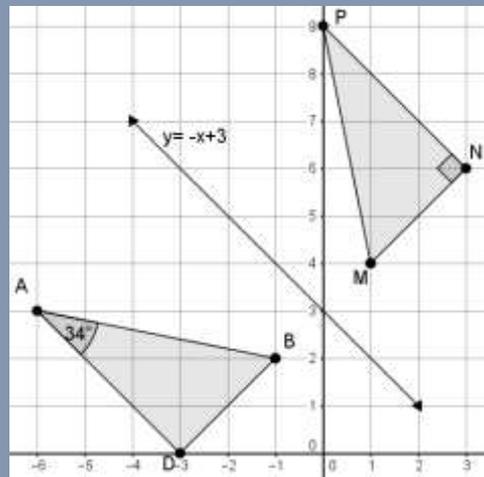
- 30) En la figura adjunta, al $\triangle ABC$ se le aplica una traslación, de modo que se obtiene el $\triangle PQR$. El área del $\triangle PQR$ corresponde a

(A) 1,5 (B) 3
(C) 7 (D) 3,5



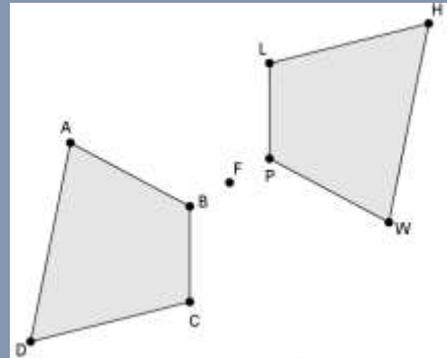
- 31) En la figura adjunta, al $\triangle ADB$ se le aplica una reflexión sobre la recta $y = -x + 3$ de modo que se obtiene el $\triangle PMN$. La medida del $\angle PMN$ corresponde a

(A) 56° (B) 90°
(C) 34° (D) 17°



32) Considere la figura adjunta, que representa una homotecia de centro F y razón -1 . El lado congruente a \overline{DC} corresponde a

- (A) \overline{PW}
- (B) \overline{LP}
- (C) \overline{HW}
- (D) \overline{LH}

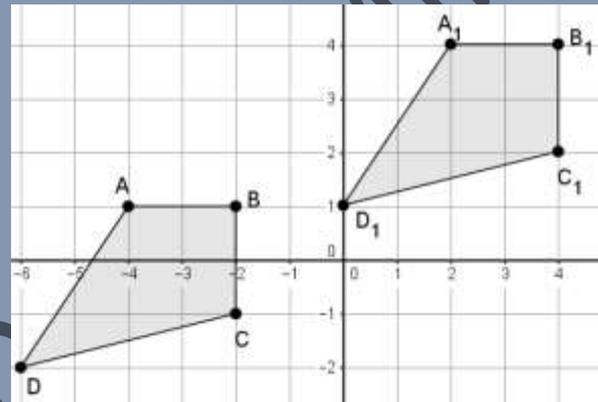


33) Considere las siguientes proposiciones referidas al $\square ABCD$ y su respectiva traslación $\square A_1B_1C_1D_1$

- I. El área del $\square ABCD$ es igual al área del $\square A_1B_1C_1D_1$
- II. El perímetro del $\square ABCD$ es igual al perímetro del $\square A_1B_1C_1D_1$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

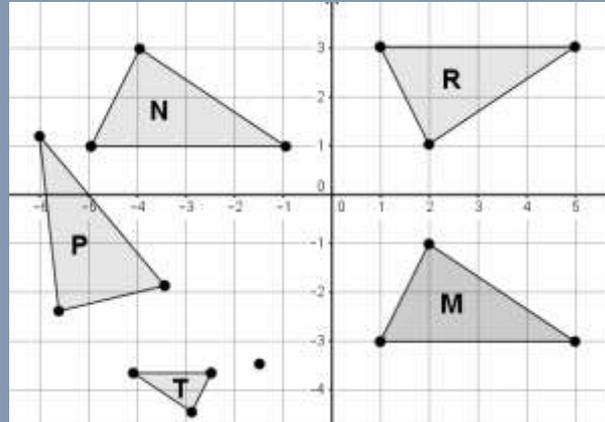
- (A) solo la I
- (B) solo la II
- (C) ninguna
- (D) ambas



34) Si al punto $(-2,5)$ se le aplica una traslación de vector $(-6,1)$, las coordenadas de su punto homólogo corresponden a .

- (A) $(-4,4)$
- (B) $(8,-6)$
- (C) $(4,-4)$
- (D) $(-8,6)$

En la figura adjunta, al triángulo M se le aplica diversas transformaciones. De acuerdo con la información proporcionada, conteste las preguntas 37, 38 y 39



35) La figura que se obtiene de reflejar el triángulo M sobre el eje de las abscisas corresponde a

- | | |
|-------|-------|
| (A) N | (B) P |
| (C) R | (D) T |

36) La figura que se obtiene de aplicar una homotecia al triángulo M corresponde a

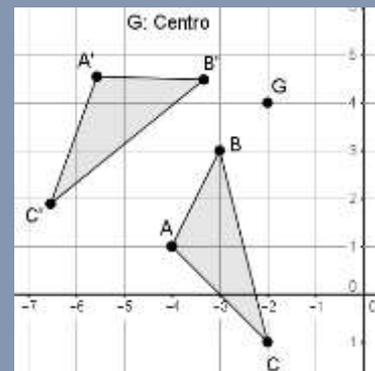
- | | |
|-------|-------|
| (A) N | (B) P |
| (C) R | (D) T |

37) La figura que se obtiene de trasladar el triángulo M corresponde a

- | | |
|-------|-------|
| (A) N | (B) P |
| (C) R | (D) T |

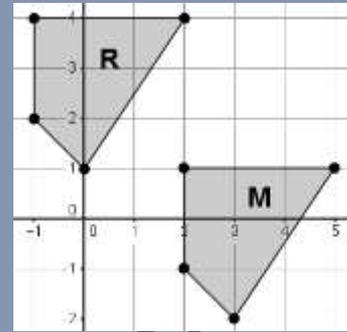
38) En la figura adjunta, la transformación aplicada al $\triangle ABC$ para obtener el $\triangle A'B'C'$, corresponde a

- | | |
|--------------------------|----------------|
| (A) rotación antihoraria | (B) traslación |
| (C) rotación horaria | (D) homotecia |



