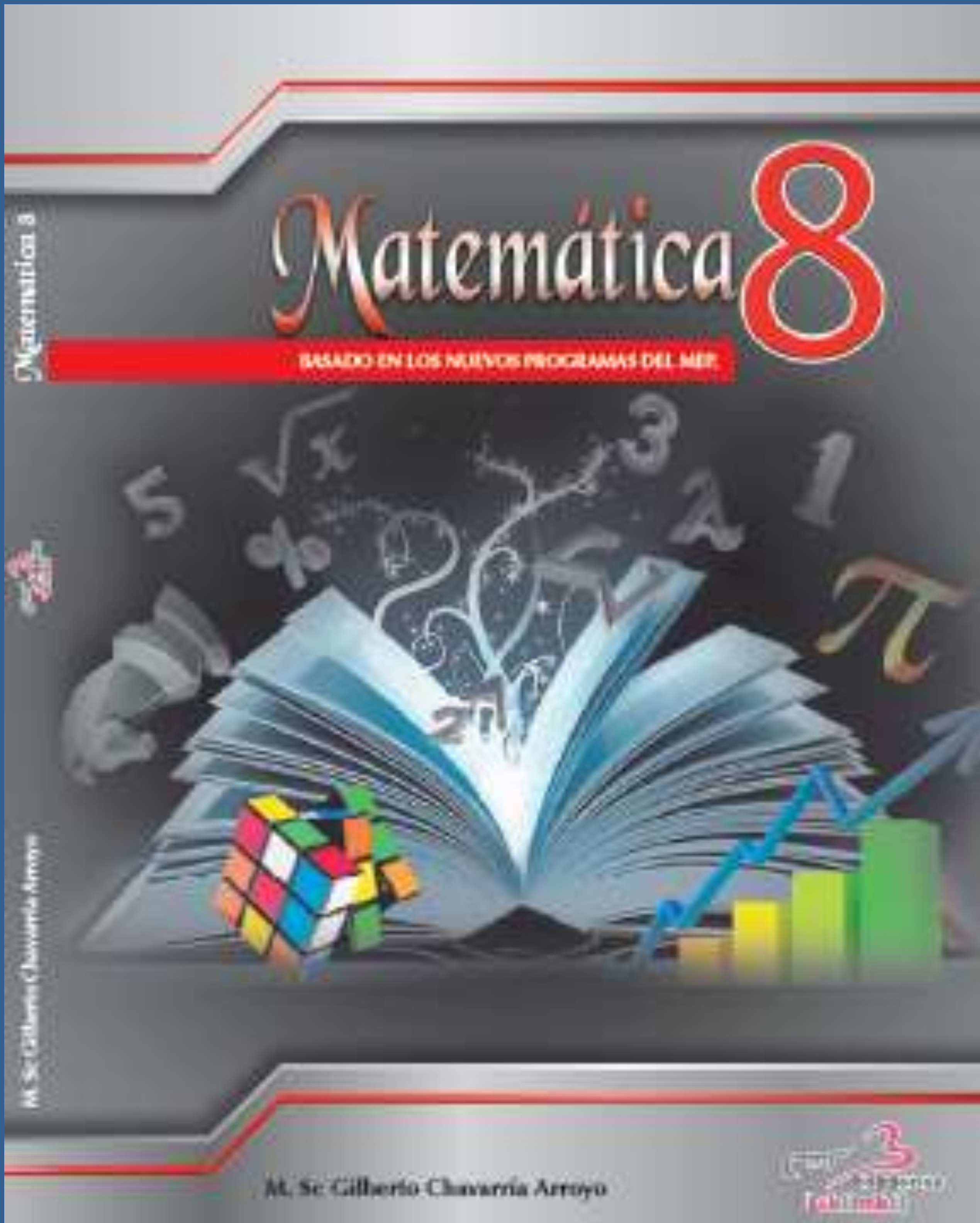
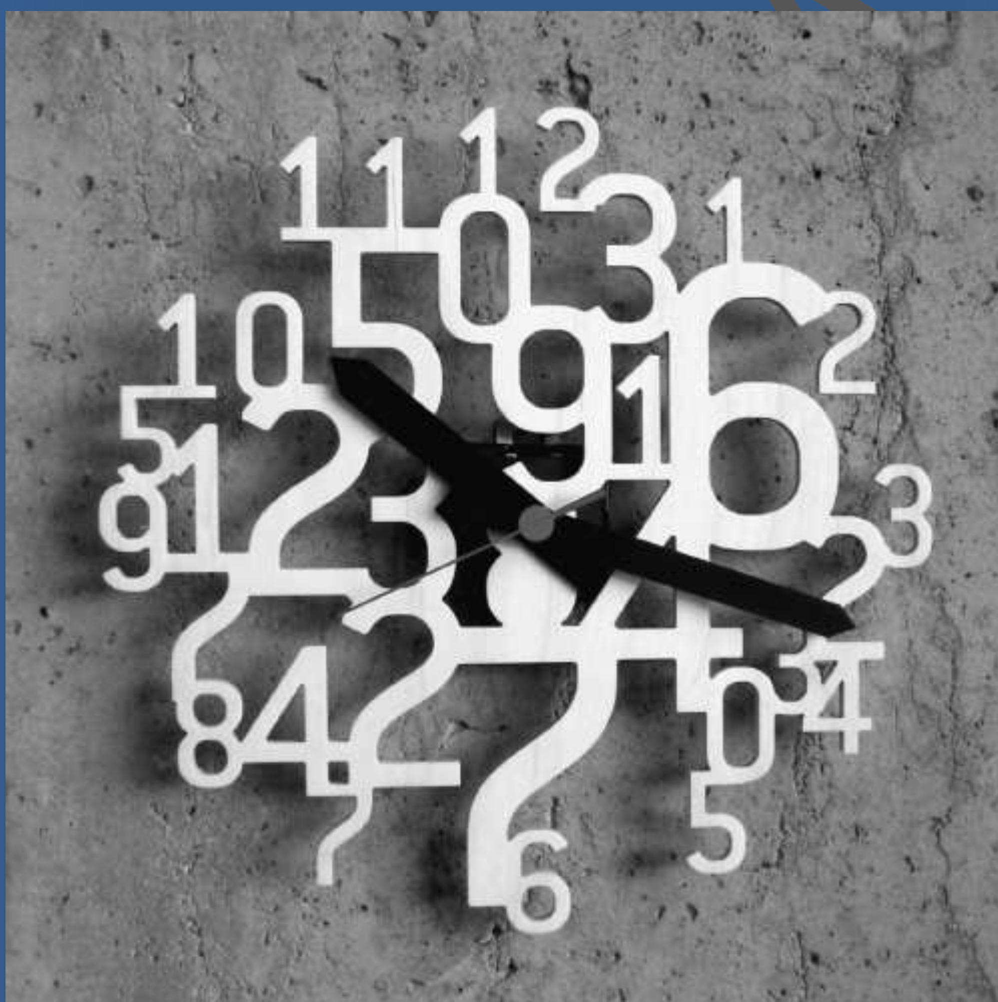

Matemática 8
BASADO EN LOS NUEVOS PROGRAMAS DEL MEP.
M. Sc Gilberto Chavarría Arroyo
Matemática 8
M. Sc Gilberto Chavarría Arroyo

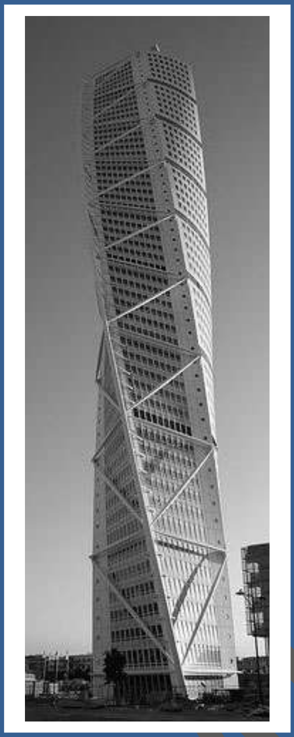
Tabla de contenidos

NÚMEROS



Números

Cuando se desea sumar dos números enteros, el resultado es un número entero. De igual modo sucede con la multiplicación y la resta. Pero, si dividimos dos números enteros, la respuesta no siempre será entera, por ejemplo, al resolver $12 \div 5$.



Operaciones como esta, originaron el estudio de otros números, llamados racionales, con los cuales podemos trabajar divisiones con residuos exactos y no exactos.

Aplicaciones de estos números, las encontramos en aspectos tan simples como cortar un chocolate en partes iguales, o tan complejas, como fórmulas de ingeniería que hacen posibles las construcciones de elegantes e imponentes edificios.

Son tan útiles estos números, que incluso están presentes en la música. Por ejemplo, Pitágoras descubrió que los sonidos armoniosos tienen frecuencias relacionadas entre sí por números racionales.

El conjunto de los números racionales se simboliza con $\mathbb{Q}$ que proviene del inglés **quotient**, el cual se traduce como **cociente**.

Por tanto, los números racionales, son aquellos que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, siempre y cuando el segundo número no sea cero.

Conocimiento: Racionales

Escenario de aprendizaje

Un padre deja por herencia ₡ 3 200 000 y un terreno de 751 m^2 a sus cuatro hijas, de modo que tanto el dinero como las propiedades sean repartidas en partes iguales.

(a) ¿Cuánto dinero le corresponde a cada hija?

(b) ¿Qué cantidad, en m^2, de terreno heredó cada hija?

(c) ¿Ambas respuestas corresponden a números enteros?

____

____

____

____

____

____

____

____

Note que la cantidad de dinero que recibe cada hija, corresponde a un número entero:

3 200 000 ÷ 4 = __________

Al hacer la repartición del terreno, se resuelve 751 ÷ 4, cuyo resultado es __________. Este valor **no** corresponde a un número entero.

Tanto el número 800 000 como 187,5 pertenecen ***al conjunto de números racionales.*** Este conjunto se simboliza $\mathbb{Q}$, que proviene de la inicial de la palabra en inglés "***quotient***" que significa "***cociente***"

Los números racionales tienen diversas maneras para ser representados.

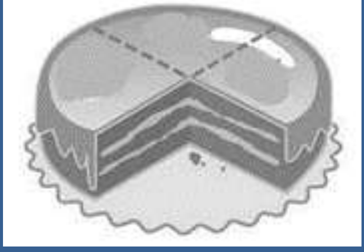
Por ejemplo, la porción de terreno que le corresponde a cada hija, puede expresarse mediante expansión decimal: 187,75 y como notación fraccionaria: $\frac{751}{4} = 187\frac{3}{4}$

Más adelante, se explicará maneras fáciles para hacer esas conversiones.

Ejercicio

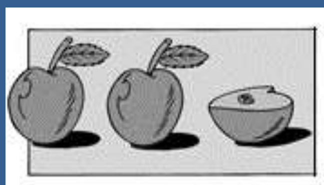
Para cada imagen, describa al menos una situación que represente un número racional NO entero.

1)



2)

3)



4)

5)

Representación de números racionales

Escenario de aprendizaje

Leoncio va a pintar su casa, para lo cual necesita 6 cuartos de galón de pintura. El vendedor de la ferretería le indica que la pintura se puede vender en presentaciones de un galón o de un cuarto de galón. Exprese 3 diferentes formas de mencionar esa cantidad de pintura.

____

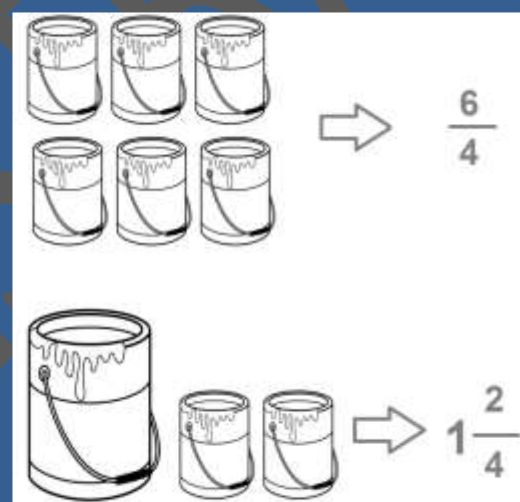
____

____

Los números racionales se pueden representar mediante **fracciones**, de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

También se pueden expresar en **expansión decimal**, para lo cual se resuelve $a \div b$.

En el caso anterior, la cantidad de pintura se puede expresar como fracción así:



Pero también con expansión decimal:

1,5 galones

Toda fracción puede ser representada en expansión decimal, al dividir el numerador entre el denominador.

Veamos:

a) $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \hline 0 & 0{,}5 \end{array}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} = 0{,}5}$$

Cuando se hace la división entre el numerador y el denominador y el **residuo es cero**, se dice que la expansión decimal es **exacta o finita** y que el periodo de la misma es cero.

b) $\frac{-5}{3}$

$$\begin{array}{r|l} -5 & 3 \\ \hline 20 & -1{,}66... \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{-5}{3} = -1{,}66... = -1{,}\overline{6}}$$

Cuando se repiten cifras decimales infinitamente, es llamada **expansión decimal infinita periódica.**

Para denotarlas, se coloca una rayita a las cifras (o cifra) que se repiten infinitamente.

.

c) $\frac{23}{90}$

$$\begin{array}{r|l} 230 & 90 \\ \hline 500 & 0{,}255.. \\ 500 & \\ 50 & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{23}{90} = 0{,}2555... = 0{,}2\overline{5}}$$

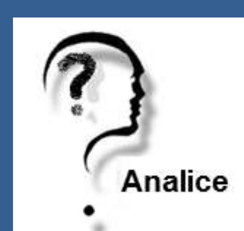
En este caso, existen cifras decimales sin periodo (el 2) y otras periódicas (el 5)

d) $\frac{180}{9}$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 9 \\ \hline 00 & 20 \\ 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{180}{9} = 20}$$

Esta expresión se logró representar como un número natural.



Todo número entero es racional, pero no todo racional es entero.

Dé ejemplos de esta afirmación.

¿A qué equivale la expresión $\frac{0}{8}$?

Justifique por qué la expresión $\frac{8}{0}$ no está definida en los números racionales

Conversión de expansión decimal a fracción:

Como se indicó anteriormente, un número racional siempre se puede escribir en forma de fracción. Así, por ejemplo, 0,25 equivale a $\frac{1}{4}$.

Seguidamente se indica la forma de hacer tales conversiones.

☑ Cuando la expansión decimal es **exacta (finita)**, se escribe en el numerador toda la expresión sin la coma y en el denominador un **uno** seguido de tantos ceros como lugares decimales haya. Luego se simplifica si es posible.

Ejemplos:

$$(a)\quad 0,7=\frac{7}{10}$$

$$(b)\quad 0,75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$$

$$(c)\quad 3,025=\frac{3025}{1000}=\frac{121}{40}$$

☑ Cuando la expansión decimal es **infinita periódica** y el periodo empieza exactamente después de la coma, se escribe en el numerador toda la expresión, menos los términos que están antes de la coma, y en el denominador, tantos **nueves** como cifras tiene el período. Si es posible se simplifica.

Ejemplos:

$$(a)\quad 0,\overline{6}=\frac{6-0}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$(b)\quad 5,\overline{23}=\frac{523-5}{99}=\frac{518}{99}$$

$$(c)\quad -32,\overline{05}=\frac{-(3205-32)}{99}=\frac{-3173}{99}$$

☑ Cuando la expansión decimal es **infinita periódica** pero periodo **no empieza exactamente después de la coma** se escribe en el numerador toda la expresión, menos los términos que están antes del periodo, y en el denominador, tantos **nueves** como cifras tiene el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica . Si es posible se simplifica.

Ejemplos:

$$(a)\ 0,2\overline{3}=\frac{23-2}{90}=\frac{21}{90}$$

$$(b)\ 17,2\overline{69}=\frac{17269-172}{990}=\frac{17097}{990}=\frac{5699}{330}$$

Representación de números racionales en la recta numérica

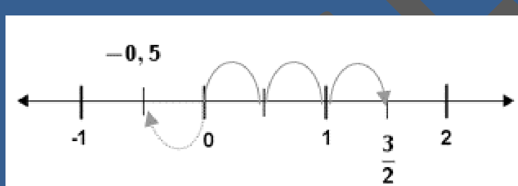
Los números racionales pueden ser representados en la recta numérica, ya sea mediante la notación fraccionaria o su respectiva expansión decimal.

Si se tiene el número expresado con fracción, es conveniente dividir cada unidad en partes iguales, según lo indica el denominador.

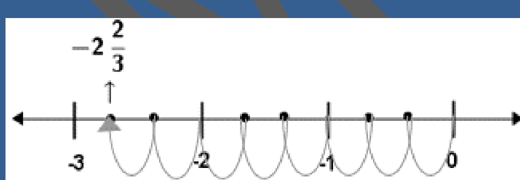
Ejemplos:

Represente los números en la recta numérica.

(a) $\frac{3}{2}$ y $-0{,}5$



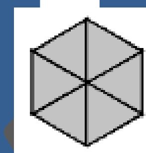
(b) $-2\frac{2}{3}$



Repaso de fracciones.

Tipos de fracciones

☑ ***Unitarias:*** Representan la unidad. Ejemplos $\frac{7}{7}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{1}{1}$

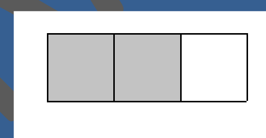


$\frac{6}{6}$

☑ ***Propias:*** Representan menos de la unidad. El numerador es menor que el denominador

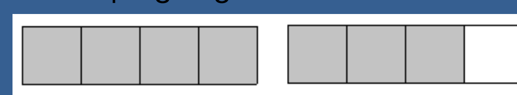
Ejemplos $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{12}{17}$

$\frac{2}{3}$



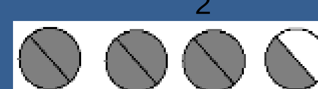
☑ ***Impropias:*** Representan más de la unidad. El numerador es mayor que el denominador

Ejemplos $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{17}{5}$



$\frac{7}{4}$

☑ ***Mixtas:*** Representan más de la unidad. Es una forma de escribir la fracción impropia como un número entero con una fracción propia. Así, por ejemplo, el $\frac{7}{4}$ anterior representa una unidad y $\frac{3}{4}$ de otra, por lo cual, la fracción mixta sería $1\frac{3}{4}$ Ejemplo: $3\frac{1}{2}$



☑ ***Conversión de fracción mixta a fracción impropia.***

Para convertir una fracción mixta en impropia, se resuelve:

$$a\frac{b}{c}=\frac{c\bullet a+b}{c}$$

Ejemplos:

a) $3\frac{2}{7}=\frac{7\bullet 3+2}{7}=\frac{23}{7}$

b) $-5\frac{1}{2}=\frac{-(2\bullet 5+1)}{2}=\frac{-11}{2}$

☑ ***Conversión de fracción impropia a fracción mixta.***

Siendo la fracción $\frac{a}{b}$ impropia, se efectúa la división de *a* entre *b*, de modo que el cociente será la unidad, el residuo el numerador y el divisor el denominador.

Así

$\frac{a}{b}$ impropia

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline c & d \end{array}$$

Por tanto $\frac{a}{b}=d\frac{c}{b}$

Ejemplos:

a) $\frac{-17}{3}$

$$\begin{array}{r|l} -17 & 3 \\ \hline 2 & -5 \end{array}$$

$\frac{-17}{3}=-5\frac{2}{3}$

b) $\frac{25}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 2 \\ \hline 05 & 12 \\ 1 & \end{array}$$

$\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}$

☑ **Fracciones homogéneas:** Son aquellas fracciones que tienen el mismo denominador.

Ejemplos:

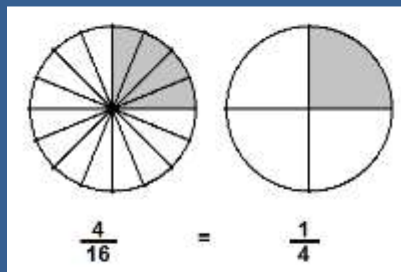
$\frac{5}{7},\ \frac{-1}{7},\ 3\frac{4}{7}$

☑ **Fracciones heterogéneas:** Son aquellas fracciones con denominador diferente.

Ejemplos:

$\frac{-8}{9},\ \frac{2}{5},\ 1\frac{1}{7}$

☑ **Fracciones equivalentes:** Son aquellas fracciones que representan una misma cantidad. Por ejemplo, si se toman cuatro porciones de una pizza de 16 pedazos $\left(\frac{4}{16}\right)$, es equivalente a tomar 1 pedazo de la pizza que está dividida en cuatro $\left(\frac{1}{4}\right)$.



Para verificar que dos fracciones son equivalentes, se resuelve una multiplicación en equis, de la siguiente forma:

$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{4}$	$\dfrac{-7}{5} \times \dfrac{-4}{9}$
$4 = 4$	$-63 = -20$
sí son equivalentes	no son equivalentes

Hay dos procesos en los que se obtienen fracciones equivalentes, estos son la amplificación y simplificación.

☑ **Amplificación:** Se multiplica numerador y denominador de una fracción por un mismo número entero.

Ejemplo

Amplifique cinco veces $\dfrac{8}{7}$

Se resuelve: $\dfrac{8 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \dfrac{40}{35}$

De este modo $\dfrac{8}{7}$ es equivalente a $\dfrac{40}{35}$

☑ **Simplificación** Se divide el numerador y el denominador por divisores comunes. La fracción resultante de la simplificación máxima se llama **fracción canónica.**

Ejemplos. Simplifique al máximo cada fracción

(a) $\dfrac{20}{18}$

En este caso, tanto el numerador como el denominador son divisibles por dos, de modo que al sacar mitad a cada término de la fracción, se obtiene:

$$\frac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{18}_{9}} = \frac{10}{9}$$

A la fracción $\dfrac{10}{9}$ se le llama fracción canónica, ya que no se puede simplificar más.

(b) $\dfrac{-36}{100}$

$$\frac{\cancel{-36}^{\cancel{-18}^{-9}}}{\cancel{100}_{\cancel{50}_{25}}} = \frac{-9}{25}$$

Relaciones de orden.

Escenario de aprendizaje

Dositeo recorre $\frac{6}{11}$ partes de un camino, mientras que Simplicio logra caminar $\frac{5}{7}$ del mismo.

¿Quién hizo un mayor recorrido?

El conjunto de números racionales es ordenado y cumple la Ley de Tricotomía, la cual indica que dados dos números racionales *a* y *b* se cumple una de las siguientes condiciones:

$a < b$	$a > b$	$a = b$

Cuando se va a comparar fracciones, se puede multiplicar en equis, y de ese modo, poder visualizar más fácilmente cuál es mayor, menor o si son iguales.

$$\frac{6}{11} \quad \frac{5}{7}$$

$$6 \bullet 7 \qquad 5 \bullet 11$$

$$42 < 55$$

También se puede determinar la expansión decimal de cada una y luego establecer la relación de orden.

$$\frac{6}{11} = 0,\overline{54} \qquad \frac{5}{7} = 0,\overline{714285}$$

De este modo, se concluye que $\frac{6}{11} < \frac{5}{7}$, lo cual significa que Simplicio hizo un mayor recorrido.

Ejemplos.

Escriba <, > o = según sea el caso

Si se trabaja con fracciones, se pueden agilizar los cálculos mediante un proceso similar al detallado para determinar fracciones equivalentes.

(a) $\frac{3}{7}$ ____ $\frac{2}{8}$

$$24 > 14$$

$$\frac{3}{7} > \frac{2}{8}$$

(b) $\frac{-5}{8}$ ____ $\frac{-6}{13}$

$$-65 < -48$$

$$\frac{-5}{8} < \frac{-6}{13}$$

(c) $2,3$ ____ $2,234$

$$2,3 > 2,234$$

Resolución de problemas

1) Para preparar un pastel, se necesita:

☑ 1/3 de un paquete de 750 g de azúcar.

☑ 3/4 de un paquete de harina de un kilo.

☑ 3/5 de una barra de mantequilla de 200 g.

Halle la cantidad de gramos en total que se necesitan de ingredientes para preparar el pastel.

$$\frac{1}{3} \bullet 750 = (750 \div 3) \bullet 1 = 250$$

$$\frac{3}{4} \bullet 1000 = (1000 \div 4) \bullet 3 = 750$$

$$\frac{3}{5} \bullet 200 = (200 \div 5) \bullet 3 = 120$$

Se necesitan 250 + 750 + 120 = 1 120 gramos

2) Para una receta, se indica que debe tener 2/3 partes de harina y el resto en agua y huevos. Si el recipiente es de 3 litros, ¿cuánto contenido en litros habrá de agua y huevos?

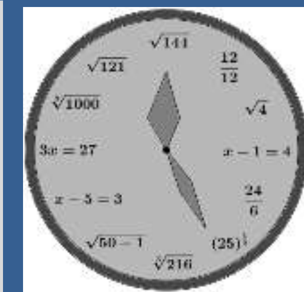
La fracción que representa la porción de agua y huevos e 1/3.

Por tanto se obtiene 3 de $\frac{1}{3}$, que sería un litro.

3) Candido dispone de ₡30 000 para compras. El jueves gastó $\frac{2}{5}$ de esa cantidad y el sábado los $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba. ¿Cuánto gastó cada día y cuánto le queda al final?

Tiempo para practicar 1.1

Habilidades:
Identificar números racionales en diversos contextos
Realizar aproximaciones decimales de números racionales.
Identificar los números racionales representados con expansión decimal exacta y con expansión decimal periódica.
Identificar y aportar ejemplos de representaciones distintas de un mismo número racional.
Comparar y ordenar números racionales en notación decimal y fraccionaria.
Representar números racionales en la recta numérica, en cualquiera de sus representaciones.



1. Encierre en un círculo los números racionales NO enteros.

$\frac{-9}{27}$	$5,35$	$16,0$	$\frac{18}{6}$
$12,\overline{4}$	$\frac{22}{0}$	$-0,44...$	$\frac{0}{9}$

2. Para cada imagen, plantee dos situaciones, una en la que intervengan números enteros y otra en la que se utilicen números racionales no enteros

(a)

(b)

(c)

(d)

3. A continuación se le presenta diversas situaciones. En cada caso, represente la cantidad racional involucrada, con su respectiva expansión decimal.

(a) Porfirio compra $2\frac{1}{8}$ kg de clavos.

(b) Olegario maneja su automóvil a una velocidad de $-40\frac{2}{5}$ Km/h

(c) Asesterio utiliza las $\frac{3}{5}$ de su salario para pagar su alimentación.

(4) Exprese en expansión decimal cada fracción y clasifíquela en expansión decimal exacta o infinita periódica.

$(a)\ \dfrac{22}{3}$ $\quad (b)\ \dfrac{-4}{25}$ $\quad (c)\ \dfrac{7}{30}$

$(d)\ \dfrac{-52}{9}$ $\quad (e)\ \dfrac{1}{8}$ $\quad (f)\ \dfrac{37}{33}$

$(g)\ -\dfrac{6}{13}$ $\quad (h)\ \dfrac{61}{45}$ $\quad (i)\ 4\dfrac{1}{3}$

(5) Determine la fracción que da origen a cada número que está representado con su expansión decimal. Exprésela de modo simplificado.

$(a)\ 2{,}62$ $\quad (b)\ -8{,}02$ $\quad (c)\ 0{,}\overline{23}$

$(d)\ -4{,}\overline{2}$ $\quad (e)\ 0{,}3\overline{5}$ $\quad (f)\ -1{,}0\overline{12}$

$(g)\ -52{,}0\overline{1}$ $\quad (h)\ -0{,}13\overline{2}$ $\quad (i)\ 12{,}\overline{1}$

$(j)\ -6{,}9\overline{2}$ $\quad (k)\ -0{,}0\overline{4}$ $\quad (l)\ 0{,}\overline{102}$

(6) Dos automóviles A y B hacen un mismo trayecto de 572 km. El automóvil A lleva recorrido los 4/11 del trayecto cuando el B ha recorrido los 5/13 del mismo.

(a) ¿Cuál de los dos ha recorrido la mayor distancia?

(b) ¿Cuántos kilómetros llevan recorridos cada uno?

(7) Escriba los símbolos >, <, = según sea.

$(a)\ \dfrac{4}{8}$ ____ $\dfrac{1}{2}$ $\quad (b)\ \dfrac{7}{3}$ ____ $\dfrac{11}{8}$

$(c)\ -3\dfrac{1}{5}$ ____ $\dfrac{-33}{10}$ $\quad (d)\ -13{,}68$ ____ $-13{,}\overline{6}$

$(e)\ \dfrac{11}{3}$ ____ $3{,}67$ $\quad (g)\ \dfrac{-8}{3}$ ____ $\dfrac{-11}{7}$

$(h)\ 1{,}16$ ____ $\dfrac{7}{6}$ $\quad$ (i) $-0{,}255$ ____ $-0{,}35$

(j) $-3{,}\overline{5}$ ____ $-3{,}5$ $\quad$ (k) $2{,}0\overline{13}$ ____ $2{,}02$

(8) Marcial camina $1\frac{2}{3}\,km$ por día para llegar a la escuela.

(a) Exprese esa cantidad en expansión decimal y clasifíquela.

(b) Si Ruth camina $\dfrac{13}{5}\,km$, ¿quién camina más?

(9) En las elecciones para alcalde celebradas en un cantón de Puntarenas, del total de votos válidos, 3/10 de los votos fueron para el candidato A, 2/5 para el candidato B, 1/5 para el C y el resto para el postulante D.

Ordene de mayor a menor a los candidatos, según los votos recibidos.

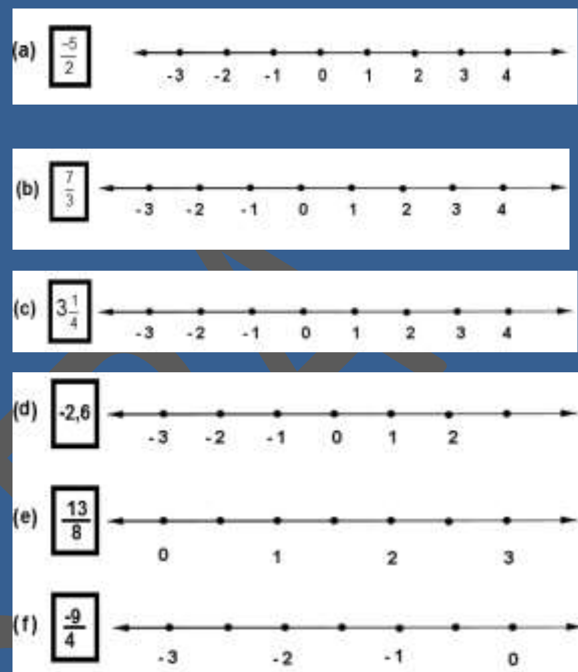
(10) La cajuela es la unidad con la que se mide el café que se recolecta. En Costa Rica, la cajuela equivale a 20 litros. Si alguien coge un cuarto de café, se le dice popularmente "un cuartillo". Los hermanos Eladio y Acacio van cada diciembre a recolectar café, para ayudarse a comprar sus útiles escolares para el siguiente año. Eladio logra coger en un día 7 cajuelas y tres cuartillos; mientras que Acacio recolecta 23 cuartillos.

(a) ¿Cuál hermano recoge más café en ese día?
(b) Si la cajuela la pagan a ₡ 900, cuánto dinero gana cada uno.
(c) Si una persona recolecta 15 cajuelas, ¿a cuántos cuartillos equivale?

(11) Un colegio decide sembrar 60 árboles en la comunidad. La sección 8-1 logró sembrar 1/5 de los árboles y la sección 8-2 plantó 1/2.

(a) ¿Cuál sección plantó más árboles?
(b) ¿Cuántos árboles sembró la 8-2?
(c) ¿Qué fracción de árboles plantaron entre las dos secciones?

(12) Ubique en cada recta numérica el número racional que se le indica.



(13) Selección Única

⌗ Atanasio bebe $\frac{27}{5}$ litros de leche en un mes. Esa cantidad de litros expresada en expansión decimal corresponde a

( ) 5 ( ) 5,4
( ) 27,5 ( ) 5,5

⌗ Eulalia recorre $\frac{17}{3}$ km para llegar a su trabajo. ¿Cuál es la notación decimal de ese recorrido?

( ) $5,\overline{6}$ ( ) 17,3
( ) 5,66 ( ) 5,60

⌗ Fulgencio estudia $\frac{1}{2}$ hora por día en su casa. Otra forma de expresar esa cantidad es

( ) 5,0 ( ) 0,5

( ) 1,2 ( ) 2,1

⌗ Policarmo va a la ferretería y compra $\frac{24}{11}$ kg de cemento. Esa cantidad de litros expresada en expansión decimal corresponde a

( ) 2,18 ( ) $2,\overline{18}$

( ) $5,1\overline{8}$ ( ) 24,11

⌗ Gertrudis ahorra las dos terceras partes del dinero que le dan sus padres. Esa cantidad expresada en expansión decimal corresponde a

( ) $0,\overline{6}$ ( ) 0,6

( ) $0,\overline{3}$ ( ) $2,\overline{3}$

⌗ Clementino compra $\frac{3}{4}$ kg de café en una pulpería. Si un kilogramo de café cuesta ₡4800, ¿cuánto pagó Clementino?

( ) ₡3 600 ( ) ₡1 200

( ) ₡3 400 ( ) ₡ 6 400

⌗ Una expresión racional con expansión decimal infinita periódica corresponde a

( ) 2,7575 ( ) 3,55…

( ) -3,5 ( ) 5

⌗ Una expresión racional con período cero corresponde a

( ) 1,2 ( ) 1, 1212…

( ) $\frac{7}{3}$ ( ) $\frac{-1}{9}$

⌗ Filemón se come $2\frac{2}{3}$ de chocolates. Eso equivale a

( ) $\frac{12}{3}$ ( ) $\frac{7}{3}$

( ) $\frac{8}{3}$ ( ) 2,6

Resolución de problemas varios.

(14) Clemente adquiere un pantalón por Internet a un precio de 16,75 dólares. Su padre le ayudará a pagar la cuarta parte de lo que vale el pantalón. ¿Cuánto pagará el padre? Indique el resultado en fracción y en expansión decimal.

(15) Maximiliano va a un supermercado, y está comparando el precio del café. Un paquete de un cuarto cuesta ₡1 250, mientras que un medio vale ₡2 400.Si necesita comprar un kilo de café, ¿cuál presentación de café es su mejor opción y cuánto dinero debe pagar?

(16) Un padre reparte entre sus hijos 180 postales. Al mayor le da $\frac{4}{9}$ de esa cantidad, al mediano $\frac{1}{3}$ y al menor, el resto. ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción de las postales recibió el tercero?

(17) Para un experimento en la clase de Ciencias, se cuenta con un recipiente que contiene 150 ml de cierto líquido. La profesora solicita a Gardenia que use dos terceras partes de dicho líquido. ¿Cuánta sustancia quedó en el recipiente?

(18) Carmelo va al depósito de materiales del pueblo, y necesita comprar:

- $11\frac{1}{2}$ *m* de rodapié plástico
- 0,75 litros de disolvente para pintura
- Ocho cuartos de litro de barniz
- $\frac{1}{2}$ *m* de arena
- 40 clavos de acero
-

El precio de cada producto, con su impuesto incluido, se resume en la siguiente tabla:

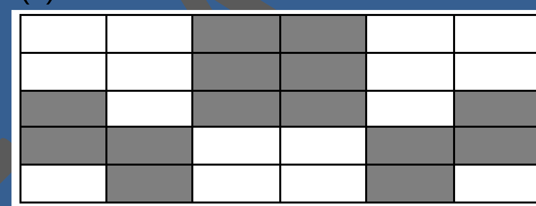
Producto	Precio
Rodapié	₡875 el metro
Disolvente para pintura	₡ 1270 el litro
Barniz	₡ 3750 el litro
Arena	₡ 14 000 el metro
Clavos de acero	₡ 5 500 por 100 clavos

¿Cuánto dinero pagó Carmelo por la compra?

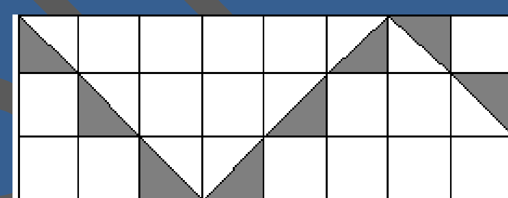
(19) Para la fiesta de la alegría, en un grupo de 30 estudiantes, 10 desean comer pizza, 5 arroz cantonés, 3 queque y el resto hamburguesas. Exprese mediante fracciones cada una de las preferencias.

(20) Escriba la fracción simplificada que representa cada gráfica.

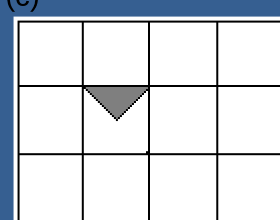
(a)



(b)



(c)



Reto de lógica:
¿Cuántas cifras tiene el número $2^{15} \cdot 5^{17}$?

Conocimiento: Suma y resta de racionales

Escenario de aprendizaje

El grupo 8-F prepara un convivio para celebrar a quienes cumplieron años en el primer trimestre.
Para ello harán una carne asada y deciden comprar:

- $1\frac{1}{2}$ kg de carne de res
- 2, 5 kg de pollo
- $\frac{1}{2}$ kg de chorizo

____

____

____

____

____

____

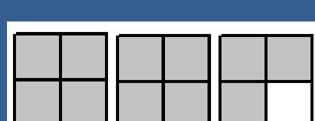
____

¿Cómo resolver una suma o resta de números racionales?

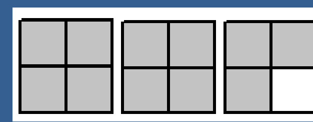
Resolver $3\frac{1}{4}+2{,}75+\frac{3}{4}$

Si usamos representaciones gráficas obtenemos:

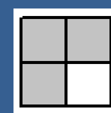
$$3\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$$



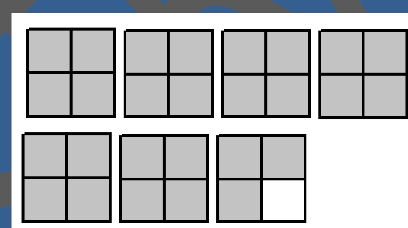
$$2{,}75=2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$$



$\frac{3}{4}$

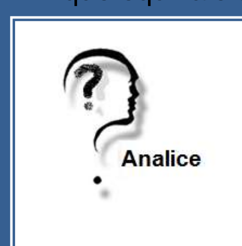


Ahora bien, gráficamente se puede apreciar la fracción que resulta de sumar $\frac{13}{4}+\frac{11}{4}+\frac{3}{4}$



$$=6\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$$

Por tanto, se compró $\frac{27}{4}$ kg de carne, que equivale a 6,75 kg



¿Observa una relación entre $\frac{13}{4}+\frac{11}{4}+\frac{3}{4}$ y su resultado: $\frac{27}{4}$?

En efecto, para sumar fracciones homogéneas, basta con efectuar la suma de los numeradores y mantener el denominador. De manera análoga, se resuelve la resta de fracciones homogéneas.

Ejemplos

1) $\frac{3}{7}+\frac{8}{7}-\frac{1}{7} = \frac{3+8-1}{7} = \frac{10}{7}$

2) $\frac{-9}{5}-\frac{-6}{5} = \frac{-9-{}^{-}6}{5} = \frac{-3}{5}$

3) $\frac{-7}{14}-\frac{3}{14} = \frac{-7-3}{14} = \frac{-10}{14} = \frac{-5}{7}$

En estos casos, tanto las sumas como restas se logran resolver de modo inmediato, puesto que las fracciones involucradas son homogéneas. Sin embargo, si las fracciones no tienen el mismo denominador, no es tan evidente el resultado. Analicemos el siguiente escenario:

Escenario de aprendizaje

En "bici"

Vilana disfruta un día de verano, dando un paseo en bicicleta por el pueblo. Sale de su casa y recorre $\frac{5}{2}$ km al oeste. Toma un poco de agua, y sigue $\frac{4}{5}$ km más en la misma dirección.

¿Qué fracción representa el desplazamiento de Vilana?

Resolver $\frac{-1}{2}+\frac{-1}{3}$

Si deseamos representar estas cantidades en la recta numérica, tendremos que decidir en cuántas partes dividir la unidad. Si la dividimos en dos, no podremos representar -1/3; y si se hace en tres partes, no podríamos ubicar -1/2.

Por ello debemos buscar fracciones equivalentes a $\frac{-1}{3}$ y $\frac{-1}{2}$ y que tengan un mismo denominador (para que la unidad se pueda dividir en la misma cantidad de partes).

Para ello hay que buscar un denominador que sea divisible tanto por 3 como por 2, y preferiblemente lo más pequeño posible. Precisamente esta es la definición de mínimo común múltiplo (mcm).

De este modo el mcm (3,2) = 6. Por lo que el denominador de ambas fracciones debe ser 6.

Ahora bien, cuál debe ser el numerador en cada caso. Veamos:

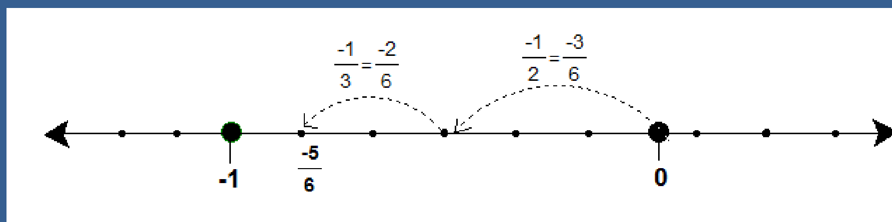
$$\frac{-1}{3} = \frac{?}{6}$$

Observe que el denominador de la nueva fracción fue amplificado dos veces, por tanto, para que la equivalencia se mantenga, el numerador también debe ser amplificado dos veces.

$$\frac{-1}{3} = \frac{-1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{-2}{6}$$

De modo similar se tiene que

$$\frac{-1}{2}=\frac{?}{6}\Rightarrow\frac{-1}{2}\bullet\frac{3}{3}=\frac{-3}{6}$$



Se concluye que Vilana recorrió $\frac{5}{6}$ km al oeste, lo cual se expresa: $\frac{-5}{6}$

Algoritmo para realizar sumas y restas de fracciones heterogéneas

Tal como se explicó anteriormente, lo primero es encontrar un denominador conveniente. A este proceso se le conoce como **homogenización de denominadores.**

Se saca el m.c.m entre los denominadores

Luego para amplificar las fracciones de modo que queden con el nuevo denominador, se puede seguir el siguiente proceso:

El m.c.m se divide entre cada denominador y ese resultado se multiplica por el numerador.