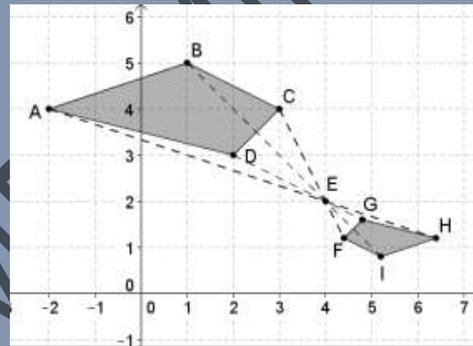
39) De acuerdo con los datos de la figura adjunta, al trasladar el cuadrilátero R, se obtiene el cuadrilátero M. El vector de traslación utilizado es

- (A) $(-3,3)$ (B) $(0,3)$
 (C) $(3,-3)$ (D) $(-3,-3)$



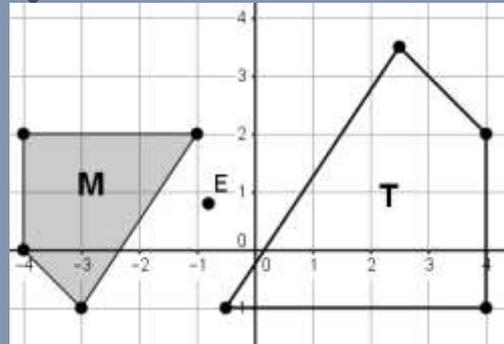
40) Al $\square ABCD$ de la figura adjunta, se le aplicó una homotecia de razón "k" y centro E, con lo que se obtuvo el $\square FGHI$. Por tanto, es cierto que

- (A) $k < -1$ (B) $0 < k < 1$
 (C) $-1 < k < 0$ (D) $k > 1$



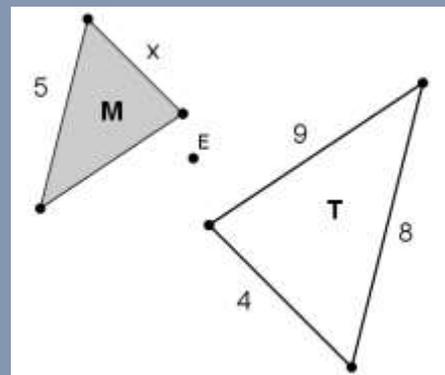
41) Al cuadrilátero de la figura adjunta M, se le aplicó una homotecia de centro E, de modo que se obtuvo la figura T. Según la información proporcionada, la razón de homotecia corresponde a

- (A) $\frac{-2}{3}$ (B) $\frac{-3}{2}$
 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$



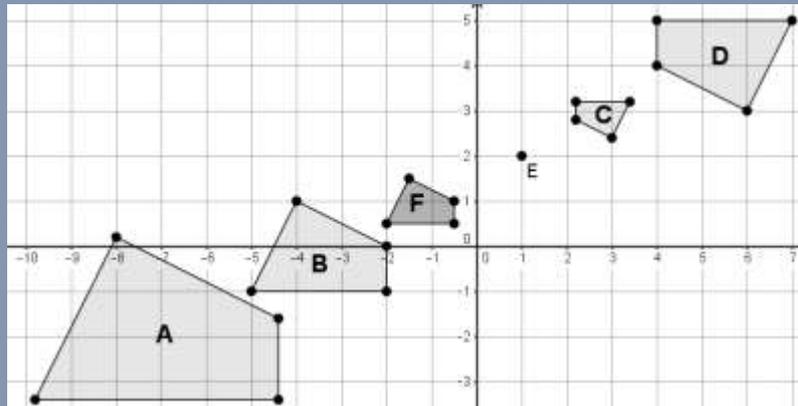
42) Al cuadrilátero de la figura adjunta M, se le aplicó una homotecia de centro E, de modo que se obtuvo la figura T, entonces el valor de "x" corresponde a

- (A) $\frac{20}{9}$ (B) $\frac{5}{2}$
 (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{9}{8}$



En la figura adjunta, al polígono B se le aplica diversas homotecias de centro $E(1,2)$ y con razón de "k".

De acuerdo con la información proporcionada, conteste las preguntas 45, 46 y 47



43) El polígono que resultó de aplicar una homotecia a B, donde $0 < k < 1$, es

- | | |
|-------|-------|
| (A) A | (B) F |
| (C) C | (D) D |

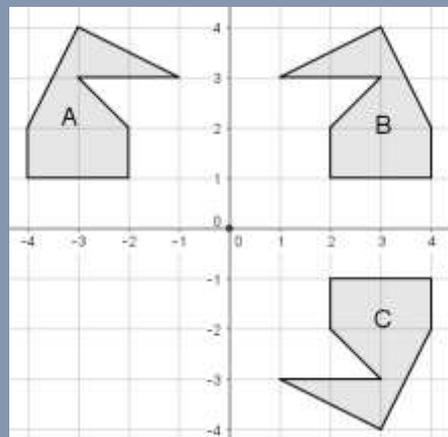
44) El polígono que resultó de aplicar una homotecia a B, donde $k > 1$, es

- | | |
|-------|-------|
| (A) A | (B) F |
| (C) C | (D) D |

45) El polígono que resultó de aplicar una homotecia a B, donde $k = -1$, es

- | | |
|-------|-------|
| (A) A | (B) F |
| (C) C | (D) D |

Considere la representación adjunta para responder los ítemes 48 y 49



- 46) Considere las siguientes proposiciones:
- I. La figura C se obtiene de aplicar una homotecia, de centro en el origen, a la figura A
 - II. La figura B se obtiene al aplicar una reflexión sobre el eje “x” a la figura A

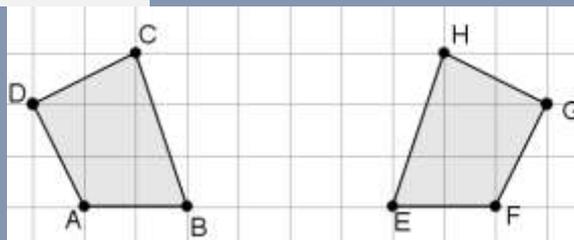
De ellas, son verdaderas:

- (A) ambas
- (B) ninguna
- (C) solo la II
- (D) solo la I

- 47) La figura C se puede obtener al aplicar a la figura B la transformación en el plano denominada

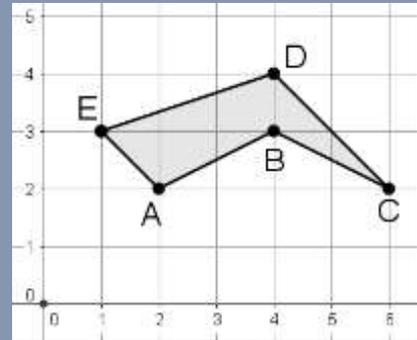
- (A) rotación
- (B) homotecia
- (C) traslación
- (D) reflexión

- 48) Considere la figura adjunta, donde el cuadrilátero ABCD fue obtenido al reflejar el cuadrilátero EFGH sobre un eje. Según la información proporcionada, ¿cuál es la distancia del punto D al eje de simetría?