Luego se resuelven las sumas o restas de fracciones homogéneas.

Ejemplos

1) $2\cdot 2=4$ $\quad \frac{2}{3}+\frac{5}{2}=$ $\quad 3\cdot 5=15$

$6\div 3=2$ $\quad \frac{4+15}{6}$ $\quad 6\div 2=3$

$$=\frac{19}{6}$$

3	2	2
3	1	3
1	1	6 = mcm

2) $\frac{-6}{5} - 0{,}1 + 3\frac{1}{5}$

$= \frac{-6}{5} - \frac{1}{10} + \frac{16}{5}$

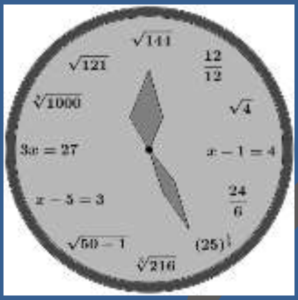
$= \frac{-12 - 1 + 32}{10}$

$= \frac{19}{10}$

5	10	2
5	5	5
1	1	10 = mcm

Tiempo para practicar 1.2

Habilidades:
Aplicar la suma y resta de números racionales en diversos contextos.
Calcular el resultado de sumas y restas, de números racionales en cualquiera de sus representaciones



1. Resuelva cada operación y simplifique al máximo el resultado.

(a) $\frac{-11}{2} + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}$ __________

(b) $4\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ __________

(c) $1{,}3 - \frac{11}{10}$ __________

(d) $-0{,}\overline{5} + \frac{2}{9}$ __________

(e) $\frac{-13}{7} - \frac{-6}{7} + \frac{1}{7}$ __________

(f) $-1\frac{1}{4} - \frac{17}{4} + \frac{3}{4}$ __________

(g) $1{,}23 - \frac{23}{100}$ __________

(h) $-\frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}$ __________

2. Resuelva cada operación y simplifique al máximo el resultado.

(a) $\frac{-2}{3} + \frac{2}{7}$ __________

(b) $\frac{3}{5} + \frac{11}{10}$ __________

(c) $-0{,}\overline{8} + -5\frac{2}{3}$ __________

(d) $\frac{-1}{8} + \frac{3}{4}$ __________

(e) $-2{,}25 + \frac{7}{16} - \frac{1}{4}$ __________

(f) $-10\frac{2}{5} - \frac{11}{15} + \frac{3}{10}$ __________

(g) $\frac{-9}{3} - \frac{-7}{2}$ __________

(h) $-0{,}6 + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$ __________

(i) $3 - \frac{7}{11} + \frac{15}{22}$ __________

(j) $\frac{17}{2} - 1{,}8 - 5$ __________

(k) $\frac{12}{60} - 1{,}3 + \frac{-7}{30}$ __________

(l) $\frac{-7}{6} + 1\frac{2}{15} - \frac{2}{3}$ __________

(m) $-3{,}4 - {}^{-}0{,}6 + 2{,}2$ __________

(n) $\frac{2}{3} - \frac{5+7}{6} + \frac{1}{12}$ __________

(m) $\frac{3}{10} + \frac{7}{5} - 3$ __________

(m) $\frac{-4}{3} + \frac{1}{9} - \frac{7}{3}$ __________

3. Un canasto con chayotes pesa $4\frac{3}{4}$ kg. El canasto vacío pesa $\frac{1}{2}$ kg ¿Cuánto pesan los chayotes?

4. En un colegio de la Zona Sur de Costa Rica, se planea una carrera recreativa. Un joven corrió $\frac{5}{7}$ partes de la ruta; pero luego al sentirse agotado, decidió caminar el resto. ¿Qué parte de la ruta la hizo caminando el joven?

5. En una competencia de velocidad Doménica obtiene una marca de $32\frac{1}{4}$ segundos; mientras que Agostina llega a la meta en 32,75 segundos. ¿Cuánto tiempo de más tardó Agostina con respecto a Doménica?

6. Una institución educativa de Cañas, Costa Rica, compra telas para el Festival Estudiantil de las Artes. Adquiere $7\frac{3}{8}$ m de tela azul, $4\frac{3}{4}$ m de tela naranja y 6 m de tela blanca. ¿Cuántos metros de tela en total se compró?

7. Eleasar desea pintar una bodega con un color celeste. Para ello usa $2\frac{1}{4}$ litros de pintura blanca, a la que le añade $\frac{1}{8}$ litro de pintura azul. ¿Cuántos litros de pintura celeste obtuvo?

8. De modo aproximado, la tabla presenta la fracción que representa la población de cada continente, respecto a la totalidad del planeta:

Continente	Fracción
Oceanía	$\frac{1}{100}$
Europa	$\frac{11}{100}$
América	$\frac{13}{100}$
África	$\frac{3}{20}$
Asia	?

¿Qué fracción de la población total representa el continente asiático?

Ordene los continentes, de menor a mayor, según su población.

9. Los $\frac{4}{8}$ de los ingresos de una familia se emplean en alimentación, $\frac{1}{8}$ se emplea en electricidad, $\frac{1}{12}$ en educación, $\frac{1}{4}$ en mantenimiento del hogar y pago de otros recibos. El resto es para entretenimiento. ¿Qué fracción representa el dinero invertido en el entretenimiento?

10. En una bolsa, Odilia puede cargar 4 kilogramos. Va a la Feria del Agricultor y compra $\frac{1}{4}$ kg de vainica, $1\frac{1}{2}$ kg de papas y 1,75 kg de sandía. ¿Cuántos kilogramos más puede cargar Odilia en la bolsa?

11. Investigue

Indague sobre las propiedades de asociatividad y conmutatividad de la suma de números racionales.

Conocimiento: Multiplicación y división de números racionales

Escenario de aprendizaje

Agua y ejercicio

Gabino sale a correr todos los días, y se hidrata para mantener una buena salud. Por cada kilómetro recorrido toma 0,75 litros de agua.

¿Cuánta agua toma Gabino si recorre 4,6 km? Exprese el resultado en expansión decimal y en fracción.

Resolver 0,5 • 2,8

Se procede a resolver la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 0{,}5 \\ \bullet\ 2{,}8 \\ \hline 4\ 0 \\ +\ 1\ 0 \\ \hline 1{,}4\ 0 \end{array}$$

El resultado es 1,4 que expresado en fracción corresponde a: $1{,}4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

Ahora bien, si desde el inicio se hubieran expresado las cantidades en fracciones se tendría:

$$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$2{,}8 = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$$

De este modo, la operación quedaría:

$$0{,}5 \bullet 2{,}8 = \frac{1}{2} \bullet \frac{14}{5} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

¿Observa una relación entre $\frac{1}{2} \bullet \frac{14}{5}$ y su resultado: $\frac{14}{10}$?

En efecto, al multiplicar esas fracciones, el resultado se obtuvo **al multiplicar los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.** Luego se simplificó el resultado. Y es este precisamente el algoritmo para multiplicar fracciones.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{-1}{6}$$

$$=\frac{\cancel{2}^{1}}{7}\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{5}\cdot\frac{-1}{\cancel{6}\,\cancel{3}_{1}}=\frac{1\cdot3\cdot-1}{7\cdot5\cdot1}=\frac{-3}{35}$$

División de números racionales

Para resolver divisiones con números racionales es conveniente que estén en notación fraccionaria.

Luego la división se cambia a multiplicación y la segunda fracción se cambia a su recíproco.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

También se puede expresar como una fracción compleja:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplos

(1) $\frac{-3}{5}\div\frac{-11}{20}$

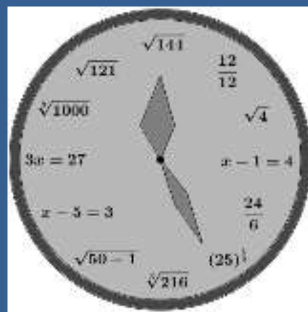
$=\frac{-3}{5}\cdot\frac{-20}{11}=\frac{-3}{\cancel{5}_{1}}\cdot\frac{\cancel{-20}^{4}}{11}=\frac{12}{11}$

(2) $\frac{\frac{-60}{11}}{\frac{20}{33}}=\frac{-\cancel{60}^{-3}\cdot{}^{3}\cancel{33}}{\cancel{11}_{1}\cdot{}_{1}\cancel{20}}=-9$

(3) $2{,}\overline{8}\div\frac{1}{2}=\frac{26}{9}\cdot 2=\frac{52}{9}$

Tiempo para practicar 1.3

Habilidades:
Calcular el resultado de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números racionales en cualquiera de sus representaciones.



1. Resuelva cada operación y simplifique al máximo el resultado.

(a) $\frac{-7}{33} \bullet \frac{11}{49}$ ________

(b) $0,9 \bullet \frac{18}{5}$ ________

(c) $-0,\overline{5} \bullet -4\frac{5}{9}$ ________

(d) $\frac{-1}{5} \bullet \frac{-35}{8} \bullet 7$ ________

(e) $3\frac{1}{6} \bullet \frac{5}{38} \bullet \frac{-36}{15}$ ________

(f) $-\frac{2}{7} \bullet \frac{11}{3} \bullet 5$ ________

(g) $1,1 \bullet 0,2 \bullet 3,5$ ________

(h) $-6 \bullet 0,\overline{4} \bullet \frac{9}{10}$ ________

(i) $\frac{7}{121} \bullet -121$ ________

(j) $5\frac{1}{2} \bullet \frac{4}{3} \bullet \frac{9}{22}$ ________

2. Resuelva cada operación y simplifique al máximo el resultado.

(a) $\frac{-5}{3} \div \frac{1}{7}$ ________

(b) $\frac{27}{12} \div \frac{9}{4}$ ________

(c) $-2,4 \div -0,\overline{6}$ ________

(d) $\frac{11}{5} \div -2\frac{2}{3}$ ________

(e) $-\frac{3}{7} \div \frac{9}{14} \div \frac{-21}{8}$ ________

(f) $-\frac{2}{5} \div \frac{2}{5} \bullet \frac{7}{15}$ ________

(g) $\frac{-11}{3} \div \frac{-5}{2}$ ________

(h) $-2,8 \bullet 0,\overline{5} \div 0,7$ ________

(i) $\frac{7}{8} \div -8 \div \frac{-21}{64}$ ________

(j) $\dfrac{\frac{-13}{4}}{\frac{26}{2}}$ ________

(k) $\dfrac{\frac{-15}{9}}{\frac{25}{3}} \bullet \frac{18}{5}$ ________

(l) $\dfrac{\frac{-1}{7}}{\frac{2}{49}} \div \dfrac{\frac{-8}{3}}{\frac{4}{9}}$ ________

3. Rufina desea hacer una copia de seguridad de los archivos de su PC que ocupan 188 GB ¿Cuántos DVD’s de 4,5 GB necesita al menos para hacerlo?

4. El perímetro de un cuadrado es de $\frac{20}{3}dm$. Determine el área de ese cuadrado.

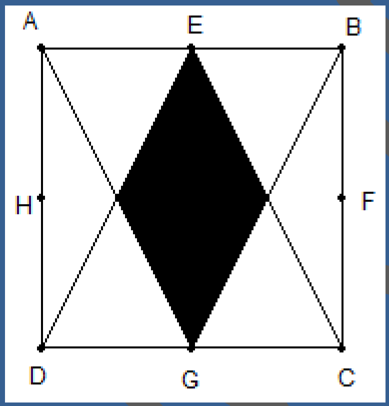
5. Jacinta necesita hacer las invitaciones para la celebración del Día de la Madre del colegio. Decide hacerlas de forma rectangular con medidas de 12,5 cm de largo y $\frac{42}{5}$ cm de ancho. ¿Cuánto material en cm^2 necesita para cada invitación?

6. La señal de tránsito de CEDA EL PASO tiene forma de triángulo equilátero, cuya base mide $\frac{9}{10}m$ y la altura aproximadamente 0,8m. Determine el área de dicha señal.

7. Determine qué fracción de la unidad representa:

(a) La mitad de la mitad.
(b) La mitad de la tercera parte.
(c) La tercera parte de la mitad.

8. Considere la figura.



El cuadrado tiene de lado 1 dm. H, F, G y E son puntos medios de los lados. Determine el área destacada en negro. Exprese la respuesta en fracción.

9. Una habitación tiene forma rectangular. Su ancho mide 3m y el largo $\frac{15}{2}$ m. Se desea poner en la habitación porcelanato (pegado de modo que no queda fragua). Este viene en cuadros de $\frac{1}{2}$ metro de lado. ¿Cuántos cuadros se necesitan para colocar en toda la habitación

10. En un terreno, se prepara $\frac{2}{3}$ partes para sembrar. Se cultivará maíz en la mitad de esa parte que se preparó. ¿Qué porción del terreno se usará para sembrar maíz?

11. En una fiesta reparten un queque. El cumpleañero se llevó la mitad del queque y le regala una cuarta parte a su hermano. El hermano toma de su pedazo y le da la mitad a su amiga. ¿Qué porción de la totalidad del queque le correspondió a la amiga?

12. Un grifo vierte en un barril $\frac{6}{5}$ litros de agua por minuto. Si trascurren 5,5 minutos, ¿cuánta agua se vertió en el barril?

13. Una señora paga ₡4 875 por $\frac{13}{4}$ m de tela. ¿Cuánto vale un metro de esa tela?

Conocimiento: Potencia y radicación de números racionales

Escenario de aprendizaje

Según los conocimientos adquiridos, cómo se puede obtener el resultado de

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4$$

Potencias de números racionales

Así como se definió la potencia para números enteros en sétimo nivel, ahora desarrollaremos operaciones que involucren esta definición, pero en los números racionales.

Para ello, resolvamos esta operación:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{3}{5}\bullet\frac{3}{5}\bullet\frac{3}{5}\bullet\frac{3}{5}=\frac{81}{625}=\frac{3^4}{5^4}$$

Se deduce con este ejercicio la siguiente propiedad:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n};\quad b\neq 0$$

Otras dos propiedades muy importantes son:

- ◊ $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n};\ a\neq 0$
- ◊ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n=\dfrac{b^n}{a^n};$

$a\neq 0,\ b\neq 0$

Ejemplo

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3+(4)^{-2}$$

$$=\frac{1^3}{2^3}+\frac{1}{4^2}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

$$=\frac{2+1}{16}=\frac{3}{16}$$

En los números racionales también son válidas las leyes de potencias estudiadas en números naturales

- ◊ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m\bullet\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{m+n}$
- ◊ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m\div\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{m-n}$
- ◊ $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^m\right]^n=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{m\bullet n}$
- ◊ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^0=1$

Radicales de números racionales.

En sétimo nivel habíamos estudiado la operación inversa de la potencia: la radicación. Respecto a los números racionales se siguen los mismos principios aprendidos.

Por ejemplo, para obtener $\sqrt{\frac{9}{4}}$ basta con encontrar un número racional que multiplicado por sí mismo dos veces dé $\frac{9}{4}$. Por tanto $\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$ ya que $\frac{3}{2}\bullet\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$ y $\frac{-3}{2}\bullet\frac{-3}{2}=\frac{9}{4}$.

Con este caso se puede deducir la siguiente propiedad:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad b \neq 0$$

Ejemplos

(1) $\sqrt{\frac{100}{64}}$

$= \frac{10}{8}$

$= \frac{5}{4}$

(2) $\sqrt{1,69}$

$= \sqrt{\frac{169}{100}}$

$= \frac{13}{10}$

(3) $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}} + \sqrt{0,02\overline{7}} \bullet \frac{6}{5}$

$= \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{125}} + \sqrt{\frac{1}{36}} \bullet \frac{6}{5}$

$= \frac{-2}{5} + \underbrace{\frac{1}{\cancel{6}} \bullet \frac{\cancel{6}}{5}}$

$= \frac{-2}{5} + \frac{1}{5}$

$= \frac{-1}{5}$

Operaciones combinadas con racionales.

Recordemos la prioridad para resolver operaciones combinadas:

- Paréntesis.
- Radicación y potenciación.
- División y multiplicación.
- Suma y resta.
-

(1) $\sqrt{\frac{25}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-1}{27}} \bullet \left(\frac{3}{2}\right)^2 \div 0,\overline{6}$

$= \frac{5}{2} + \frac{-1}{3} \bullet \frac{9}{4} \div \frac{6}{9}$

$= \frac{5}{2} + \underbrace{\frac{-1}{\cancel{3}_1} \bullet \frac{\cancel{9}^3}{4} \bullet \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{6}_2}}$

$= \frac{5}{2} + \frac{-9}{8}$

$= \frac{20+-9}{8} = \boxed{\frac{11}{8}}$

(2) $3^{-1}-\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}\right)+0,\overline{3}\right]$

$=\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{2-15}{6}+\frac{3}{9}\right]$

$=\frac{1}{3}-\left[\underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{-13}{6}}+\frac{1}{3}\right]$

$=\frac{1}{3}-\left[\frac{-13}{30}+\frac{1}{3}\right]$

$=\frac{1}{3}-\frac{-13+10}{30}$

$=\frac{1}{3}-\frac{-3}{30}$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}$

$=\frac{10+3}{30}=\boxed{\frac{13}{30}}$

(3) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-1\right)^{2}+\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}}{0,\overline{2}\cdot\frac{3}{2}\div\frac{3}{4}}$

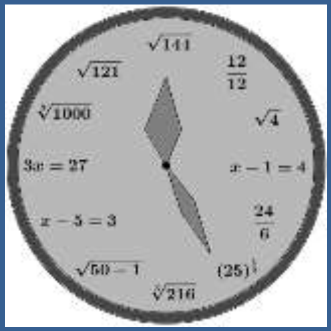
$=\dfrac{\left(\frac{2-3}{3}\right)^{2}+\frac{-2}{3}}{\frac{\cancel{2}}{9}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}}$

$=\dfrac{\left(\frac{-1}{3}\right)^{2}+\frac{-2}{3}}{\frac{4}{9}}=\dfrac{\frac{1}{9}+\frac{-2}{3}}{\frac{4}{9}}$

$=\dfrac{\frac{1-6}{9}}{\frac{4}{9}}=\dfrac{\frac{-5}{\cancel{9}}}{\frac{4}{\cancel{9}}}=\boxed{\frac{-5}{4}}$

Tiempo para practicar 1.4

Habilidades: Efectuar operaciones con potencias de base racional y exponente entero. Calcular raíces n-ésimas de un número racional. Calcular resultados de operaciones con números racionales de expresiones donde haya combinación de operaciones con paréntesis o sin ellos.



1. Resuelva cada operación y simplifique al máximo el resultado.

(a) $\left(\frac{5}{4}\right)^{3}$ (b) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{4}$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$ (d) $\left(\frac{-9}{15}\right)^{0}$

(e) $\left(\frac{8}{7}\right)^{1}$ (f) $\frac{5^{3}}{4}$

(g) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}$ (h) -9^{-4}

(i) $\left(\frac{-1}{3}\right)^{-5}$ (j) $\left(\frac{-7}{4}\right)^{4}$

2. Complete los cuadros vacíos con el número que permite se cumpla la igualdad.

(a) $\left(\frac{2}{9}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{7}=\left(\frac{2}{9}\right)^{\square}$

(b) $\left(\frac{-3}{7}\right)^{9}\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)=\left(\frac{-3}{7}\right)^{\square}$

(c) $\left(\frac{6}{11}\right)^{9}\bullet\left(\frac{6}{11}\right)^{-7}=\left(\frac{6}{11}\right)^{\square}$

(d) $\left(\frac{8}{3}\right)^{11}\bullet\left(\frac{3}{8}\right)^{6}=\left(\frac{8}{3}\right)^{\square}$

(e) $(0,7)^{-8}\bullet\left(\frac{7}{10}\right)^{6}=\left(\frac{7}{10}\right)^{\square}$

(f) $\left(\frac{5}{2}\right)^{17}\bullet\left(\frac{2}{5}\right)^{11}=(0,4)^{\square}$

(g) $\left(\frac{1}{9}\right)^{15}\div\left(\frac{1}{9}\right)^{7}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\square}$

(h) $\left(\frac{-7}{3}\right)^{12}\div\left(\frac{-7}{3}\right)^{9}=\left(\frac{-7}{3}\right)^{\square}$

(i) $\left(0,\overline{5}\right)^{21}\div\left(\frac{9}{5}\right)^{3}=\left(\frac{5}{9}\right)^{\square}$

(j) $\left(\frac{11}{6}\right)^{10}\div\left(\frac{11}{6}\right)^{2}\bullet\left(\frac{11}{6}\right)^{7}=\left(\frac{11}{6}\right)^{\square}$

(k) $\left[\left(\frac{19}{2}\right)^{10}\right]^{4}=\left(\frac{19}{2}\right)^{\square}$

(l) $\left[\left(\frac{-8}{3}\right)^{-7}\right]^{3}=\left(\frac{-8}{3}\right)^{\square}$

(m) $\left[\left(\frac{17}{8}\right)^{4}\right]^{9}=\left(\frac{8}{17}\right)^{\square}$

(n) $\left[\left(\frac{15}{4}\right)^{7}\bullet\left(\frac{15}{4}\right)^{3}\div\left(\frac{4}{15}\right)^{4}\right]^{6}=\left(\frac{15}{4}\right)^{\square}$

(ñ) $\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\bullet(0,5)^{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}\right]^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\square}$

3. Resuelva cada operación y simplifique al máximo el resultado.

(a) $\sqrt{\frac{100}{121}}$ ____________

(b) $\sqrt[3]{\frac{216}{125}}$ ____________

(c) $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}$ ____________

(d) $\sqrt[4]{0,0625}$ ____________

(e) $\sqrt[3]{0,125}$ ____________

(f) $\sqrt{\frac{169}{49}}$ ____________

(g) $\sqrt[7]{\frac{-2187}{128}}$ ____________

(h) $\sqrt[3]{\frac{1331}{2744}}$ ____________

(i) $\sqrt{1+\frac{5}{4}}$ ____________

(j) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}-\frac{13}{24}}$ ____________

4. El área de un cuadrado es de $\frac{36}{49}m^2$

Determine el perímetro de dicho cuadrado.