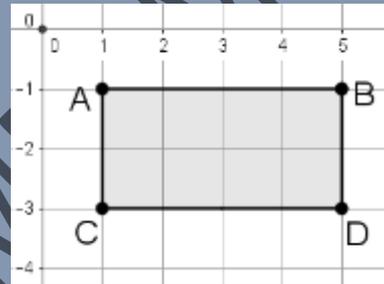
- (A) 10
- (B) 5
- (C) 4
- (D) 8

- 49) Considere la representación gráfica adjunta, donde al polígono ABCDE se le aplica una traslación de 2 unidades hacia arriba y 3 unidades a la izquierda, para obtener el polígono A'B'C'D'E'. Según la información proporcionada, las coordenadas del punto C' corresponden a



- (A) (8, -1) (B) (3, 4)
(C) (2, 3) (D) (3, 2)

Considere la representación adjunta para responder los ítems 52, 53 y 54; en la cual al rectángulo ABDC se le aplica una homotecia con centro en $(-1, 0)$ y razón de homotecia $k = 4$, de modo que se obtiene el rectángulo A'B'D'C'.



- 50) Según la información proporcionada, el área del $\square A'B'D'C'$ corresponde a
- (A) 64 (B) 128
(C) 32 (D) 8

- 51) Según la información proporcionada, el perímetro del $\square A'B'D'C'$ corresponde a

- (A) 12 (B) 48
(C) 3 (D) 24

- 52) Según la información proporcionada, las coordenadas del punto B' corresponden a

- (A) (7, -4) (B) (23, -4)
(C) (7, -12) (D) (23, -12)

Conocimientos:
Visualización
Espacial

Habilidades:

14. Identificar la superficie lateral, la base, la altura, el radio y el diámetro de la base y el vértice de un cono circular recto.
15. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un cono circular recto y características métricas de ellas.
16. Reconocer elipses, parábolas e hipérbolas en diferentes contextos.
17. Plantear y resolver problemas que involucren secciones de un cono mediante planos paralelos a la base.

• El cono

Diversas construcciones arquitectónicas tienen forma de cono circular recto, desde diseños modernos de grandes ciudades, hasta casas de nuestros antepasados. También artefactos de producción tienen diseños cónicos.

Un cono se puede definir como un cuerpo sólido que se obtiene de girar un triángulo rectángulo sobre el eje formado por uno de sus catetos.



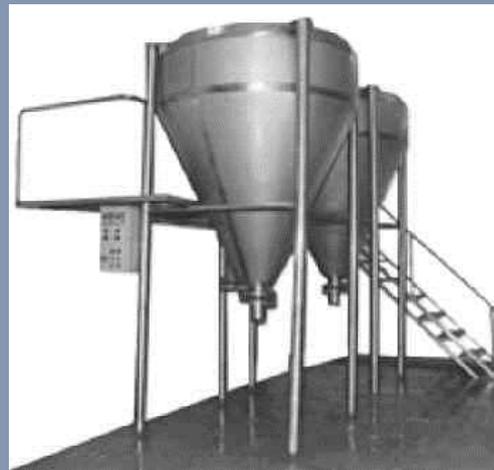
Indonesia



Construcción inca

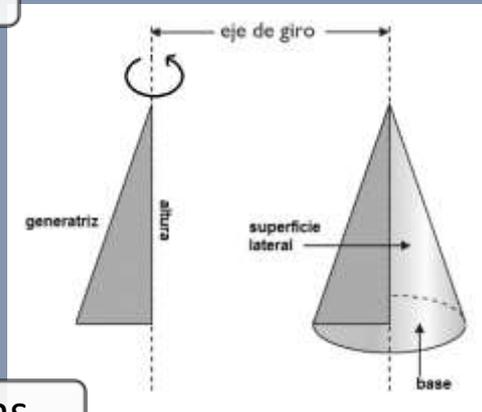
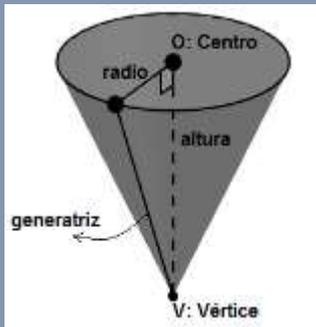


Catedral en Brasil



Tanque de proceso industrial

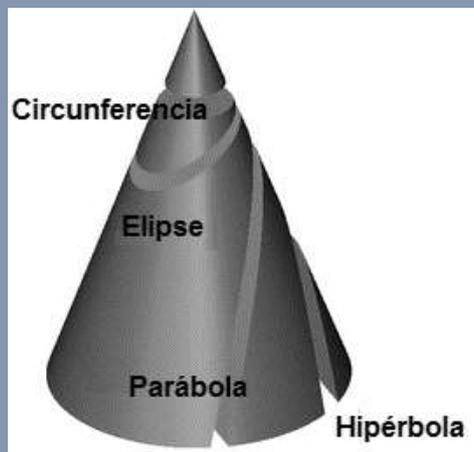
• Partes de un cono



• Secciones cónicas

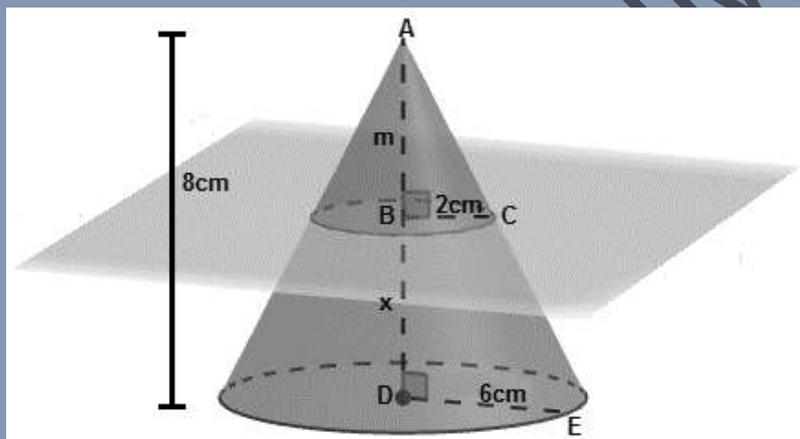
Cuando un cono es atravesado por un plano, se forman diversas secciones planas, según la posición del plano con respecto al cono

Plano	Nombre de la sección	Ilustración
Paralelo al plano de la base del cono	Circunferencia	
Oblicuo con respecto a la base del cono (sin cortarla)	Elipse	
Oblicuo con respecto a la base del cono, paralelo a la generatriz (sin pasar por el vértice)	Parábola	
Perpendicular al plano de la base del cono, sin pasar por el vértice	Hipérbola	



Ejemplo 1

A un cono de altura 8 cm y radio 6 cm se le hace un corte paralelo a la base, el cual determina una circunferencia de radio 2 cm. ¿A cuánto dista dicha sección con respecto del plano de la base?

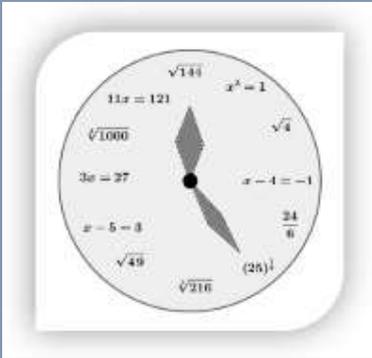


Note que por criterio ángulo – ángulo $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, por lo que se cumple la siguiente proporción:

$$\frac{8}{6} = \frac{m}{2} \Rightarrow m = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow x = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Por tanto, el corte dista $\frac{16}{3}$ cm de la base.



Tiempo para practicar 3.3

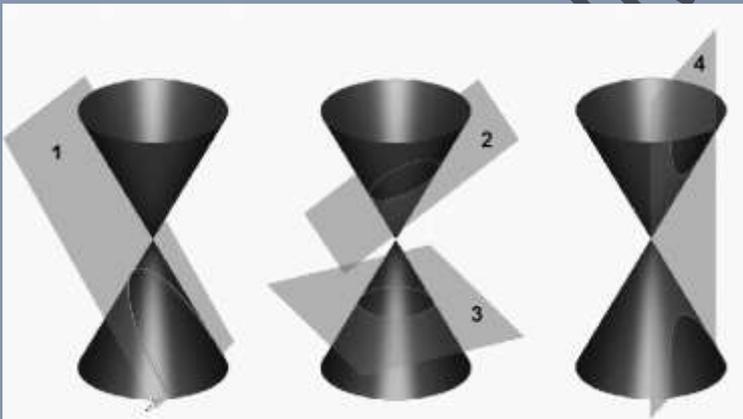
1) En cada caso determine si la oración es verdadera o falsa

Al intersectarse un plano oblicuo con respecto a la base de un cono que es paralelo a la generatriz y que pasa por el vértice, se obtiene una parábola.

Dos planos β y μ intersecan un cono. Ambos planos son paralelos a la base del cono. Los planos distan a 2cm entre sí. Entonces las secciones formadas por cada plano y el cono, son congruentes entre sí

La elipse es una sección cónica que resulta de interseca de forma perpendicular un plano de la base del cono, sin pasar por el vértice.

2) Indique el nombre de cada sección cónica que forma el plano al intersectarse con el cono.



Plano 1 _____

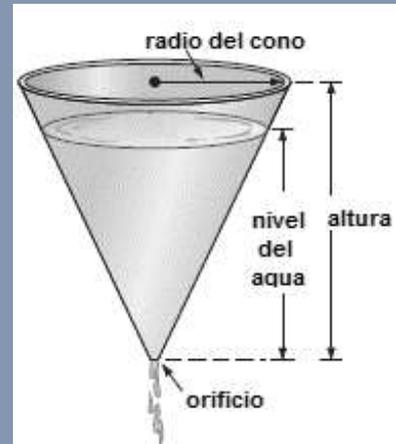
Plano 2 _____

Plano 3 _____

Plano 4 _____

3) A un cono de altura 10 cm y radio 8 cm se le hace un corte paralelo a la base, el cual determina una circunferencia de diámetro 10 cm. ¿A cuánto dista dicha sección con respecto del plano de la base?

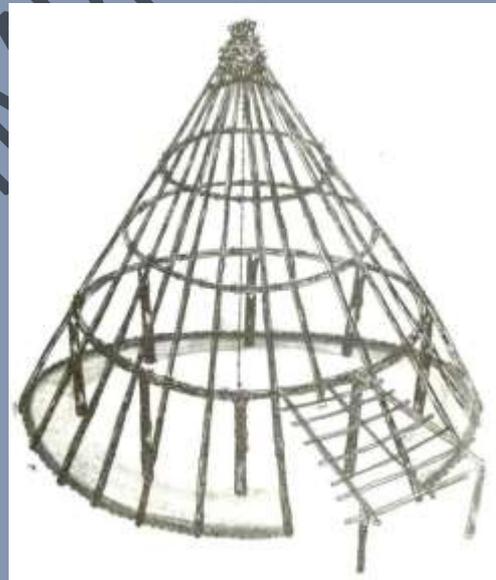
- 4) Un cono invertido de altura 0,8m y generatriz 1m sirve como un contenedor de almacenamiento de agua. En su vértice tiene un orificio por donde se extrae el líquido. En un momento dado la altura que alcanza el agua dentro del cono es de 0,3 m. Determine la medida del radio que se forma en ese instante.



- 5) La altura de un cono es de 12 cm y su radio mide la tercera parte de la altura. Determine el radio de la circunferencia que se obtiene si se hace un corte con un plano paralelo al plano de la base, que dista 5 cm del plano de la base.

- 6) **El Û- suré:** En Costa Rica, el pueblo bribri construía sus casas con una ingeniosa estructura geométrica, donde la base de la planta era circular y el techo cónico hasta el suelo, sostenido por ocho pilares básicos, tres aros estructurales (coronas) y dos entradas. El bejuco real era el sustituto de los clavos en esta vivienda indígena.

La división que forman las circunferencias de

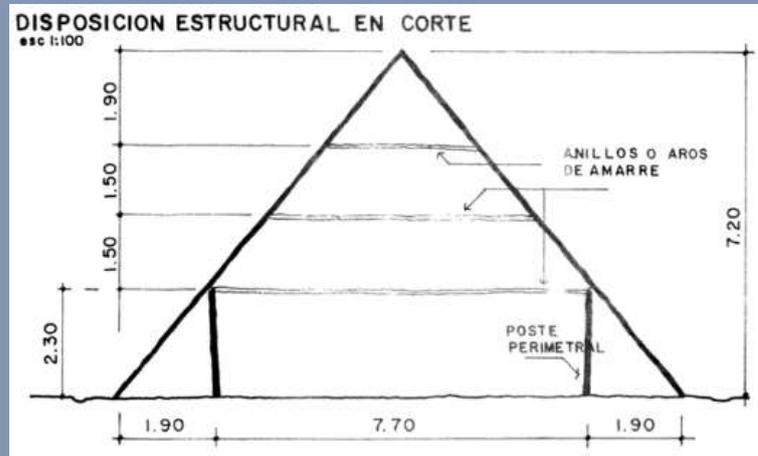


la casa, representan 4 estadios o cielos, según la cosmovisión bribri. Al construir una casa física, automáticamente se construye otra a modo de espejo virtual hacia abajo o supramundo, completando los 8 niveles de la concepción cósmica bribri.