5. Resuelva cada operación y simplifique al máximo

(a) $\frac{4}{7}-\sqrt{\frac{9}{49}}\div\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}$

(b) $\left(\frac{12}{5}-\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 2\frac{1}{5}$

(c) $\left[\frac{1}{2}\cdot 0{,}6-\left(2\frac{11}{21}-\frac{13}{7}\right)\right]+\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$

(d) $\dfrac{\left(\frac{-1}{3}\right)^2}{\frac{2}{4}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)}$

(e) $\dfrac{\left[\left(2\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2\right]^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(2\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1}}$

(f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{6}{4}\div\sqrt[3]{\frac{27}{8}}\right)$

(g) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\left[\frac{7}{3}\left(\sqrt{\frac{4}{25}}\cdot\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)-\frac{1}{3}\right]$

6. En un paseo a playa Conchal, una familia disfruta del sol y a la vez se hidrata. Para ello, consumen dos botellas de litro y medio con agua, 4 vasos de $\frac{1}{3}$ de litro con fresco de naranja y 5 limonadas de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántos litros de líquido han bebido?

Reto de lógica:

Una madre da a sus hijos dinero para que compren unos pastelitos. Cuando ella regresa ya no había pastelitos.

Darío (uno de sus tres hijos) dijo: Imelda comió un tercio del total, más un tercio de un pastelillo; después Higinio comió la mitad de lo que quedaba, más medio pastelillo. Al final, solo quedaron cinco panecillos para mí. ¿Cuántos pastelillos compraron?

GEOMETRÍA

Geometría

Cada vez que contemplamos una obra arquitectónica, no podemos dejar de pensar en el aporte que ha dado la geometría en el avance de la humanidad. Desde imponentes maravillas del mundo antiguo, hasta modernos edificios, son muestras de conocimientos geométricos aplicados a la ingeniería.

En esta oportunidad, estudiaremos las relaciones que existen entre entes geométricos que mantienen una escala entre sí. Por ejemplo, entre una maqueta y el edificio real, el mapa de Costa Rica y el propio territorio nacional o entre un dibujo y su ampliación.

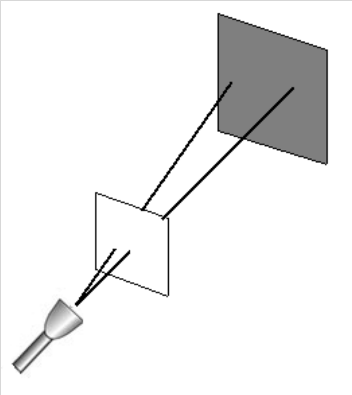
Conocimiento: Homotecia

Escenario de aprendizaje

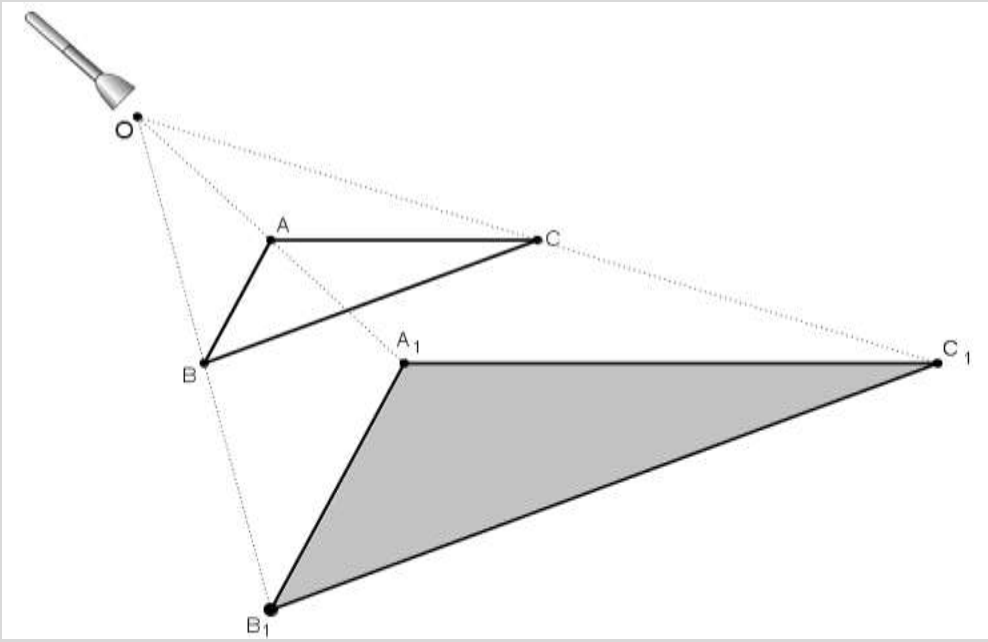
Jugando con un foco

Hacer figuras con las manos para que queden reflejadas en la pared, es un pasatiempo que casi todos hemos hecho. La creatividad se pone de manifiesto al formar diversas siluetas con la ayuda de un foco.

Y más sorprendente aún es saber que este sencillo juego, tiene un principio matemático básico.



Para analizar esas relaciones geométricas, considere el siguiente caso, donde se representa un foco que alumbra al ΔABC que proyecta una sombra de mayor tamaño, designada como $\Delta A_1B_1C_1$:



Con ayuda del transportador y regla, mida lo que se le solicita y analice los resultados:

(a) $m\measuredangle CAB$ ____, $m\measuredangle C_1A_1B_1$ ____ ¿Qué relación cumplen? ____________

(b) $m\measuredangle ABC$ ____, $m\measuredangle A_1B_1C_1$ ____ ¿Qué relación cumplen? ____________

(c) $m\measuredangle BCA$ ____, $m\measuredangle B_1C_1A_1$ ____ ¿Qué relación cumplen? ____________

(d) $m\overline{AB}$ ____, $m\overline{A_1B_1}$ ____, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{\square}{\square} =$ ______

(e) $m\overline{AC}$ ____, $m\overline{A_1C_1}$ ____, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{\square}{\square} =$ ______

(f) $m\overline{BC}$ ____, $m\overline{B_1C_1}$ ____, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{\square}{\square} =$ ______

(g) $m\overline{OB}$ ____, $m\overline{OB_1}$ ____, $\frac{OB}{OB_1} = \frac{\square}{\square} =$ ______

(h) $m\overline{OA}$ ____, $m\overline{OA_1}$ ____, $\frac{OA}{OA_1} = \frac{\square}{\square} =$ ______

(i) $m\overline{OC}$ ____, $m\overline{OC_1}$ ____, $\frac{OC}{OC_1} = \frac{\square}{\square} =$ ______

Este escenario nos permite analizar diversas relaciones:

- ☑ Cada vértice del $\triangle ABC$ y su respectiva proyección se denominan ***vértices homólogos.***
- ☑ Cada lado del triángulo original y su respectiva proyección se denominan ***lados homólogos.***
- ☑ Cada ángulo del $\triangle ABC$ y su respectiva proyección se denominan ***ángulos homólogos.***
- ☑ En este caso, O es el ***centro*** de la homotecia
- ☑ Aunque los "tamaños" de los $\triangle ABC$ y $\triangle A_1B_1C_1$ son diferentes, la "forma" es la misma.
- ☑ Los ***ángulos homólogos*** tienen la ***misma medida.*** En este escenario se cumple:

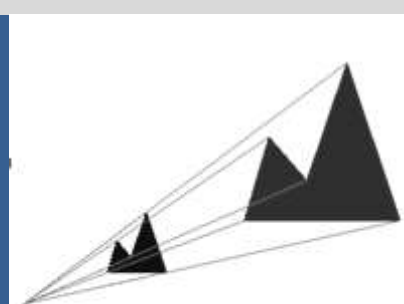
$$m\measuredangle CAB = m\measuredangle C_1A_1B_1,\ m\measuredangle ACB = m\measuredangle A_1C_1B_1,\ m\measuredangle CBA = m\measuredangle C_1B_1A_1,$$

- ☑ Los ***lados homólogos*** guardan una misma ***proporción*** "k". El segmento formado por el centro O y un vértice del $\triangle ABC$ y el segmento formado por O y el vértice homólogo, mantienen la misma proporción "k". En este caso sería:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1} = k$$

Definición de Homotecia

Una homotecia es una transformación isomórficas, es decir que conservan la forma de la figura original, donde existe una proporcionalidad entre la figura original y su homóloga.



Una homotecia de centro O y razón k es la transformación que hace corresponder a un punto A otro A_1, alineado con A y O, tal que

$$\boxed{OA_1 = k \cdot OA}$$

Si estamos trabajando en el plano cartesiano, donde cada punto se representa mediante un par ordenado (x, y), la homotecia de centro O(m, n) y razón k envía al punto A (x, y) al punto A_1 (x_1, y_1) mediante la siguiente relación:

$$\boxed{\begin{array}{c} A_1 = k \cdot A + (1-k)O \\ (x_1, y_1) = k(x, y) + (1-k) \cdot (m, n) \end{array}}$$

Para resolver estas operaciones, es necesario conocer las siguientes propiedades:

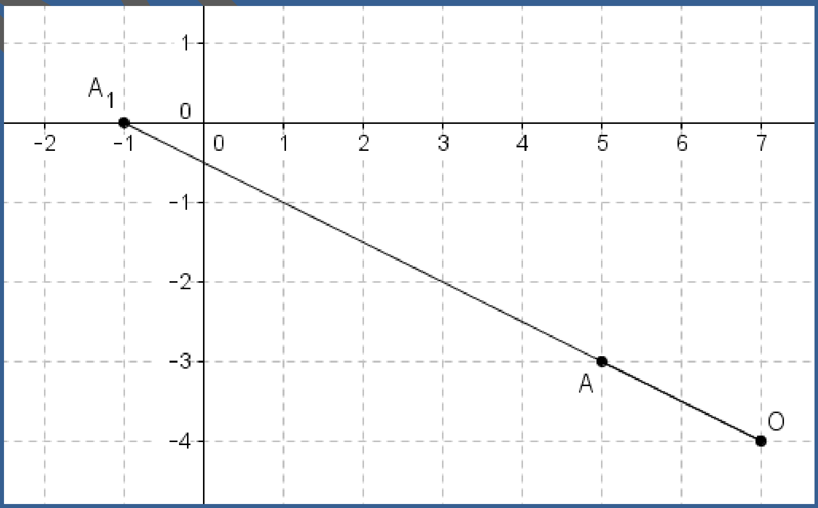
$$k(x, y) = (kx, ky)$$
$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$
$$(x, y) - (x_1, y_1) = (x - x_1, y - y_1)$$

Ejemplo 1

Determine y grafique la homotecia del punto $(5,-3)$ con una razón de 4 y centro $(7,-4)$

Al usar la fórmula para hallar el punto se tiene que:

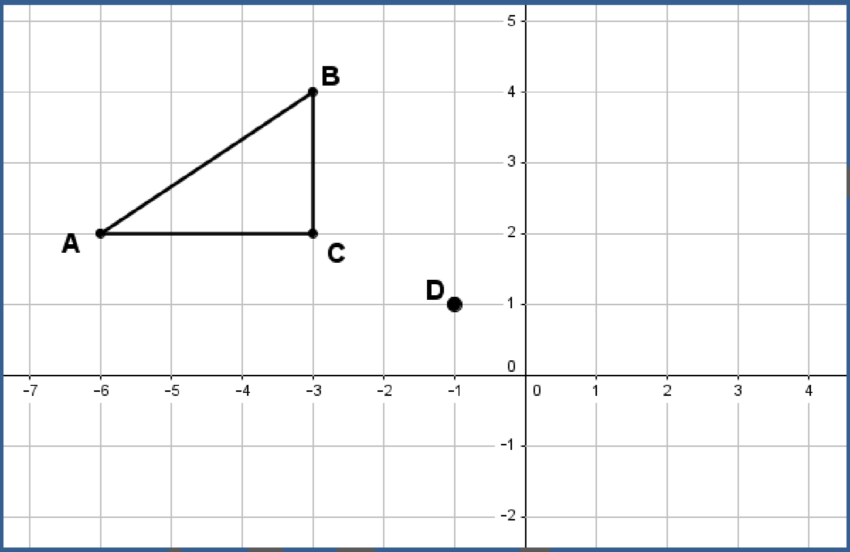
$$A_1 = k \cdot A + (1-k)O$$
$$A_1 = 4 \cdot (5,-3) + (1-4)(7,-4)$$
$$= (20,-12) + -3(7,-4) = (20,-12) + (-21, 12) = \boxed{(-1, 0)}$$



Ejemplo 2

Determine y grafique la homotecia del triángulo ABC determinado por los puntos $A(-6,2), B(-3,4), C(-3,2)$ con una razón de -2 y centro $(-1,1)$

Primero ubiquemos los vértices del ΔABC y construimos la figura.

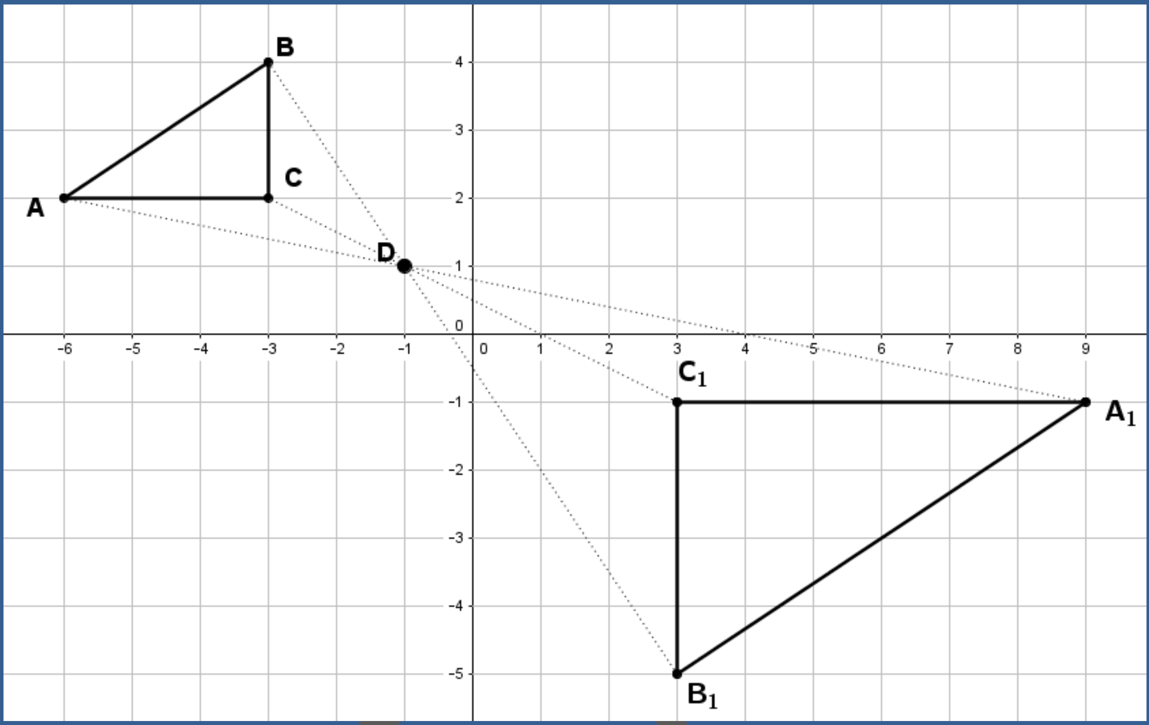


Para determinar la homotecia de ese triángulo, conviene determinar los puntos homólogos de A, B y C, para lo cual usamos la fórmula anterior.

$$\mathbf{A}_1 = -2\bullet(-6,2)+\left(1-{}^{-}2\right)(-1,1)$$
$$= (12,-4)+3(-1,1) = (12,-4)+(-3,3) = \boxed{(9,-1)}$$

$$\mathbf{B}_1 = -2\bullet(-3,4)+\left(1-{}^{-}2\right)(-1,1)$$
$$= (6,-8)+3(-1,1) = (6,-8)+(-3,3) = \boxed{(3,-5)}$$

$$\mathbf{C}_1 = -2\bullet(-3,2)+\left(1-{}^{-}2\right)(-1,1)$$
$$= (6,-4)+3(-1,1) = (6,-4)+(-3,3) = \boxed{(3,-1)}$$



En la figura se observa que $A_1 C_1$ = 6 unidades, mientras que AC = 3 unidades. Es decir, $A_1 C_1$ es el doble de AC. Esto concuerda con el hecho de que la constante “k” de proporción es -2.

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = 2$$

El signo negativo de la “k” se estudiará más adelante.

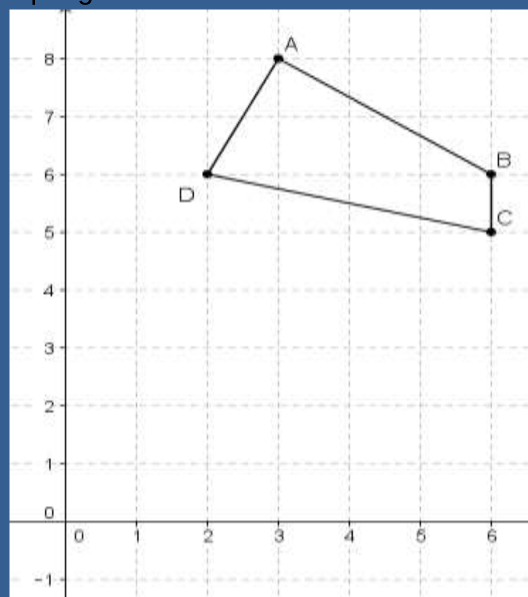
También es importante destacar que:

$$m\measuredangle A_1 = m\measuredangle A$$
$$m\measuredangle B_1 = m\measuredangle B$$
$$m\measuredangle C_1 = m\measuredangle C$$

Ejemplo 3

Determine y grafique la homotecia del polígono ABCD determinado por los puntos $A(3,8), B(6,6), C(6,5), D(2,6)$ con una razón de $\frac{5}{2}$ y centro $(7,8)$

Primero se grafica el polígono:



Luego se calcula cada vértice homólogo con la fórmula estudiada:

$$A_1 = \frac{5}{2} \bullet (3,8) + \left(1 - \frac{5}{2}\right)(7,8)$$

$$= \left(\frac{15}{2}, 20\right) + -\frac{3}{2}(7,8) = \left(\frac{15}{2}, 20\right) + \left(\frac{-21}{2}, -12\right) = \boxed{(-3,8)}$$

$$B_1 = \frac{5}{2} \bullet (6,6) + \left(1 - \frac{5}{2}\right)(7,8)$$

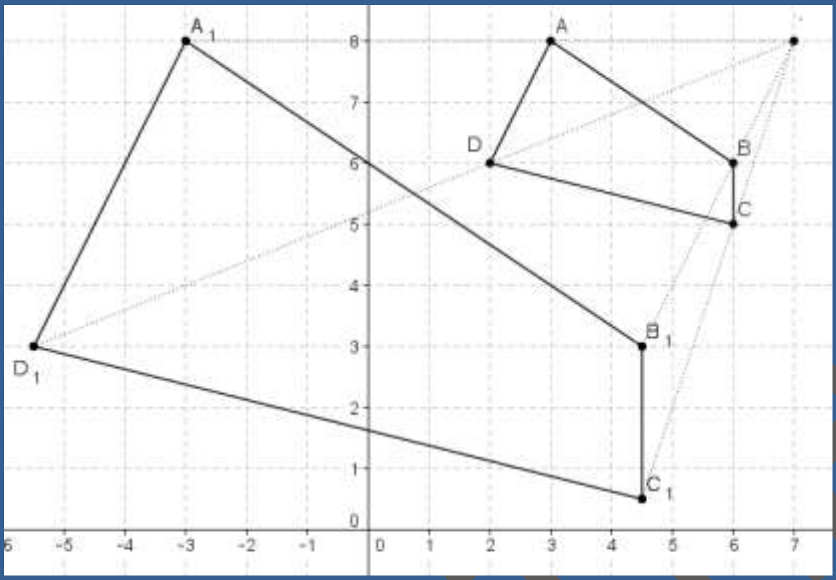
$$= (15,15) + \left(\frac{-21}{2}, -12\right) = \boxed{\left(\frac{9}{2}, 3\right)}$$

$$C_1 = \frac{5}{2} \bullet (6,5) + \left(1 - \frac{5}{2}\right)(7,8)$$

$$= \left(15, \frac{25}{2}\right) + \left(\frac{-21}{2}, -12\right) = \boxed{\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

$$D_1 = \frac{5}{2} \bullet (2,6) + \left(1 - \frac{5}{2}\right)(7,8)$$

$$= (5,15) + \left(\frac{-21}{2}, -12\right) = \boxed{\left(\frac{-11}{2}, 3\right)}$$



En este caso, el punto A_1 es homólogo al punto A, B_1 a B, C_1 a C, D_1 a D.