Los investigadores González Cháves y González Vásquez, en su libro "La casa cósmica Talamanqueña y sus simbolismos" (UNED), presentan un plano de una de estas impresionantes construcciones, tal como lo muestra la figura.

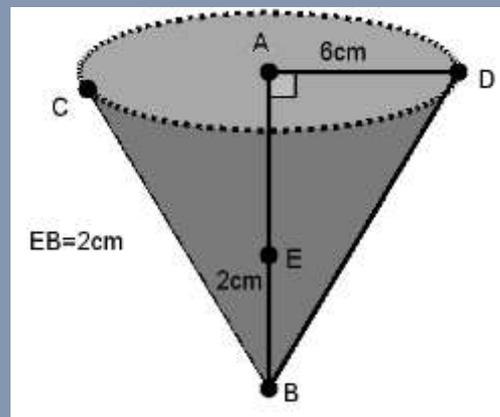
Según la información proporcionada, determine:

- (a) La medida de la altura de la casa
- (b) La medida del radio de la casa
- (c) La medida de la altura a la que se encuentra la circunferencia que se ubica más alta.
- (d) La medida del radio de la circunferencia que se ubica más alta



- 7) Al girar el triángulo ABD, de altura 8 cm se obtiene la figura adjunta, con forma de cono circular recto

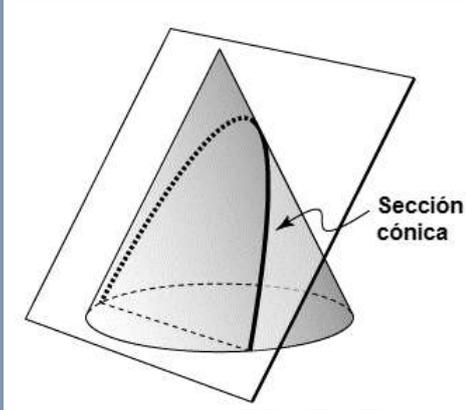
Con base en la información anterior, ¿cuál es la longitud de la sección plana que se forma al intersecar la figura con forma de cono y un plano paralelo a la base que contiene el punto E?



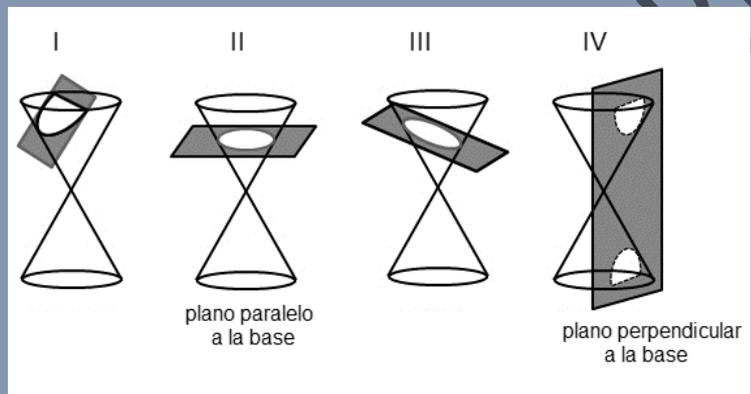
- (A) 3π cm
- (B) $\frac{3}{2}\pi$ cm
- (C) $\frac{9}{4}\pi$ cm
- (D) 4π cm

8) De acuerdo con los datos de la figura adjunta, ¿cuál es el nombre de la sección plana que se obtiene al realizar un corte entre un plano y la superficie cónica, si el corte es oblicuo a la base?

- (A) elipse
- (B) parábola
- (C) circunferencia
- (D) hipérbola



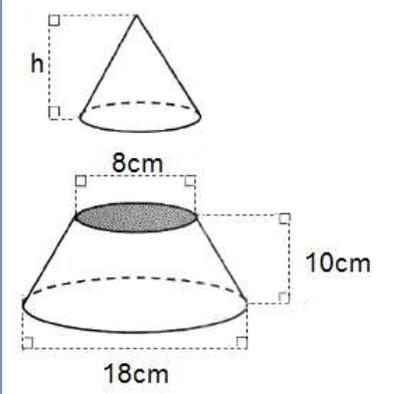
9) Considere la siguiente representación, donde se muestran secciones cónicas.



¿En cuál figura se representa una hipérbola?

- (A) I
- (B) II
- (C) III
- (D) IV

10) La representación adjunta presenta figuras que corresponden a las dos partes obtenidas de un cono, después de realizarle un corte plano paralelo a la base. Según la información proporcionada, ¿Cuál es el valor de "h"?