El lado $\overline{A_1D_1}$ es homólogo a $\overline{AD}$, $\overline{A_1B_1}$ a $\overline{AB}$, $\overline{C_1B_1}$ a $\overline{CB}$, $\overline{C_1D_1}$ a $\overline{CD}$

Homotecia directa

Son aquellas homotecias en las cuales los elementos están a un mismo sentido direccional respecto a su centro. Se da cuando $k > 0$

Existen tres posibilidades para las homotecias directas:

⌗ $k > 1$

La figura que se forma mediante la homotecia tendrá dimensiones mayores a la original. El ejemplo 3 resuelto anteriormente corresponde a este tipo de homotecias.

⌗ $0 < k < 1$

La figura que se forma mediante la homotecia tendrá dimensiones menores a la original.

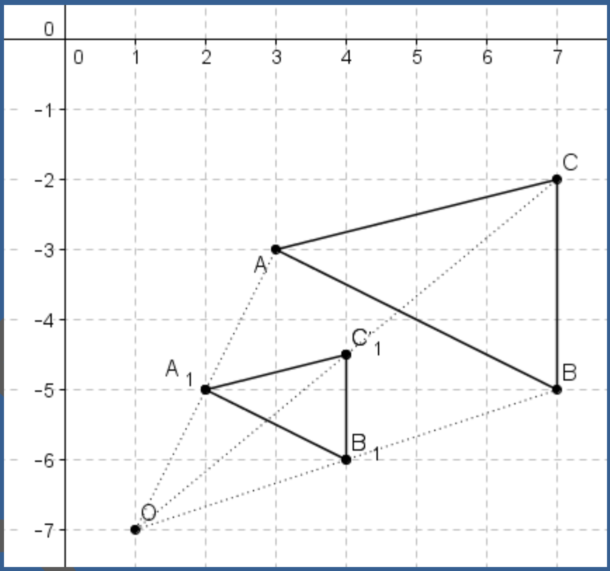
Ejemplo 4

Determine y grafique la homotecia del triángulo ABC determinado por los puntos $A(-3,3), B(7,-5), C(7,-2)$ con una razón de $\frac{1}{2}$ y centro $(1,-7)$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2} \bullet (-3,3) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1,-7) = \boxed{(2,-5)}$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2} \bullet (7,-5) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1,-7) = \boxed{(4,-6)}$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2} \bullet (7,-2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1,-7) = \boxed{\left(4, -\frac{9}{2}\right)}$$



$k = 1$

Veamos qué sucede en este caso. Para ello consideremos el mismo triángulo del ejemplo anterior: $A(-3,3), B(7,-5), C(7,-2)$ con una razón de 1 y centro $(1,-7)$

$$\mathbf{A}_1 = 1 \bullet (-3,3) + (1-1)(1,-7) = \boxed{(-3,3)}$$

Note que en este caso, la homotecia del punto A coincide consigo mismo.
Por tanto cuando k = 1, la figura que se forma coincide con la original.

Homotecia indirecta

Son aquellas homotecias en las cuales los elementos están a un sentido direccional opuesto respecto a su centro. Se da cuando $k < 0$

Existen tres posibilidades para las homotecias indirectas:

$k < -1$

La figura que se forma mediante la homotecia tendrá dimensiones mayores a la original.

Ejemplo 5

Determine y grafique la homotecia del pentágono ABEDC determinado por los puntos $A(-3,6), B(-5,4), C(-2,5), D(-2,4), E(-3,3)$ con una razón de -2 y centro $(-1,3)$

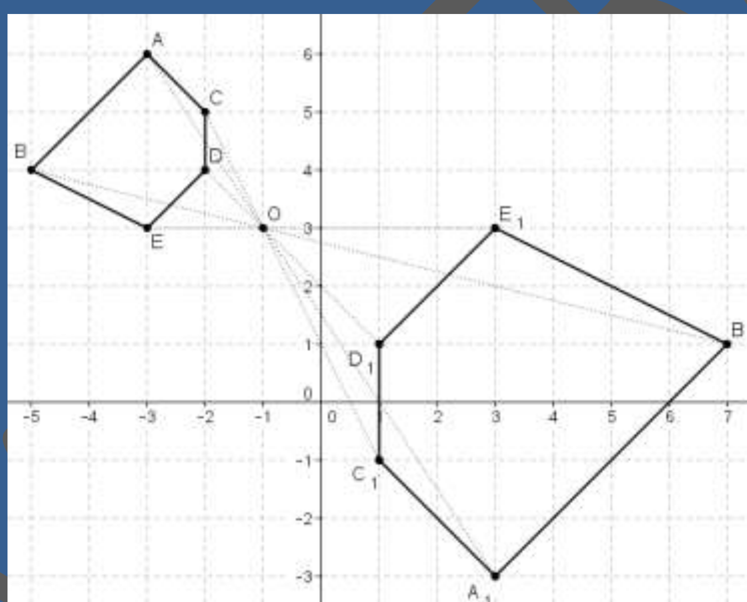
$$A_1 = -2 \bullet (-3,6) + \left(1 - {}^{-}2\right)(-1,3) = \boxed{(3,-3)}$$

$$B_1 = -2 \bullet (-5,4) + \left(1 - {}^{-}2\right)(-1,3) = \boxed{(7,1)}$$

$$C_1 = -2 \bullet (-2,5) + \left(1 - {}^{-}2\right)(-1,3) = \boxed{(1,-1)}$$

$$D_1 = -2 \bullet (-2,4) + \left(1 - {}^{-}2\right)(-1,3) = \boxed{(1,1)}$$

$$E_1 = -2 \bullet (-3,3) + \left(1 - {}^{-}2\right)(-1,3) = \boxed{(3,3)}$$



⌗ $-1 < k < 0$

La figura que se forma mediante la homotecia tendrá dimensiones menores a la original.

Ejemplo 6

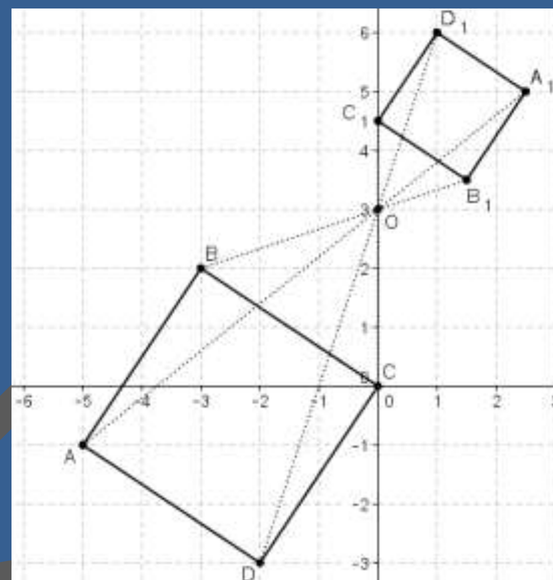
Determine y grafique la homotecia del cuadrado ABCD determinado por los puntos $A(-5,-1), B(-3,2), C(0,0), D(-2,-3)$ con una razón de $-0{,}5$ y centro $(0,3)$

$$\mathbf{A_1} = -0{,}5\bullet(-5,-1) + \left(1 - {}^{-}0{,}5\right)(0,3) = \boxed{\left(\frac{5}{2}, 5\right)}$$

$$B_1 = -0{,}5\bullet(-3,2) + \left(1 - {}^{-}0{,}5\right)(0,3) = \boxed{\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)}$$

$$\mathbf{C_1} = -0{,}5\bullet(0,0) + \left(1 - {}^{-}0{,}5\right)(0,3) = \boxed{\left(0, \frac{9}{2}\right)}$$

$$\mathbf{D_1} = -0{,}5\bullet(-2,-3) + \left(1 - {}^{-}0{,}5\right)(0,3) = \boxed{(1,6)}$$



⌗ $k = -1$

La figura que se forma coincide en dimensiones con la original, pero en sentido direccional opuesto.

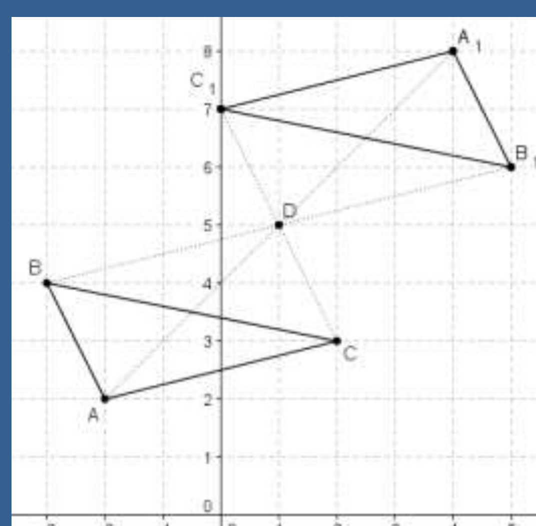
Ejemplo 7

Determine y grafique la homotecia del triángulo ABC determinado por los puntos $A(-2,2), B(-3,4), C(2,3)$ con una razón de -1 y centro $(1,5)$

$$\mathbf{A_1} = -1\bullet(-2,2) + \left(1 - {}^{-}1\right)(1,5) = \boxed{(4,8)}$$

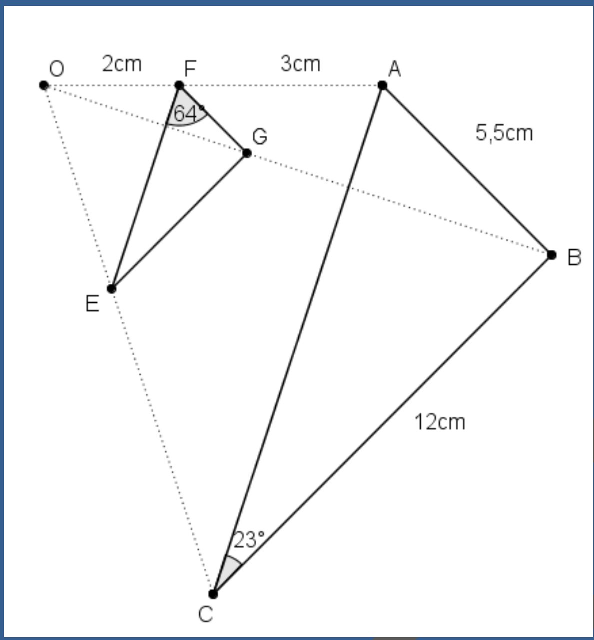
$$\mathbf{B_1} = -1\bullet(-3,4) + \left(1 - {}^{-}1\right)(1,5) = \boxed{(5,6)}$$

$$\mathbf{C_1} = -1\bullet(2,3) + \left(1 - {}^{-}1\right)(1,5) = \boxed{(0,7)}$$



Ejemplo 8

De acuerdo con los datos de la figura, donde se representa una homotecia de centro 0 determine



(a) $m\measuredangle B$

Como en las homotecias los ángulos homólogos son congruentes, se tiene que $m\measuredangle A = m\measuredangle F = 64°$

Ahora bien, como la suma de ángulos internos de un triángulo es de 180°, se cumple que

$m\measuredangle B = 180° - 64° - 23° = 93°$

(b) GE.

En una homotecia, los lados homólogos son proporcionales. En la figura se cumple que

$\frac{OF}{OA} = \frac{GE}{BC}$, por lo que reemplazando los valores de la figura se obtiene:

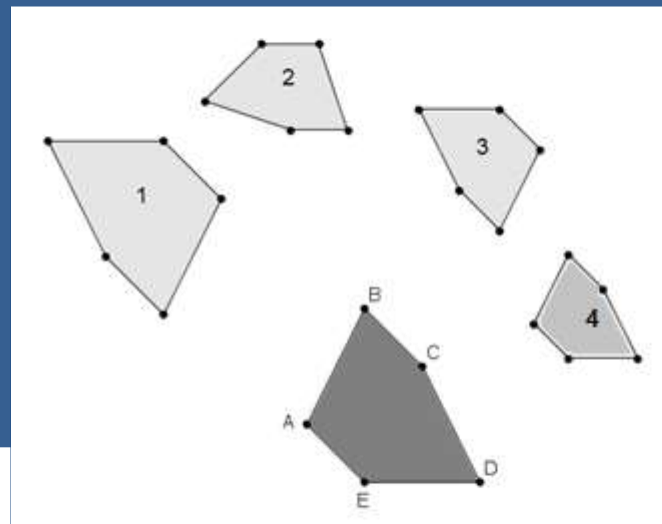
$$\frac{2}{5} = \frac{x}{12}$$

Note que ha quedado una expresión que se puede resolver mediante regla de tres, de la siguiente manera:

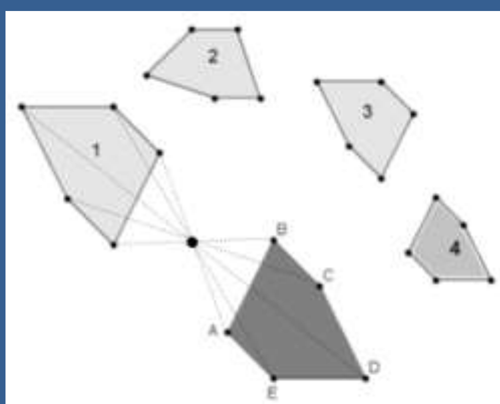
$$\frac{2 \cdot 12}{5} = x \quad \Rightarrow \quad x = 4{,}8\,cm$$

Ejemplo 9

Determine cuáles figuras son homotecias del pentágono ABCDE.



Se logra visualizar que a la figura (2) no solo se le aplicó una homotecia, sino también una rotación. Por tanto son homotecias del pentágono ABCDE las figuras (1), (3) y (4)



Otra forma de terminar que una figura es homotecia de otra, es unir los posibles vértices homólogos con líneas, y verificar que todas se cortan en un punto común que es el vértice.

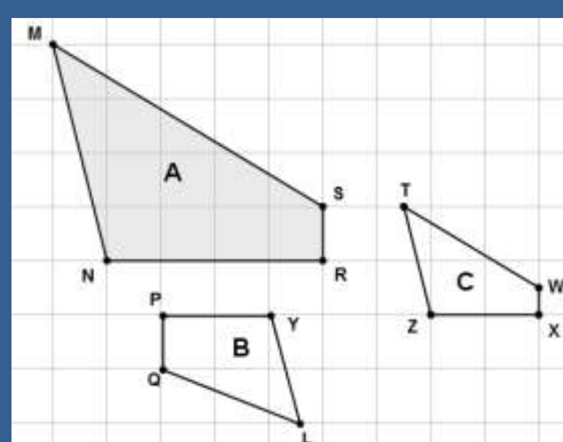
Haga la prueba con las demás figuras.

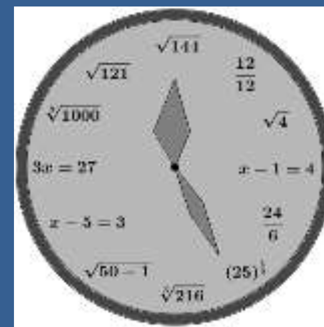
Ejemplo 10

Determine cuál figura es homotecia del cuadrilátero MNSR

Note que todos los lados de la figura C miden la mitad de sus homólogos de A.

En el caso de la figura B, $\overline{PQ}$ mide igual que su homólogo $\overline{RS}$; mientras que el resto de lados mantienen una proporción de $\frac{1}{2}$



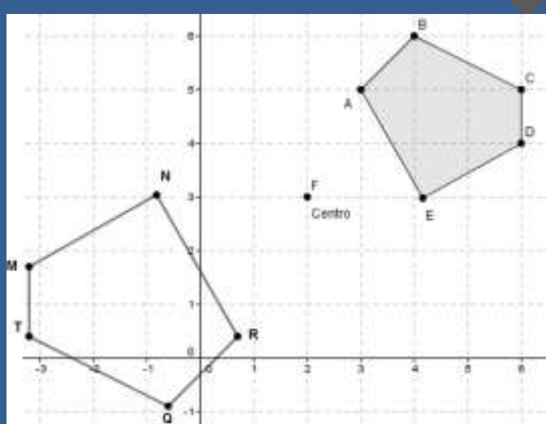


Tiempo para practicar 2.1

Habilidades:
Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter un polígono dado a una homotecia.
Reconocer puntos, ángulos y lados homólogos de un polígono y el polígono que resulta al aplicar una homotecia.
Reconocer una homotecia a partir de una figura en el plano de coordenadas.

1. En cada plano, se presenta un polígono sombreado y su respectiva homotecia. Determine el lado, vértice y ángulo homólogo, según sea el caso.
Además, indique qué condición cumple la razón de la homotecia "k".

(I)



(a) $\overline{CD} \rightarrow$ ____

(b) $E \rightarrow$ ____

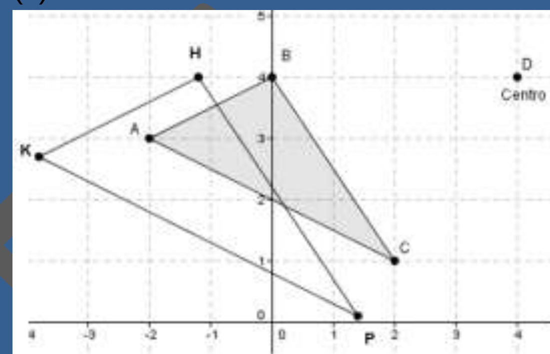
(c) $\measuredangle EDC \rightarrow$ ____

(d) k:

( ) $k < -1$ ( ) $-1 < k < 0$ ( ) $k = -1$

( ) $k > 1$ ( ) $0 < k < 1$ ( ) $k = 1$

(II)



(a) $\overline{BC} \rightarrow$ ____ (b) $A \rightarrow$ ____

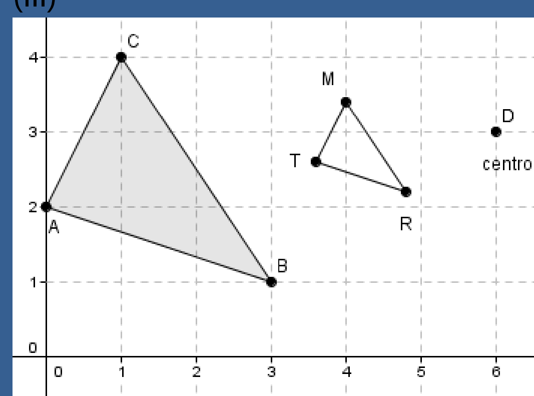
(c) $\measuredangle CBA \rightarrow$ ____

(d) k:

( ) $k < -1$ ( ) $-1 < k < 0$ ( ) $k = -1$

( ) $k > 1$ ( ) $0 < k < 1$ ( ) $k = 1$

(III)



(a) $\overline{AC} \rightarrow$ ____ (b) $C \rightarrow$ ____

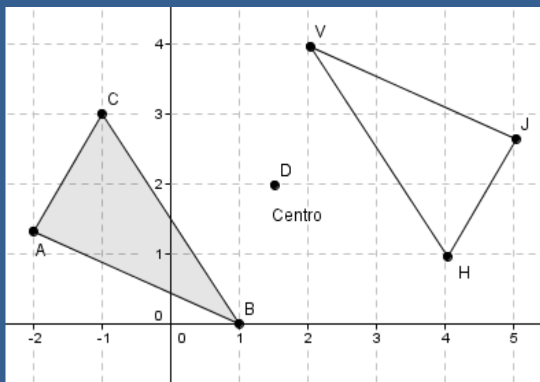
(c) $\measuredangle CBA \rightarrow$ ____

(d) k:

( ) $k < -1$ ( ) $-1 < k < 0$ ( ) $k = -1$

( ) $k > 1$ ( ) $0 < k < 1$ ( ) $k = 1$

(IV)



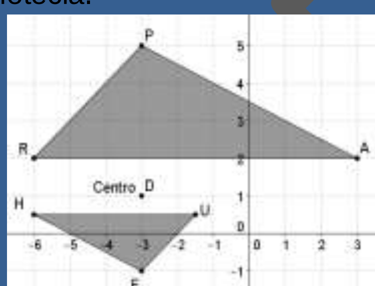
$(a)\overline{BC} \rightarrow$ ___ $(b) B \rightarrow$ ___ $(c) \measuredangle ACB \rightarrow$ ___

$(d) k$:

( ) $k < -1$ ( ) $-1 < k < 0$ ( ) $k = -1$

( ) $k > 1$ ( ) $0 < k < 1$ ( ) $k = 1$

2. Considere la figura, en la que se presenta un triángulo y su respectiva homotecia.



De acuerdo a la información proporcionada, conteste:

(a) El lado homólogo de $\overline{PR}$ es el siguiente _________

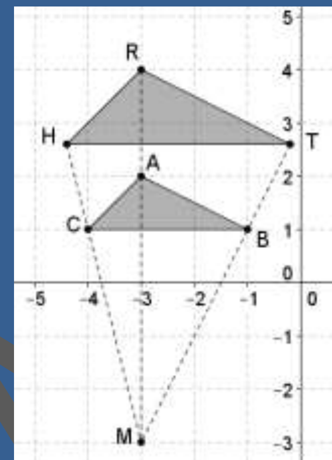
(b) El ángulo homólogo del $\measuredangle$H es el siguiente _________

(c) El vértice homólogo de R es el siguiente _________

(d) El lado homólogo de $\overline{HU}$ es el siguiente ____________

3. Selección Única

(i) Al ΔABC de la figura adjunta, se le aplicó una homotecia de razón "k" y centro M, con lo que se obtuvo el ΔRTH; por tanto es cierto que



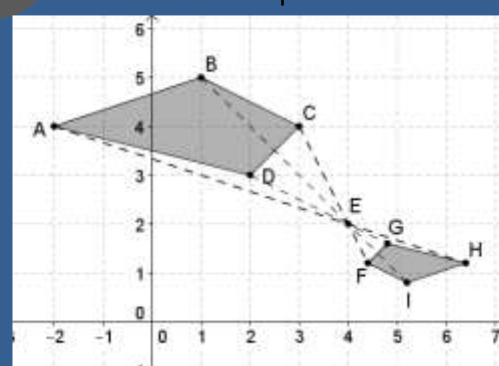
(A) $k < -1$

(B) $k = 1$

(C) $k > 1$

(D) $-1 < k < 0$

(ii) Al □ABCD de la figura se le aplicó una homotecia de razón "k" y centro E, con lo que se obtuvo el □FGHI Por tanto es cierto que



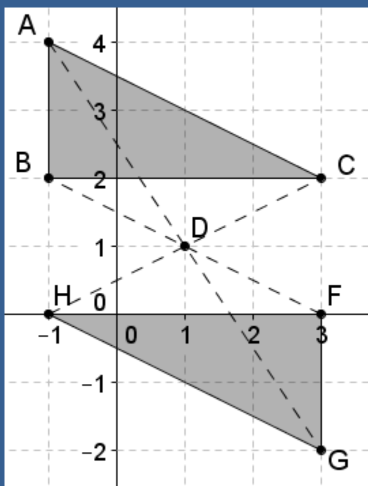
(A) $k < -1$

(B) $0 < k < 1$

(C) $k > 1$

(D) $-1 < k < 0$

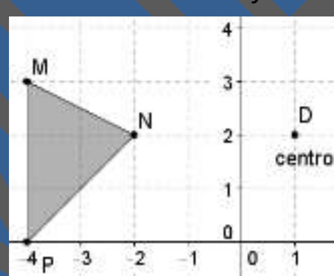
(iii) Al ΔABC de la figura se le aplicó una homotecia de razón "k" y centro D, con lo que se obtuvo el ΔFGH.



Por tanto, es cierto que

(A) $k=-1$
(B) $0<k<1$
(C) $k=1$
(D) $-1<k<0$

(iv) Si al ΔMNP de la figura adjunta, se le aplica una homotecia de razón 2 y centro D, entonces, la coordenada del punto homólogo a N corresponde a

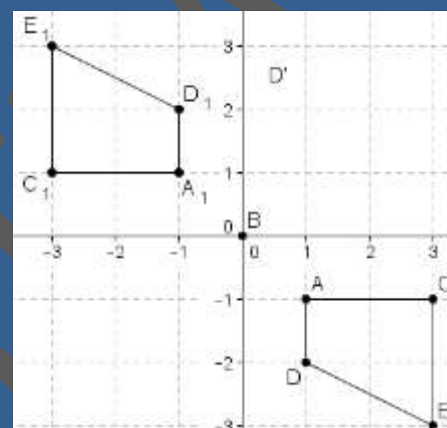


(A) $(-5,2)$
(B) $(-9,4)$
(C) $(-9,-2)$
(D) $(-2,-9)$

4. Determine la homotecia del punto $R(-4,7)$ con una razón de $\frac{5}{4}$ y centro $(-6,5)$

5. Determine la homotecia del punto $Q(0,0)$ con una razón de $\frac{-1}{5}$ y centro $(-1,-1)$

6. Considere la figura.



En la figura se muestra la homotecia del □ABCD hacia el □$A_1B_1C_1D_1$ con centro $(0,0)$

(a) Determine la razón "k" de dicha homotecia.
(b) ¿Qué relación cumplen los lados homólogos?

7. Determine y grafique la homotecia del triángulo MNR determinado por los puntos $M(-5,-1)$, $N(-3,1), R(-3,-3)$ con una razón de $\frac{-1}{4}$ y centro $(0,-1)$

8. Determine y grafique la homotecia del □ABCD determinado por los puntos $A(0,0)$, $B(1,1), C(2,1), D(1,-1)$ con una razón de -2 y centro $(-1,0)$

9. Determine y grafique la homotecia del ΔDEF determinado por los puntos $D(-1,4)$, $E\left(3,\frac{7}{2}\right), F\left(\frac{-1}{2},2\right)$ con una razón de 3/4 y centro $(2,2)$

10. Determine y grafique la homotecia del cuadrado ABCD determinado por los puntos: $A(-4,-3)$, $B(-3,-2), C(-4,-1)$, $D(-5,-2)$ con una razón de 5/2 y centro $(-2,-1)$

11. Construya una homotecia sobre el ΔDEF determinado por $D(-1,4)$, $E\left(3,\frac{7}{2}\right), F\left(\frac{-1}{2},2\right)$ y centro $(-2,-1)$, de modo que los lados del triángulo resultante sean el triple del original.

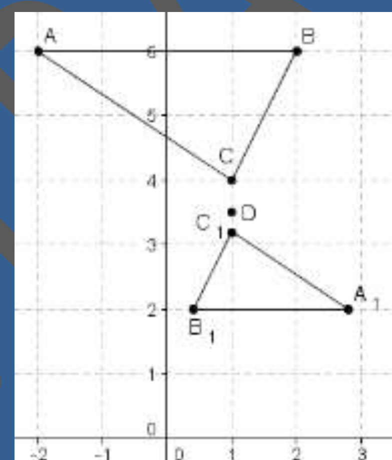
12. Grafique la homotecia del triángulo ABC de coordenadas A (-4,2), B (-2,1), C (-1, 5) con un razón de 0,5 centro en el punto (6,3)

13. Grafique la homotecia del □ ABCD, con un razón de -1 y centro en el punto (6,1), dadas las coordenadas A(2,-2), B(3,-1), C (6,-1),D (5,-4)

14. Construya una homotecia del ΔABC con coordenadas A(-2,3), B (0,3), C (0,0) con una razón de -3/5 y centro ubicado en (2,3)

15. Construya una homotecia del □ABCD con coordenadas A(2,5), B (4,6), C (7,4), D (6,4), con una razón de -3/2 y centro ubicado en (4,3)

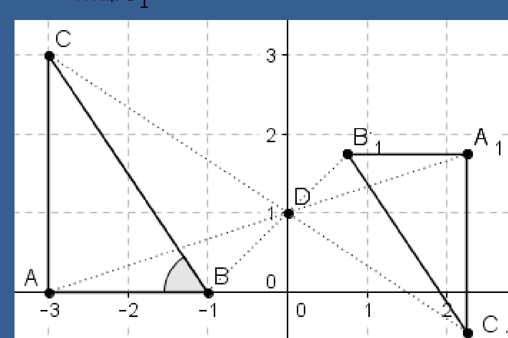
16. De acuerdo con los datos de la figura, donde se representa una homotecia de centro D. Si AB = 4; AC= 3,61; A_1B_1 = 2,4; determine $m\overline{A_1C_1}$



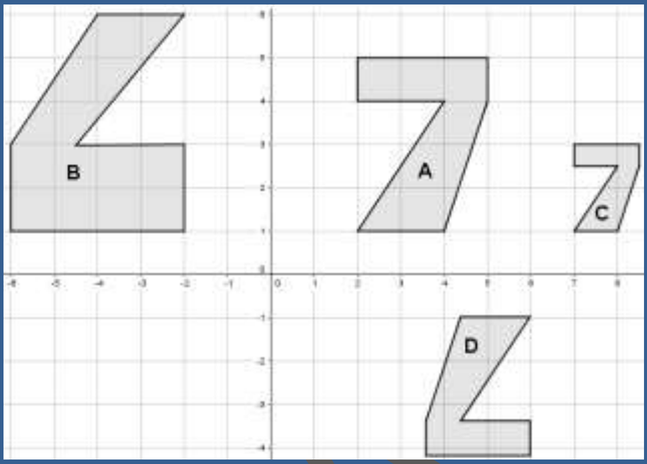
17. La figura adjunta representa una homotecia de centro D. Según los datos proporcionados, conteste:

(a) Si $A_1B_1 = \frac{3}{2}$; determine $m\overline{A_1C_1}$

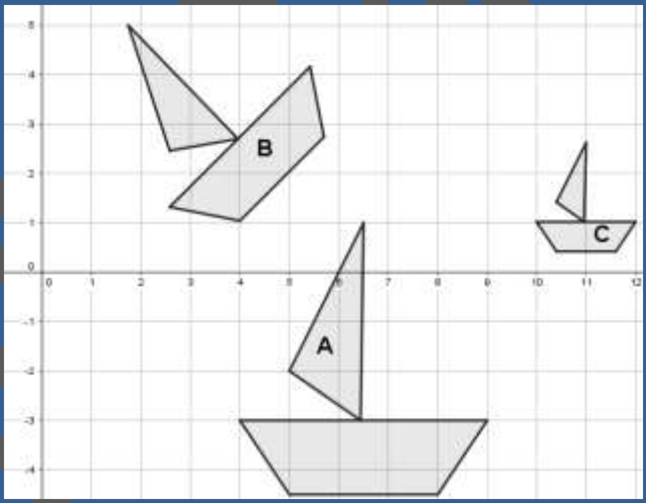
(b) Si $m\measuredangle ABC = 56°$, determine la $m\measuredangle C_1$



18. Determine cuáles figuras son homotecias de la figura A

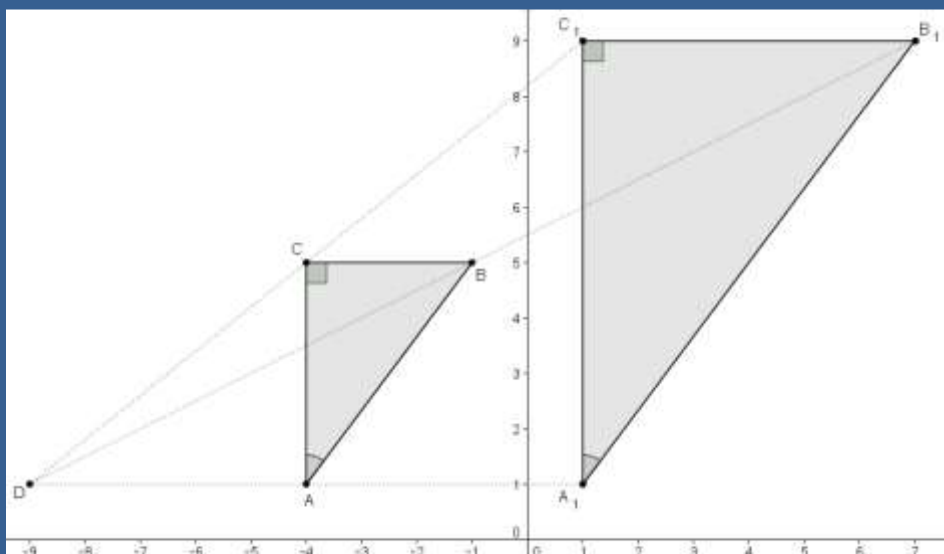


19. Determine el barco que es resultado de una homotecia de barco A.



Conocimiento: Triángulos Semejantes

Tal como se desarrolló en el apartado anterior, las homotecias aplicadas a triángulos mantienen algunos elementos invariantes y otros proporcionales. Repasemos con un ejemplo estas propiedades.



La figura muestra una homotecia aplicada al triángulo ABC, con una razón de 2 y centro D. Se puede verificar que:

$$\measuredangle A \cong \measuredangle A_1 \qquad \measuredangle B \cong \measuredangle B_1 \qquad \measuredangle C \cong \measuredangle C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

Note que los ángulos homólogos son congruentes (tienen la misma medida) y los lados son proporcionales. Cuando dos triángulos cumplen estas propiedades, se dice que son **triángulos semejantes.**

Por tanto toda homotecia aplicada a un triángulo, crea otro semejante al original.

Definición: Triángulos Semejantes

Dos triángulos son semejantes, si sus ángulos homólogos son congruentes y las medidas de sus lados homólogos son proporcionales. El símbolo para designar la semejanza es $\sim$.

Simbólicamente se expresa:

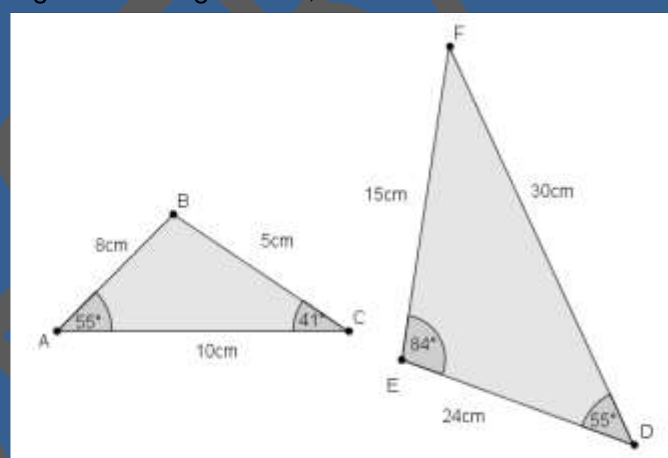
$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \quad \text{si} \quad \begin{cases} (1) \begin{cases} m\measuredangle A = m\measuredangle A_1 \\ m\measuredangle B = m\measuredangle B_1 \\ m\measuredangle C = m\measuredangle C_1 \end{cases} \\ (2) \ \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k \end{cases}$$

A la constante “k” se le llama **razón de semejanza**.

Ejemplo 1

Considere los triángulos ABC y DFE. Analice, según los datos proporcionados, si son semejantes.

Para determinar si los ángulos homólogos son congruentes, es conveniente calcular la medida del $\measuredangle B$ y del $\measuredangle F$



$m\measuredangle B = 180° - 55° - 41° = 84°$

$m\measuredangle F = 180° - 84° - 55° = 41°$

Se tiene entonces que: $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$

Ahora bien, si analizamos las medidas de los lados, se cumple que: $\dfrac{8}{24} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{10}{30} = \boxed{\dfrac{1}{3} = k}$

Es decir: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$, por lo que los lados son proporcionales.

Se concluye que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Ejemplo 2

Si $\triangle MNP \sim \triangle DFE$ y MN = 6cm, NP = 9cm, FE = 27cm. Determine FD.

Como los triángulos son semejantes, en particular la medida de sus lados homólogos son proporcionales, por lo cual

$$\frac{MN}{DF} = \frac{NP}{FE} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{9}{27} \Rightarrow x = \frac{27 \bullet 6}{9} = 18$$

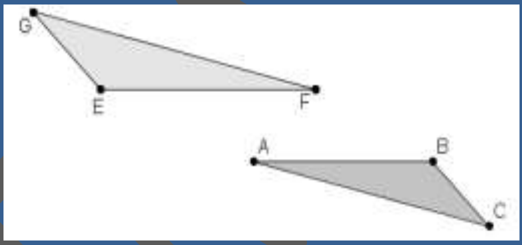
Por tanto el lado $\overline{FD}$ mide 18 cm.

Criterios de Semejanza

No es necesario conocer a la vez la congruencia entre ángulos homólogos y la proporcionalidad de todos los lados homólogos de dos triángulos, para determinar la semejanza. Para ello, podemos hacer uso de ciertos criterios de semejanza, que simplifican tal verificación.

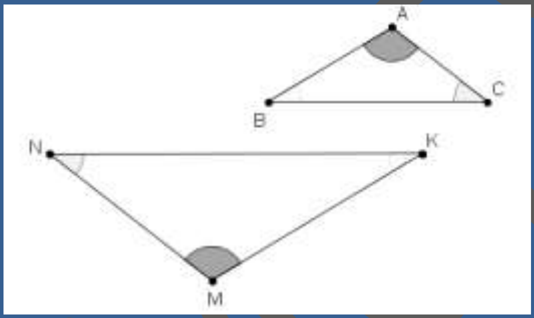
⌗ Criterio lado –lado – lado (l-l-l)

Si los lados homólogos de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes y viceversa. Así:



$$\frac{AB}{FE}=\frac{AC}{FG}=\frac{BC}{EG} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta FEG$$

⌗ Criterio ángulo – ángulo – ángulo (a-a-a)



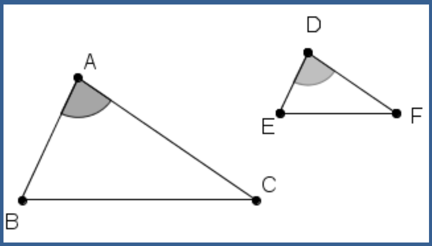
Si los ángulos homólogos de dos triángulos son congruentes, entonces los triángulos son semejantes y viceversa. Así:

$$\measuredangle A \cong \measuredangle M,\ \measuredangle B \cong \measuredangle K,\ \measuredangle C \cong \measuredangle N, \quad \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta MKN$$

Por el teorema de la suma de ángulos internos, basta con verificar que dos pares de ángulos sean congruentes, por lo que el criterio se puede simplificar en **criterio ángulo – ángulo (a-a)**

⌗ Criterio lado– ángulo – lado (l-a-l)

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo congruente comprendido entre dos lados proporcionales y viceversa.

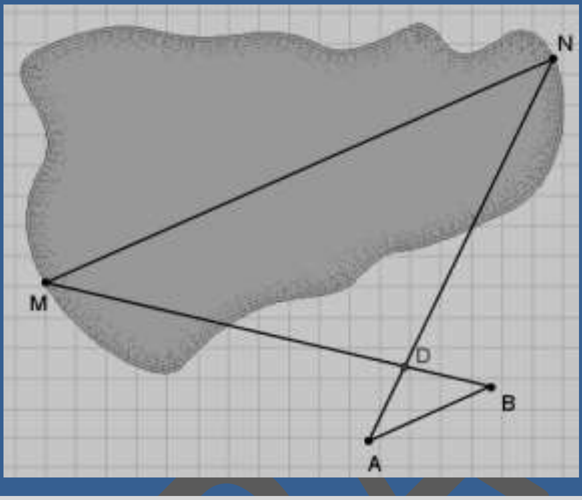


$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{FD},\ m\measuredangle A = m\measuredangle D = \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Ejemplo 3

Se desea conocer la mayor longitud de un lago, pero no puede medirse directamente, por lo que se clava una estaca en el suelo (llámese punto D) y se dirigen visuales a los extremos M y N del lago.

Luego se ubican dos estacas más, A y B, tal como se indica en la figura, de modo que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.



(a) ¿Son los triángulos MND y ABD semejantes?

Nótese que el $\measuredangle MDN$ es opuesto por el vértice con el $\measuredangle ADB$, por tanto son congruentes.

Ahora bien, como $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ entonces $\measuredangle M \cong \measuredangle B$ y $\measuredangle N \cong \measuredangle A$ (ángulos alternos internos).

Se concluye, por criterio a –a que $\Delta MND \sim \Delta BAD$

(b) Suponga que DB = 15m, AB = 21m, MD = 82m y DN = 93m. Determine la mayor longitud del lago

Al aplicar la proporcionalidad de las medidas de los lados de dos triángulos semejantes, obtenemos:

$$\frac{MD}{BD}=\frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{82}{15}=\frac{x}{21} \Rightarrow x=\frac{82 \bullet 21}{15}=114,8$$

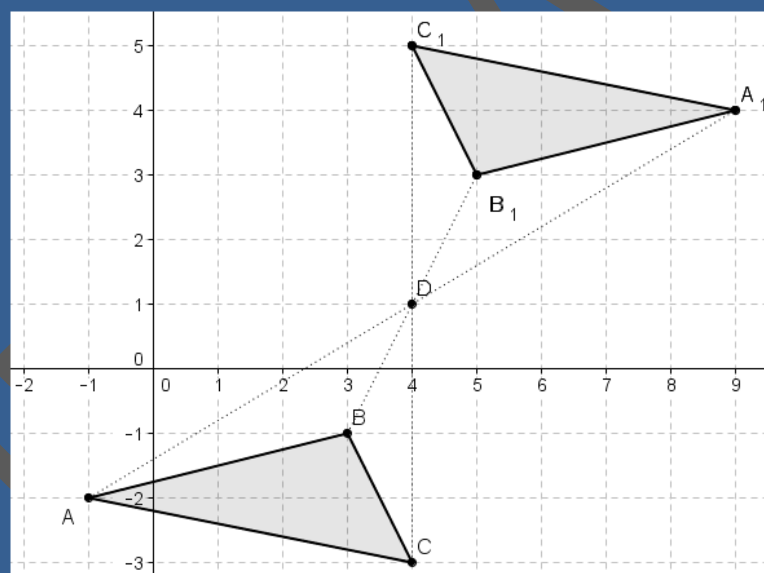
La longitud del lago es de 114, 8 metros.

Conocimiento: Triángulos Congruentes

Considere el ΔABC, con vértices $A(-1,-2), B(3,-1), C(4,-3)$, al cual se le aplica una homotecia de centro $(4,1)$ y razón k = -1, de tal modo que se obtiene un $\Delta A_1B_1C_1$, tal como lo muestra la figura.