Respuestas Relaciones y Álgebra

1.1 Función Inversa	1.2 Función Exponencial																																													
<p>1) (a) $h^{-1}(x) = 3 - x$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{5}$ (c) $g^{-1}(x) = x+7$ (d) $h^{-1}(x) = \frac{-7x+42}{5}$ (e) $h^{-1}(x) = x + \frac{1}{3}$ (f) $h^{-1}(x) = x$ (g) $p^{-1}(x) = 5x$ (h) $t^{-1}(x) = \frac{x+1}{8}$ (i) $g^{-1}(x) = \frac{6}{5} - x$</p> <p>2) (a) $A =]-\infty, \frac{1}{2}]$ o $A = [\frac{1}{2}, +\infty[$ (b) $G =]-\infty, 0]$ o $G = [0, +\infty[$ (c) $H =]-\infty, \frac{-1}{2}]$ o $H = [\frac{-1}{2}, +\infty[$ (d) $H =]-\infty, \frac{5}{2}]$ o $H = [\frac{5}{2}, +\infty[$</p> <p>3) (a) $]-\infty, 3]$ o $A = [3, +\infty[$ (b) $]-\infty, 0]$ o $[0, +\infty[$ (c) \mathbb{R} (d) $]-\infty, 1]$</p> <p>4) (a) no (b) sí (c) sí (d) sí (e) no (f) sí</p> <p>5) $\frac{-3}{2}$ 6) $\frac{5}{3}$ 7) 0 8) $f^{-1}(x) = -5x+8$ $f(x) = \frac{-x+8}{5}$</p> <p>9) $f^{-1}(x) = -4x+7$ 10) $\frac{13}{2}$ 11) $]-\frac{4}{3}, 0]$</p> <p>12) $L(P) = \frac{P+42,8}{1,7}$ 13) $h(T) = -500(T-25)$</p> <p>14) Hay que comprobar que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$</p> <p>15) (a) $g^{-1}(x) = \frac{-1 + \sqrt{14-x}}{2}$ (b) $g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ (c) $g^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{2}$ (d) $g^{-1}(x) = \frac{1 + \sqrt{1-8x}}{4}$</p> <p>17) (a) $g(x) = \sqrt{x+5}$ (b) $g(x) = \sqrt{x-7}$ (c) $g(x) = \sqrt{x+1}$ (d) $g(x) = -\sqrt{x}$ 18) (a) $y = \sqrt{x-11}-3$ (b) $y = 2\sqrt{x-4}+3$ (c) $y = -\sqrt{x+2}-3$ (d) $y = 3\sqrt{x-6}+15$</p>	<p>2) A 3) B 4) A 5) A 6) C 7) C 8) C 9) A 10) A 11) C 12) $0,34\text{cm}^2$ 13) $36,78$ 14) 30 284,47 15) (a) 64 000 (b) 2 500 16) $1,09\text{cm}^2$ 17) 359 165, 20 18) (a) $P(x) = 40 \cdot 3^{\frac{x}{2}}$ (b) 2 361 960 19) 6 460 000 000 20) (a) $P(t) = P_0 \cdot e^{k \cdot t}$ $k = \frac{\text{porcentaje}}{100}$ (b) 763 aprox</p>																																													
<p>1.2 Función Exponencial</p> <p>1)</p> <table border="1" data-bbox="284 1535 699 1860"> <thead> <tr> <th>Criterio de la función f</th> <th>Domínio</th> <th>Intersección con el eje y</th> <th>Ámbito</th> <th>Monotonía</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$f(x) = 7^x$</td> <td>$]-\infty, \frac{1}{2}]$</td> <td>(0,1)</td> <td>$]0, \sqrt{7}^{\frac{1}{2}}]$</td> <td>crece</td> </tr> <tr> <td>$f(x) = \frac{3^x}{4}$</td> <td>$]0, -\infty[$</td> <td>$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$</td> <td>$[\frac{1}{4}, -\infty[$</td> <td>crece</td> </tr> <tr> <td>$f(x) = (\frac{6}{3})^x$</td> <td>$]-\infty, -\frac{1}{2}]$</td> <td>(0,1)</td> <td>$]0, \frac{3}{5}]$</td> <td>crece</td> </tr> <tr> <td>$f(x) = (6)^{-x}$</td> <td>$]-3, 0]$</td> <td>(0,1)</td> <td>$]1, 216]$</td> <td>decrece</td> </tr> <tr> <td>$f(x) = (0,2)^x$</td> <td>$]1, -\infty[$</td> <td>(0,1)</td> <td>$[\frac{1}{9}, -\infty[$</td> <td>decrece</td> </tr> <tr> <td>$f(x) = -3\sqrt{\frac{5}{2}}$</td> <td>$]-\infty, -2]$</td> <td>(5,-3)</td> <td>$[-\frac{12}{25}, 0]$</td> <td>decrece</td> </tr> <tr> <td>$f(x) = 3\sqrt{\sqrt{2}}$</td> <td>$]2, -\infty[$</td> <td>(0,3)</td> <td>$]6, -\infty[$</td> <td>crece</td> </tr> <tr> <td>$f(x) = e^x$</td> <td>$]-\infty, 0]$</td> <td>(0,1)</td> <td>$]0, 1]$</td> <td>crece</td> </tr> </tbody> </table>	Criterio de la función f	Domínio	Intersección con el eje y	Ámbito	Monotonía	$f(x) = 7^x$	$]-\infty, \frac{1}{2}]$	(0,1)	$]0, \sqrt{7}^{\frac{1}{2}}]$	crece	$f(x) = \frac{3^x}{4}$	$]0, -\infty[$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	$[\frac{1}{4}, -\infty[$	crece	$f(x) = (\frac{6}{3})^x$	$]-\infty, -\frac{1}{2}]$	(0,1)	$]0, \frac{3}{5}]$	crece	$f(x) = (6)^{-x}$	$]-3, 0]$	(0,1)	$]1, 216]$	decrece	$f(x) = (0,2)^x$	$]1, -\infty[$	(0,1)	$[\frac{1}{9}, -\infty[$	decrece	$f(x) = -3\sqrt{\frac{5}{2}}$	$]-\infty, -2]$	(5,-3)	$[-\frac{12}{25}, 0]$	decrece	$f(x) = 3\sqrt{\sqrt{2}}$	$]2, -\infty[$	(0,3)	$]6, -\infty[$	crece	$f(x) = e^x$	$]-\infty, 0]$	(0,1)	$]0, 1]$	crece	<p>1.3 Función Exponencial</p> <p>1) (a) $\{3/2\}$ (b) $\{3\}$ (c) $\{10/9\}$ (d) $\{10/3\}$ (e) $\{3/2\}$ (f) $\{-7/2\}$ (g) $\{13/3\}$ (h) $\{1\}$ (i) $\{-29/3\}$ (j) $\{92/29\}$ (k) $\{-4\}$ (l) $\{-14/3\}$ (m) $\{-2, 3\}$ (n) $\{67/12\}$ (o) $\{13/2\}$ (p) $\{1, 2\}$ (q) $\{-2\}$</p> <p>2) $\frac{1}{4}$ 3) $]-3, -1]$ 4) 0,2 horas 5) 1 año 6) 2015 7) B 8) C 9) A 10) A 11) D</p>
Criterio de la función f	Domínio	Intersección con el eje y	Ámbito	Monotonía																																										
$f(x) = 7^x$	$]-\infty, \frac{1}{2}]$	(0,1)	$]0, \sqrt{7}^{\frac{1}{2}}]$	crece																																										
$f(x) = \frac{3^x}{4}$	$]0, -\infty[$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	$[\frac{1}{4}, -\infty[$	crece																																										
$f(x) = (\frac{6}{3})^x$	$]-\infty, -\frac{1}{2}]$	(0,1)	$]0, \frac{3}{5}]$	crece																																										
$f(x) = (6)^{-x}$	$]-3, 0]$	(0,1)	$]1, 216]$	decrece																																										
$f(x) = (0,2)^x$	$]1, -\infty[$	(0,1)	$[\frac{1}{9}, -\infty[$	decrece																																										
$f(x) = -3\sqrt{\frac{5}{2}}$	$]-\infty, -2]$	(5,-3)	$[-\frac{12}{25}, 0]$	decrece																																										
$f(x) = 3\sqrt{\sqrt{2}}$	$]2, -\infty[$	(0,3)	$]6, -\infty[$	crece																																										
$f(x) = e^x$	$]-\infty, 0]$	(0,1)	$]0, 1]$	crece																																										
	<p>1.4 Función Logarítmica</p> <p>1) C 2) D 3) C 4) C 5) C 6) B 7) D 8) C 9) B 10) D 11) B 12) B 13) C 14) B 15) B 16) B 17) D 18) A 19) A 20) A 21) C 22) B 23) A 24) A 25) D 26) A 27) C 28) B 29) B 30) D 31) C 32) D 33) C 34) D 35) A 36) C 37) C 38) A 39) A 40) B 41) C</p> <p>1.5 Identidades Logarítmicas</p> <p>1) D 2) C 3) A 4) D 5) A 6) B 7) A 8) C 9) D 10) D 11) C 12) A 13) A 14) B 15) A 16) C</p>																																													