Con ayuda de la regla y compás mida los lados y ángulos homólogos. Analice la semejanza de dichos triángulos

En este caso, se logra verificar que no solo los ángulos homólogos son congruentes, sino también los lados.



Es decir,

$AB = A_1B_1$,

$AC = A_1C_1$,

$CB = C_1B_1$

Por tanto los triángulos no solo tienen la misma forma, sino también el mismo tamaño

Cuando esto sucede, se dice que los **triángulos son congruentes.**

Definición: Triángulos Congruentes

Dos triángulos son congruentes, si sus ángulos homólogos son congruentes y sus lados homólogos son congruentes. El símbolo para designar la congruencia es ≅

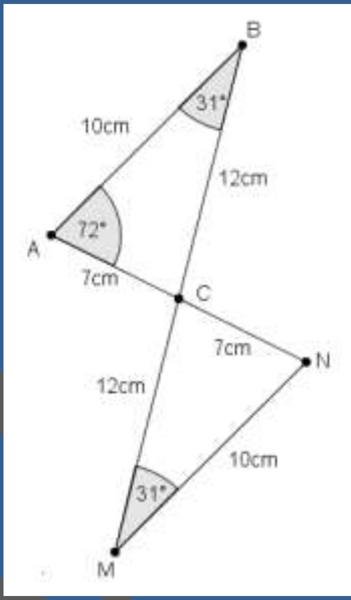
Simbólicamente se expresa:

$$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1 \quad \text{si} \quad \begin{cases} (1) \;\; m\measuredangle A = m\measuredangle A_1; \quad m\measuredangle B = m\measuredangle B_1; \;\; m\measuredangle C = m\measuredangle C_1 \\ (2) \;\; AB = A_1B_1; \;\; AC = A_1C_1; \;\; BC = B_1C_1 \end{cases}$$

La razón de semejanza entre dos triángulos congruentes es uno.

Ejemplo 1

Considere los triángulos ABC y CNM. Analice, según los datos proporcionados, si son congruentes.



Es evidente que los lados homólogos son congruentes.

Respecto a los ángulos, se tiene que

$m\measuredangle ACB = 180° - 72° - 31° = 77°$

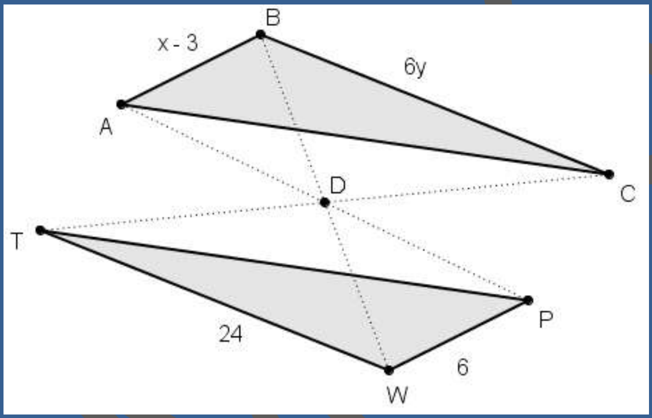
Como el $\measuredangle ACB$ es opuesto por el vértice con el $\measuredangle MCN$, se cumple que $m\measuredangle MCN = 77°$

Aplicando el teorema de la suma de ángulos internos de un triángulo, se logra determinar que la $m\measuredangle N = 72°$

Se concluye que $\Delta ABC \cong \Delta NMC$

Ejemplo 2

En la figura adjunta, se muestra una homotecia de centro D y razón -1. Determine los valores de "x" y de "y"



Como la razón de homotecia es -1, los triángulos son congruentes, por tanto AB = WP y BC = TW. Por lo que se plantean las siguientes igualdades.

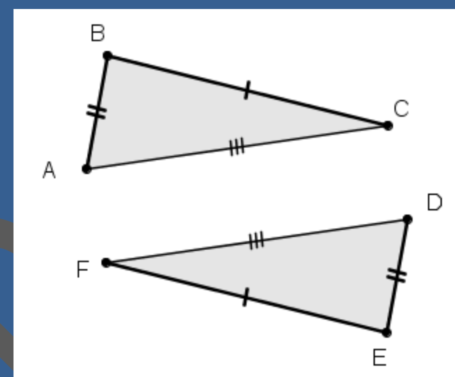
$$\begin{aligned} x - 3 &= 6 \\ x &= 6 + 3 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6y &= 24 \\ y &= 24 \div 6 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Criterios de Congruencia

No es necesario conocer a la vez la congruencia entre ángulos y lados homólogos de dos triángulos, para determinar su congruencia. Para ello, podemos hacer uso de ciertos criterios, que simplifican tal verificación.

⌗ Criterio lado –lado – lado (l-l-l)

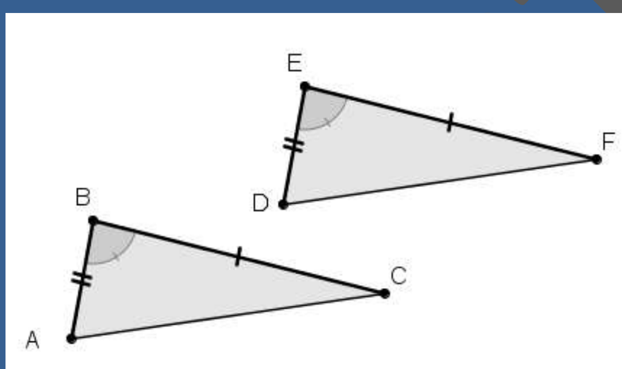


Si los lados homólogos de dos triángulos son congruentes, entonces los triángulos son congruentes y viceversa. Así:

$AB = DE, \; AC = FD, \; BC = EF$

$\Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$

⌗ Criterio lado–ángulo – lado (l-a-l)



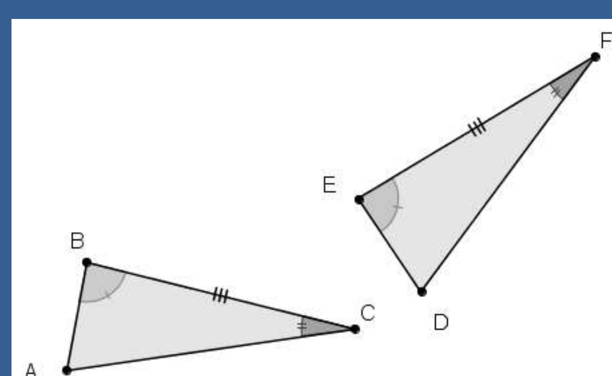
Dos triángulos son congruentes entre sí, si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes, y viceversa

$AB = DE, \; m\measuredangle B = m\measuredangle E, \; BC = EF$

$\Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$

⌗ Criterio ángulo – lado- ángulo (a-l-a)

Dos triángulos son congruentes entre sí, si tienen dos ángulos y el lado adyacente a ellos, respectivamente congruentes, y viceversa.

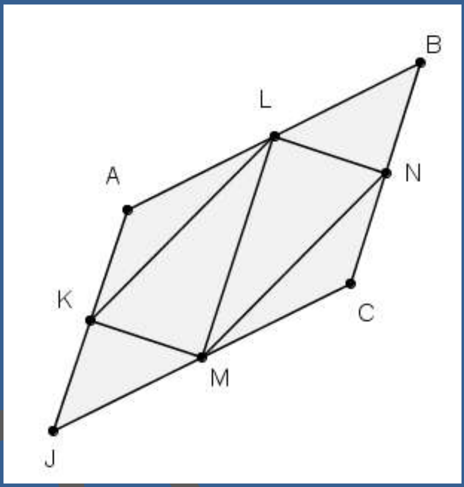


$\measuredangle B \cong \measuredangle E, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \measuredangle C \cong \measuredangle F$

$\Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$

Ejemplo

En la figura adjunta, el □ABCJ es un paralelogramo. K. M. N y L son puntos medios de cada uno de sus lados. Determine los pares de triángulos congruentes.



Analicemos los triángulos KJM y BNL.

Como el □ABCJ es un paralelogramo, entonces los ángulos opuestos son congruentes. En este caso, $\measuredangle J \cong \measuredangle B$. Ahora bien, los lados opuestos también tienen la misma medida, de modo que AB = JC. Y como L y M son puntos medios de esos lados, se tiene que AL = LB = MC = JM

Similarmente, se concluye que JK = BN.

Así, en resumen se cumple que $\measuredangle J \cong \measuredangle B$, JK = BN, BL = JM. Por tanto, por el criterio l –a – l, el $\Delta MJK \cong \Delta LBN$

De modo similar, se puede verificar que $\Delta KAL \cong \Delta NCM$

Por otra parte, como $\Delta MJK \cong \Delta LBN$, entonces KM = LN, y como $\Delta KAL \cong \Delta NCM$, se tiene que KL = MN. Además LM es un lado común para los triángulos KML y MNL, por tanto, por el criterio l – l – l se concluye que $\Delta MKL \cong \Delta LNM$

Indague la manera en la que Thales de Mileto logró determinar la altura de la pirámide de Keops.

Relacione los resultados con el tema estudiado.

Conocimiento: Teorema de Thales

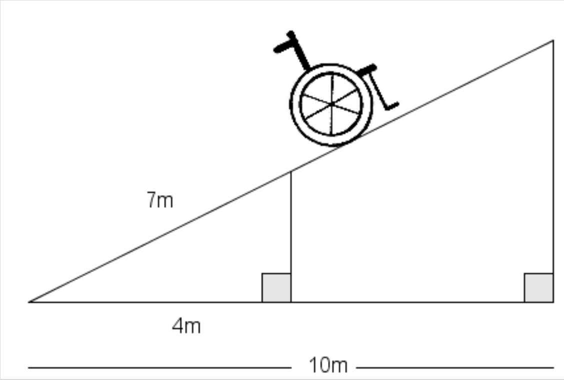
Escenario de aprendizaje

Construyendo una rampa

En un colegio hicieron un plano para construir una rampa, la cual permitirá a las personas con alguna discapacidad, trasladarse sin problemas dentro de la institución.

Para su construcción, cuentan con un espacio horizontal de 10 metros y colocarán al cuarto metro un poste perpendicular al suelo.

¿Cuántos metros deberá recorrer una persona que suba toda la rampa, según la información que proporciona el plano?

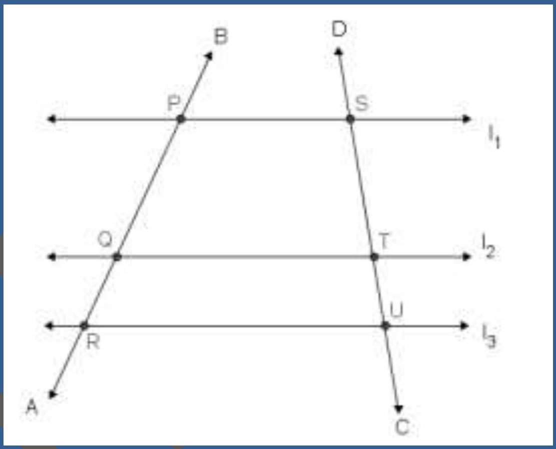


En el escenario anterior, se logró evidenciar segmentos proporcionales, que precisamente son el resultado, conocido como **el teorema de Thales**, el cual se generaliza para un par de rectas cortadas por rectas paralelas.

Teorema de Thales

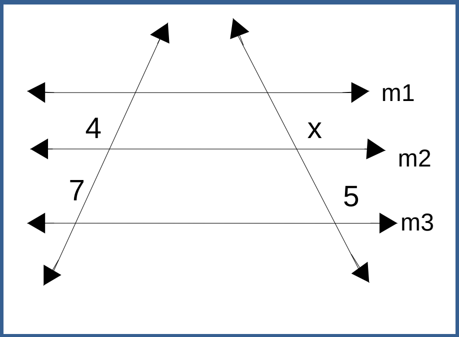
Sean $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ dos rectas cualesquiera y l_1, l_2, l_3 tres rectas que las cortan, de tal manera que $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$. Sean P, Q y R los puntos de corte en $\overleftrightarrow{AB}$, y S, T y U los puntos de corte en $\overleftrightarrow{CD}$, entonces se cumple que

$$\frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{PR}{SU}$$



Ejemplo

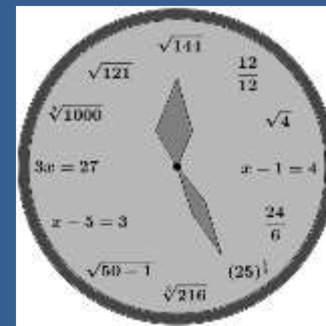
Halle el valor de "x" dado que m1|| m2 || m3



Según el teorema de Thales se cumple que

$$\frac{4}{x} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{20}{7}$$

Tiempo para practicar 2.2



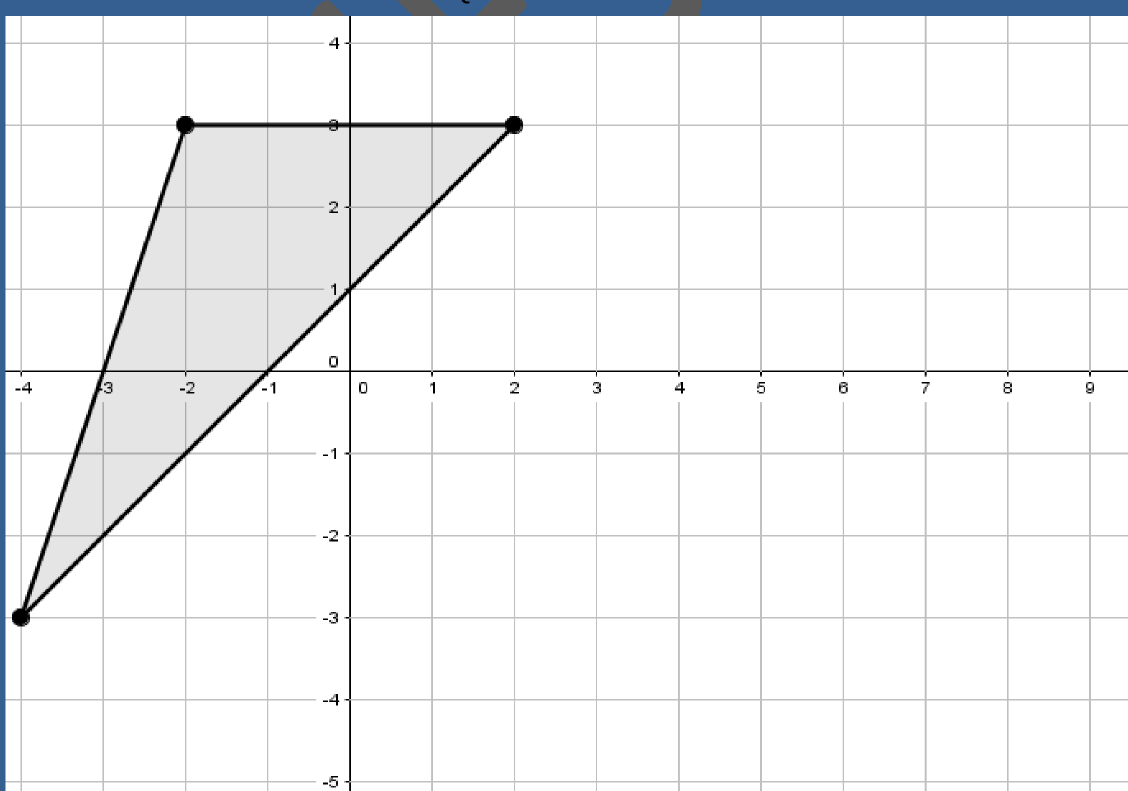
Habilidades:
Construir una figura semejante sometiéndola a una homotecia de razón menor o mayor que 1.
Identificar figuras semejantes en diferentes contextos.
Determinar si dos triángulos son semejantes utilizando los criterios: lado lado lado, lado ángulo lado y ángulo ángulo ángulo.
Resolver problemas que involucren la semejanza de triángulos

1. (a) Construya un triángulo ABC, con vértices $A(-1,2)$, $B(1,3)$, $C(2,-1)$

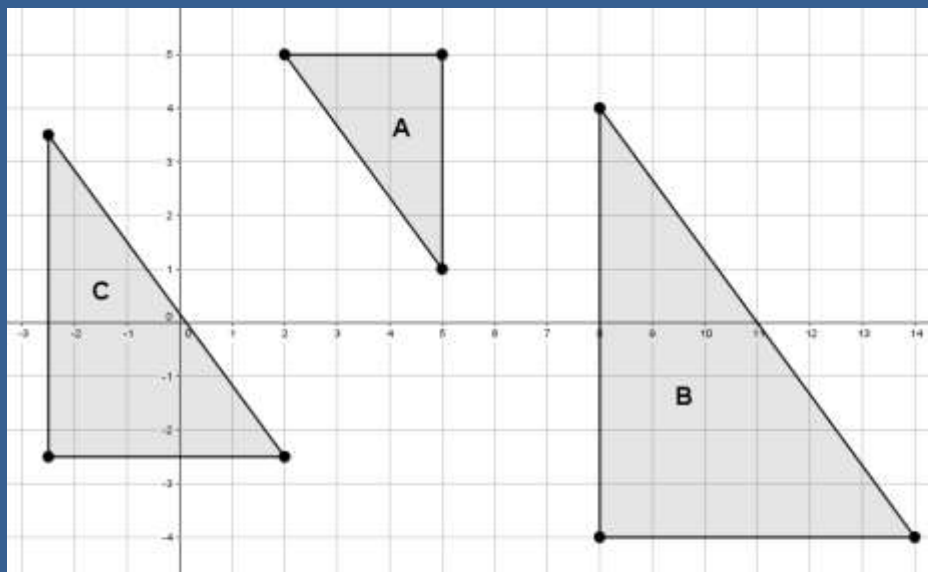
   (b) Construya en el mismo plano cartesiano un triángulo semejante al ΔABC. Indique la razón de semejanza.

2. Construya un triángulo MNR, con vértices $M(-4,5)$, $N(-1,1)$, $R(-1,5)$ y en el mismo plano cartesiano construya otro triángulo $M_1N_1R_1$, donde M_1N_1 sea el triple de MN y $\Delta MNR \sim \Delta M_1N_1R_1$

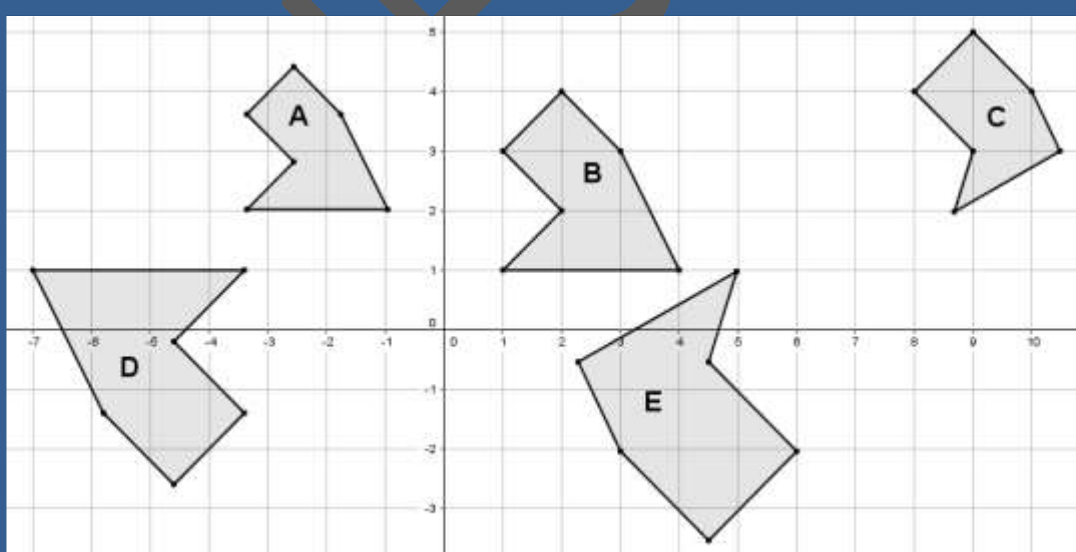
3. De acuerdo a los datos de la figura adjunta, construya un $\Delta P_1Q_1R_1$ tal que $\Delta P_1Q_1R_1 \sim \Delta PQR$ y donde $\dfrac{Q_1R_1}{QR} = \dfrac{1}{2}$



4. Identifique el triángulo semejante a A, donde la razón de semejanza sea 3/2. Justifique



5. Agrupe las figuras que son semejantes.



6. De acuerdo con los datos de la figura $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

(a) Determine la razón de semejanza del ΔABC con respecto al ΔDEF

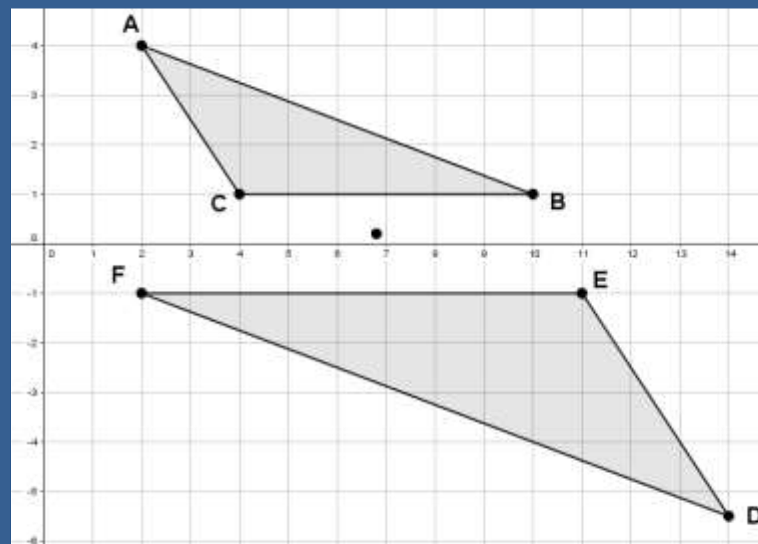
(b) ¿Cuál es el valor de $\dfrac{ED}{AC}$?