1.6 Ecuaciones Logarítmicas

(A)

- 1) $\left\{\frac{-7}{3}\right\}$ 2) $\left\{\frac{1}{35}\right\}$ 3) {84}
 4) {9} 5) {-1} 6) {-2,-7}
 7) $\left\{\frac{25}{2}\right\}$ 8) $\left\{\frac{11}{2}\right\}$ 9) {4} 10) $\left\{\frac{e^3}{4}+1\right\}$ 11) {1} 12) {2}
 13) $\left\{\frac{33}{7}\right\}$ 14) { }

(B)

- 1) {1873} 2) $\left\{\frac{e-4}{2}\right\}$ 3) {-3,5}
 4) {4} 5) {2} 6) $\{e^7, e^{-3}\}$
 7) {2} 8) {1, 16} 9) {-1} 10) { }

(C)

Ecuaciones Exponenciales usando logaritmos

- 1) $\left\{\frac{\ln 4 - 2\ln 5}{\ln 5}\right\}$ 2) $\left\{\frac{6\ln 5 - \ln 7}{3\ln 7 + \ln 5}\right\}$ 3) $\left\{\frac{\ln 2 - 9\ln 3}{4\ln 10 + \ln 3 - \ln 2}\right\}$
 4) $\left\{\frac{9\ln 4 - \ln 5 - 2\ln 9}{7\ln 9 - \ln 4}\right\}$ 5) $\left\{\frac{\ln 7 - \frac{7}{3}\ln 8}{\frac{1}{3}\ln 8}\right\}$ 6) $\left\{\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 8\ln 11}{\ln 5 - 5\ln 11}\right\}$
 7) $\left\{\frac{10 \ln 6}{3\ln 7 + \ln 6}\right\}$

Selección Única

- 1) A 2) D 3) B 4) A 5) B 6) A 7) C
 8) A 9) A 10) C 11) C 12) D 13) C
 14) B 15) A 16) A 17) A 18) A
 19) D 20) D

1.7 Problemas

- 1) $\ln\left(\frac{0,3x}{x}\right) = -0,0437t$
 $\Rightarrow t = 27,5$ años
 2) 12,04 3) 5,01 km 4) 2,73 h 5)
 (a) 0,0001 (b) 10 6) D 7) A 8) C
 9) B 10) C

Respuestas Estadística y Probabilidad

2.1 Variabilidad

1). (a)

	Calificaciones	
	Sección 10-1	Sección 10-3
Media	72,41	72,52
Valor máximo	96	96
Valor mínimo	30	30
Recorrido	66	66
Cuartil 1	65	65
Mediana	78,5	80
Cuartil 3	84,5	85
Recorrido intercuartílico	19,5	20
Varianza	300,35	315,06
Desviación estándar	17,33	17,75

2) (a) 4,09 (b) 8 (c) 28 (d) V F F

3)

	Turistas que ingresan diariamente		
	Hotel A	Hotel B	Hotel C
Cuartil 1	3	9	6
Cuartil 3	11	14	11
Mediana	6	11	9
Recorrido intercuartílico	8	5	5
Recorrido	18	15	23

- (b) Hotel 3 (c) El hotel 3 (28 turistas en un día) No se puede asegurar sobre el promedio. (d) Hotel 2 (e) V - F - V - F - F (es igual que en el hotel 2) - V - V

b) La sección 10-1 presenta una leve menor variabilidad.

4)

	A	B	C
Varianza	6,17	3,07	1,90
Desv Estándar	2,48	1,75	1,38

Se escoge la compañía C

5) (a) Zona B (b) A: 4,5 B: 6

(c) V -F-F-V-F

6) (a) Futbolistas 0.08

Basquetbolistas 0,07

(b) La diferencia es baja

(c) V -V -V - F - V

7) (a) Presencial (b) 84 (c) Presencial

(d) 56,96

8) (a) D (b) E (c) No, porque es solo un dato aislado y esa tienda presenta mucha variabilidad con respecto a otras.

2.2 Coeficiente de variación

1) (a) Informática: 5,57 Logística: 5,41
(b) Logística

2) (a) Centro 1: 2,30 Centro 2: 2,31
(b) Levemente el centro 1

3) (a) Séptimo: $\frac{1573,94}{17868,16} \cdot 100 = 8,80$

Undécimo $\frac{220,44}{1274,66} \cdot 100 = 17,29$

(b) Séptimo

(c) Séptimo: $\frac{20128 - 17868,16}{1573,94} = 1,43$

Undécimo $\frac{1575 - 1274,66}{220,44} = 1,36$

Hubo mayor incremento en séptimo

4) (a) Compañía A: 36,85

Compañía B: 43,94

(b) Compañía B

5) (a) A: 4,76 (b) 18,27 (c) 1,95

(b) Departamento B (c) Departamento C

6) El de San José

7) El habitante de la India

8) Cándida

Respuestas Geometría

3.1 Simetría Axial

- 3) (a) A (b) \overline{RS} (c) $\sphericalangle ENW$ (d) M (e) N
 4) (a) l_2, l_3 (b) l_2, l_3 (c) l_1, l_2, l_3 (d) l_2
 5) (b) $A' \left(1, \frac{7}{2}\right), B' \left(0, \frac{-5}{2}\right), C' (-1, -3)$ (c) 2
 6) (b) $R' (-3, -2), N' (1, 0), U' (1, 2)$ (c) 4 (d) 45°
 7) (1, -1) 8) $\left(4, \frac{-1}{2}\right)$ 9) $2\sqrt{5}$
 10) $P \approx 44,57$ $A = 118$

3.2 Transformaciones

- 1) $M' (-5, -1), N' (1, -3), P' (5, 0)$
 2) $A' (-4, -3), B' (-3, 1), C' (-1, 3), D' (1, -1)$
 3) $A' (-4, 0), B' (0, 2), C' (0, 7)$
 4) $A' (1, 12), B' (4, 13), C' (4, 8), D' (0, 6)$
 5) $\left(\frac{1}{5}, \frac{23}{5}\right)$ 6) $\left(\frac{-2}{5}, \frac{16}{5}\right)$
 7) (a) $3\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $48,4^\circ$
 8) (a) 9 (b) $9 + 3\sqrt{5}$ 9) $\left(\frac{-1}{2}, -3\right)$
 10) $(-\sqrt{3}, -5)$
 11)
 (a) $M' (-9, -3), N' (-7, -5), R' (-5, -3), S' (-6, -1)$
 (a) $M' (9, 3), N' (7, 5), R' (5, 3), S' (6, 1)$
 12) $A' (1, -2), B' (4, 1), C' (8, 0)$
 13) $A' (-1, -3), B' (1, -1), C' (1, -2), D' (2, -3)$
 14) $B' (1, 0), C' (3, -3)$
 15) $A' (-8, 0), B' (-4, 2), C' (-2, 1), D' (-2, -1)$
 16) $\left(\frac{17}{6}, \frac{-31}{4}\right)$ 17) $\left(\frac{-11}{2}, 4\right)$ 18) $(\sqrt{2}, 15)$
 19) (4, -3) 20) (-4, 4) 21)
 $B' (-1, -2), C' (1, 1)$
 22) (a) $2\sqrt{2}$ (b) Horario
 23) (a) M (b) N (c) 1 (d) 90°

- 24) $A' (2, 10), B' (4, 8), C' (4, 6), D' (0, 6)$
 25) $A' (4, 0), B' (3, 2), C' (6, 4), D' (7, 1)$
 26) (a) $A' (-2, 5), B' (-6, 1), C' (6, 5)$
 (b) cuadrado
 27) R (horario)
 28)
 $A' (2, 12, 0, 71), B' (6, 36, 2, 12), C' (5, 66, 5, 66)$
 29) (a) 45° (b) $(-2, 24, -2, 66)$ (c) $(0, 59, 0, 17)$
 30) $(-4, 95, -2, 12)$ 31) $(-4, 93, 1, 27)$
 32)

$(-7, 41, 7, 07)$	$(-13, 07, -1, 41)$
$(2, 29, 0, 78)$	$(1, 78, 1, 29)$
$(-11, -4, 1)$	$(4, 1, 11)$

- 33) 2,25
 34) I. (a) \overline{MT} (b) N (c) $\sphericalangle NMT$ (d) $k < -1$
 II. (a) \overline{KP} (b) K (c) $\sphericalangle PHK$ (d) $k > 1$
 III. (a) \overline{MT} (b) M (c) $\sphericalangle MRT$ (d) $0 < k < 1$
 IV. (a) \overline{HV} (b) V (c) $\sphericalangle JHV$ (d) $k = -1$
 35) (a) \overline{FU} (b) $\sphericalangle A$ (c) U (d) \overline{AR}
 36) (i) C (ii) D (iii) A (iv) A 37) $\left(\frac{-7}{2}, \frac{15}{2}\right)$
 38) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ 39) (a) $k = -1$ (b) congruentes
 40) $M' \left(\frac{5}{4}, -1\right), N' \left(\frac{3}{4}, \frac{-3}{2}\right), R' \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{2}\right)$
 41)
 $A' (-3, 0), B' (-5, -2), C' (-7, -2), D' (-5, 2)$
 42) $D' \left(\frac{-1}{4}, \frac{7}{2}\right), E' \left(\frac{1}{8}, 2\right), F' \left(\frac{11}{4}, \frac{25}{8}\right)$
 43)
 $A' (-7, -6), B' \left(\frac{-9}{2}, \frac{-7}{2}\right), C' (-7, -1), D' \left(\frac{-19}{2}, \frac{-7}{2}\right)$
 44)
 $D' (1, 14), E' \left(13, \frac{25}{2}\right), F' \left(\frac{5}{2}, 8\right)$ o bien,
 $D'' (-5, -16), E'' \left(-17, \frac{-29}{2}\right), F'' \left(\frac{-13}{2}, -10\right)$
 45) $D' \left(1, \frac{5}{2}\right), E' (-2, 1), F' \left(\frac{5}{2}, 4\right)$

- 46) $A'(10,4), B'(9,3), C'(6,3), D'(7,6)$
 47) $A'\left(\frac{22}{5}, 3\right), B'\left(\frac{16}{5}, \frac{-7}{2}\right), C'\left(\frac{16}{5}, \frac{24}{5}\right)$
 48) $A'(7,0), B'\left(4, \frac{-3}{2}\right), C'\left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right), D'\left(1, \frac{3}{2}\right)$
 49) 2,16 50) (a) 2,25 (b) 34° 51) $\frac{-2}{5}$
 52) C y D 53) C 54) (0,2) 55) (7,2)
 56) $A''(2,-3), B''(-4,-5), C''(2,-7), D''(0,-5)$
 57) (a) Rotación, reflexión, homotecia
 (b) 6,85

3.3 Cono

- 3) $\frac{15}{4}$ 4) 0,225 5) $\frac{7}{3}$ 6) (a) 7,2 (b) 7,65 (c) 5,3 (d) 3,03 7) A 8) B 9) D 10) 8

Respuestas a prácticas de Selección Única

Función inversa

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15					
D	B	A	4	B	B	D	B	B	D	B	B	D	D	C					

Función exponencial

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10										
A	A	A	C	C	C	C	625	B	B										

Función logarítmica

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	2	7	2	A	C	D	C	B	C	A	B	C	A	D	D	A	C	C	9
21	22	23																	
D	A	B																	

Funciones: Aplicaciones

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	A	D	B	4000	11	D	D	10	B	15,83	D	C	C	400	A	B	D	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
388	D	2	4200	D	11	B	B	B	B	A	C	D	8	C	972	B	C	B	

Modelización

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13							
B	A	B	A	B	D	C	B	C	A	C	D	B							

Estadística: Conceptos básicos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12								
D	8	B	D	D	B	A	B	C	1,4	D	D								

Estadística: Variabilidad

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17			
B	C	D	C	C	B	B	B	D	B	C	47,5	D	D	C	D	D			

Simetría y transformaciones en el plano

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	A	C	B	A	C	A	B	A	A	D	A	B	A	45	C	D	A	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	D	B	A	D	C	D	B	A	A	A	A	A	D	D	D	C	D	A	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54						
C	C	B	B	B	A	D	D	D	B	B	B	B	B						