(c) ¿Cuál es el ángulo congruente al $\measuredangle A$?

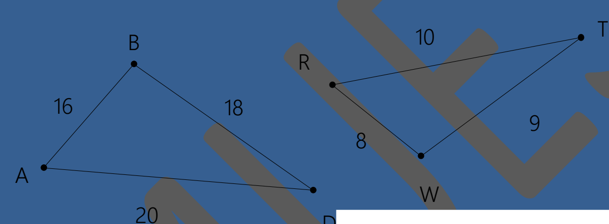
(d) Complete la igualdad

$$\frac{ED}{AC} = \frac{DF}{\square}$$

(e) ¿Cuál es el ángulo homólogo con $\measuredangle E$?

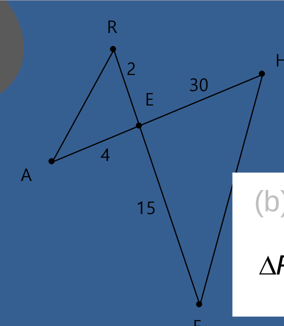


7. Escriba en los espacios en blanco, el **criterio** por el cual los triángulos son semejantes (l – l – l, a –a – a, l – a – l, según sea) y escriba **simbólicamente dicha semejanza.**



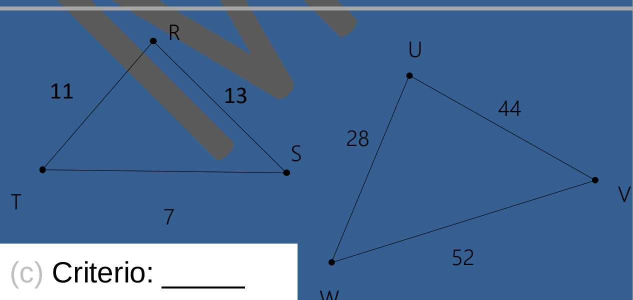
(a) Criterio: _____

$\Delta ADB \sim \Delta$ _____



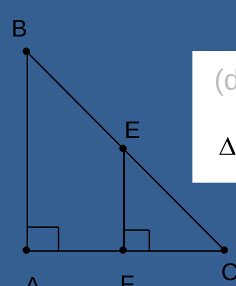
(b) Criterio:_____

$\Delta REA \sim \Delta$ _____



(c) Criterio: _____

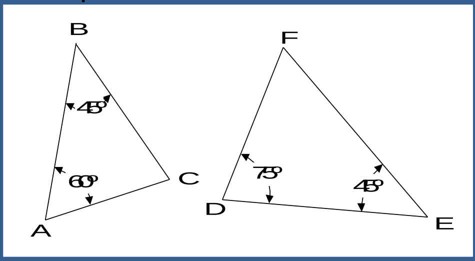
$\Delta UVW \sim \Delta$ _____



(d) Criterio: _____

$\Delta ECF \sim \Delta$ _____

8. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, es verdadero que



(A) $\Delta ABC \sim \Delta FED$ (B) $\Delta ABC \sim \Delta DFE$

(C) $\Delta ABC \sim \Delta FDE$ (D) $\Delta ABC \sim \Delta EFD$

9. Dados $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, complete:

a) $\dfrac{QR}{BC} = \dfrac{\square}{AC}$ (b) $\measuredangle B \cong \measuredangle \square$

10. Dados dos triángulos ABC y MNF, donde $\dfrac{AB}{FN} = \dfrac{AC}{MN} = \dfrac{CB}{FM} = \dfrac{1}{5}$, y

$AB + AC + CB = 35$, complete lo que se le solicita.

(a) Criterio de semejanza ____ (b) $\Delta MNF \sim \Delta$ ____ (c) $\measuredangle B \cong$ _______

(d) $\dfrac{\text{Perímetro del } \Delta MNF}{\text{Perímetro del } \Delta ABC} =$ ____ (e) Perímetro del ΔMNF ___ (f) $\measuredangle C \cong$ ______

(g) $\measuredangle A \cong$ _______

11. Si $\Delta STR \sim \Delta MOP$ donde OP es la tercera parte de TR, entonces con certeza es verdadero que

(A) La razón de semejanza de ΔSTR respecto al ΔMOP es de $\dfrac{1}{3}$

(B) $OP = 3$

(C) $\dfrac{ST}{MO} = 3$

(D) $SR = MP$

12. Si $\Delta ABC \sim \Delta RST$, donde $\dfrac{AC}{RT} = \dfrac{6}{14}$ entonces se cumple con **certeza** que

(A) $\dfrac{BC}{RS} = \dfrac{AC}{TR}$ (B) $\dfrac{RS}{AB} = \dfrac{7}{3}$

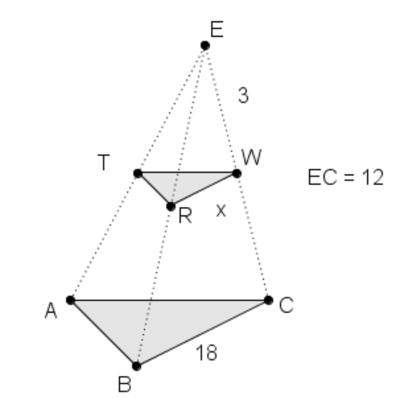
(C) $\dfrac{AB}{ST} = \dfrac{6}{14}$ (D) $AC = 6$

13. Si $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 3$, $EF = 5$, $BC = 4$. Halle el valor de DE.

14. Si $\Delta MNP \sim \Delta RST$ y $\measuredangle N = 20°$, $\measuredangle T = 70°$. Halle la medida del $\measuredangle M$

15. Se tiene que Δ BEA ~ Δ CDA, donde BE = 8, DC = $\frac{7}{2}$, AD $= \frac{4}{3}$, determine el valor de AE

16. Sea Δ ABC ~ Δ MNP. Si las medidas de los lados del Δ ABC son 12, 8, 10, y el perímetro del Δ MNP es 75, entonces ¿cuál es la medida del lado de menor longitud del Δ MNP?

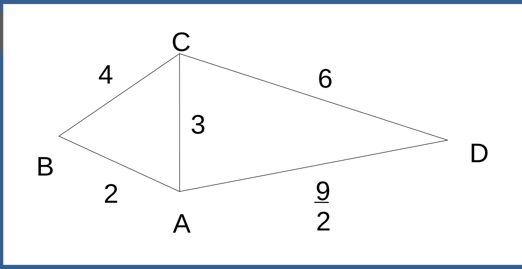


17. La figura adjunta muestra una homotecia de centro E.
   (a) ¿Cuál es la razón de semejanza?
   (b) Determine el valor de x.

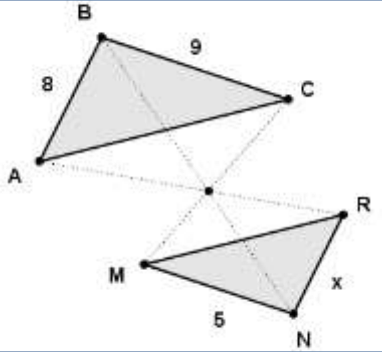
18. Si $\Delta RST \sim \Delta OPQ$ y la razón de semejanza es 3. Sabiendo que ST = 4, y el triángulo RST es de menor perímetro, halle PQ.

19. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, se cumple que el Δ ABC es semejante al

(A) ΔACD
(B) ΔCDA
(C) ΔADC
(D) ΔCAD



20. Considere los siguientes triángulos, resultados de homotecias. Determine el valor de "x"

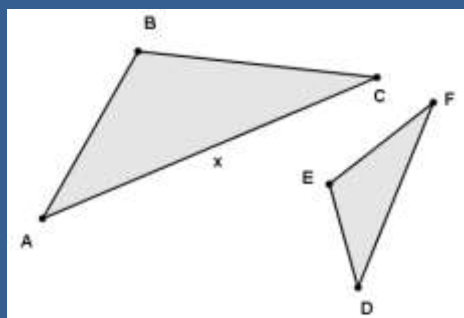


21. En cada caso, determine el valor o los valores solicitados.

(a)

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $CB = 10$, $DF = 8$, $EF = 6$

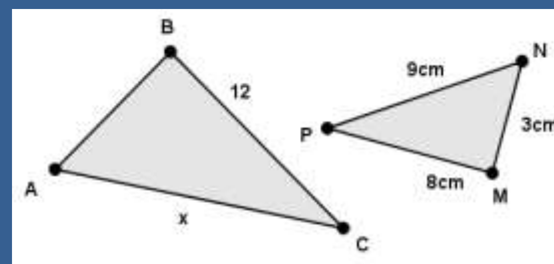
Determine el valor de "x"



(b)

Determine el valor de "x"

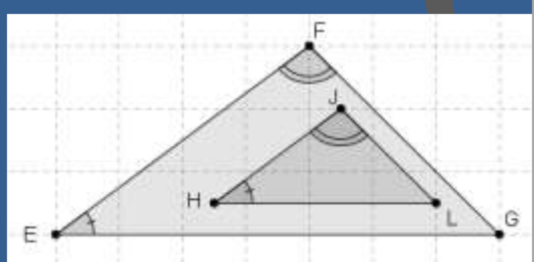
$\Delta ABC \sim \Delta MNP$



(c)

$EF = 16$, $EG = 20$, $HL = \frac{10}{3}$

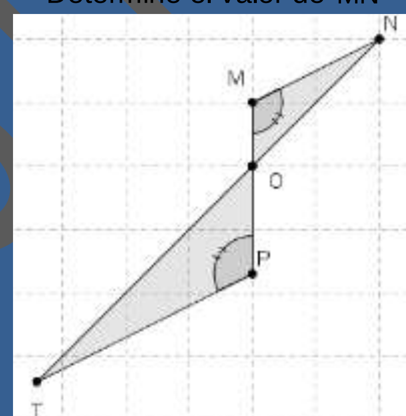
Determine HJ



(d)

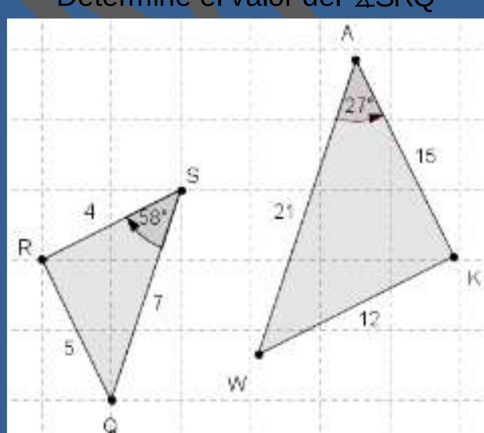
$TO = 21$, $ON = 7$, $TP = 18$

Determine el valor de $\overline{MN}$



(e)

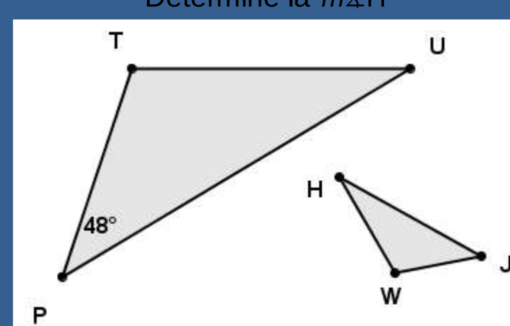
Determine el valor del $\measuredangle SRQ$



(f)

$\Delta PTU \sim \Delta JWH$, $m\measuredangle W = 102°$

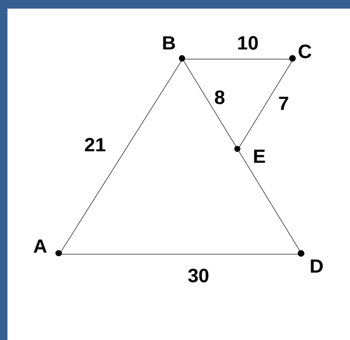
Determine la $m\measuredangle H$



(g)

$\Delta ABD \sim \Delta CEB$

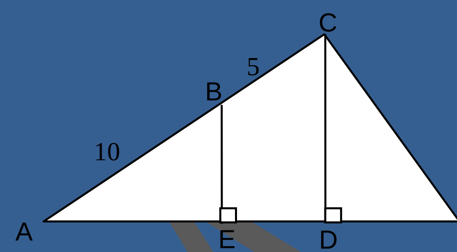
¿Cuál es la longitud BD?



(h)

CD = 18

¿Cuál es la longitud de $\overline{BE}$?

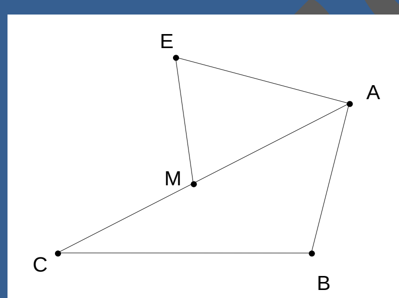


(i)

$\Delta\ ABC \sim \Delta\ AEM$

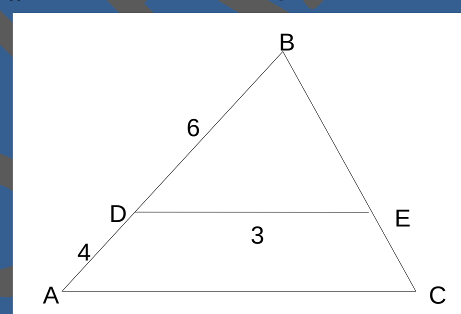
$BC = 15,\ AE = \dfrac{9}{2},\quad AB = \dfrac{20}{3}$

Determine el valor de EM



(j)

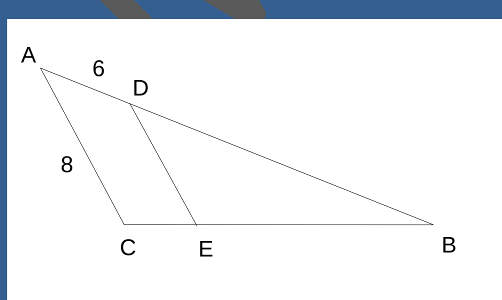
$\overline{ED} \| \overline{AC}$ ¿Cuál es la longitud de $\overline{AC}$?



(k)

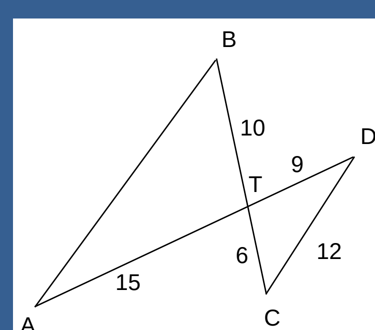
$\Delta\ ABC \sim \Delta\ DBE$ y $AB = 18$

¿Cuál es el valor de DE?

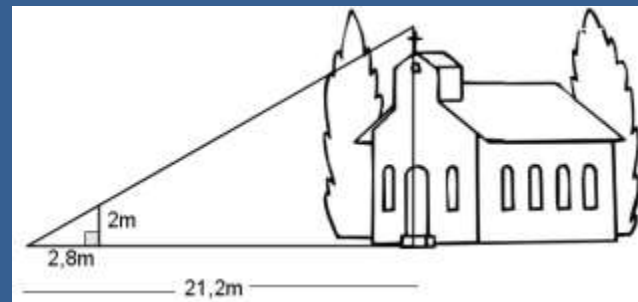


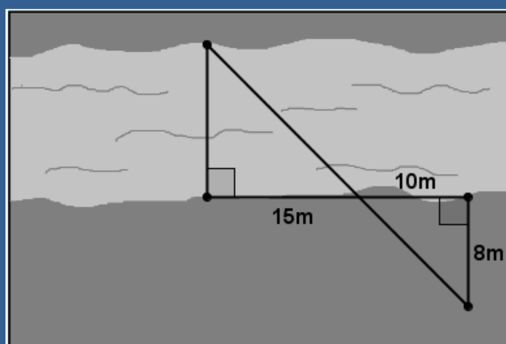
(l)

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, ¿Cuál es la medida de AB?



22. Un joven desea conocer la medida del templo de su comunidad, para ello, coloca en el suelo una estaca de 2m de altura, la cual da una sombra de 2,8m. en ese mismo instante el templo proyecta una sombra de 21, 2 m. ¿Cuál es la altura del templo?





23. Determine el ancho del río, según la información proporcionada.

Habilidades:
Construir una figura congruente sometiéndola a una homotecia de razón igual a 1.
Identificar figuras congruentes en diferentes contextos
Determinar si dos triángulos son congruentes usando los criterios: lado lado lado, lado ángulo lado y ángulo lado ángulo.
Resolver problemas que involucren congruencia de triángulos.

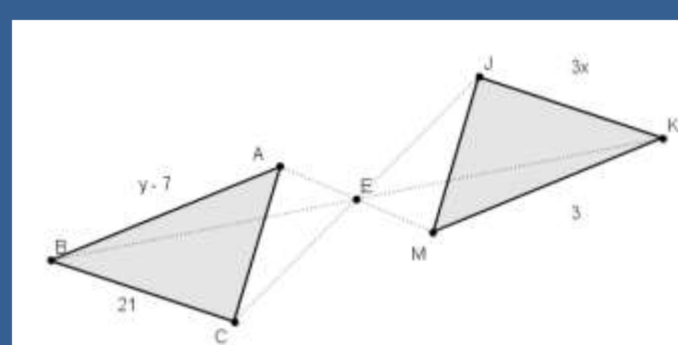
24. (a) Construya un triángulo ABC, con vértices $A(-1,2)$, $B(1,3)$, $C(2,-1)$

(b) En el mismo plano cartesiano, construya un triángulo congruente al ΔABC

25. Dados dos triángulos ABC y MNF, donde $\overline{AB} \cong \overline{FN}$, $\overline{AC} \cong \overline{MN}$, $\overline{CB} \cong \overline{FM}$, entonces:

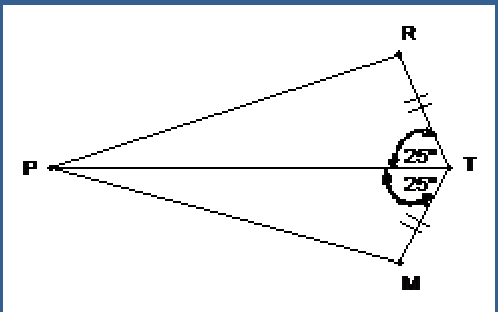
(a) $\measuredangle A \cong$ ____ (b) $\measuredangle B \cong$ ____ (c) $\measuredangle C \cong$ ____

26. La figura adjunta muestra una homotecia de centro E, donde $\frac{BE}{EK} = 1$. Determine los valores de “x” y de “y”



27. Escriba en los espacios en blanco, el **criterio** por el cual los triángulos son congruentes (l – l – l, a – l – a, l – a – l, según sea) y escriba **simbólicamente dicha congruencia.**

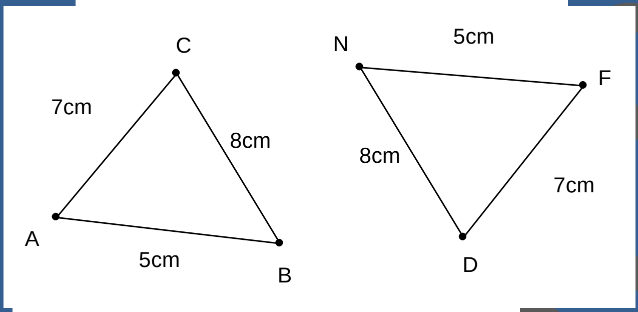
(a)



Criterio: ____________

$\Delta TPR \cong \Delta$_____

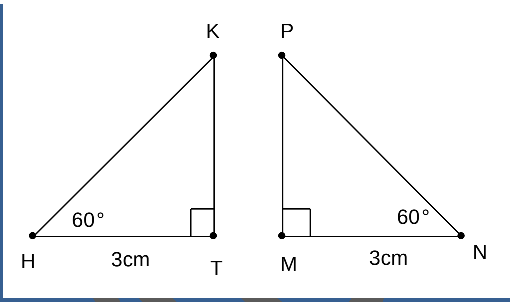
(b)



Criterio: ____________

$\Delta ACB \cong \Delta$_____

(c)



Criterio: ____________

$\Delta PNM \cong \Delta$_____

28. Sabiendo que $\Delta WAD \cong \Delta RQT$, entonces:

(a) $\measuredangle W \cong$ _____ (b) $\measuredangle T \cong$ _____ (c) $\measuredangle A \cong$ _____

(d) $\overline{AD} \cong$ _____ (e) $\overline{RT} \cong$ _____ (f) $\overline{RQ} \cong$ _____

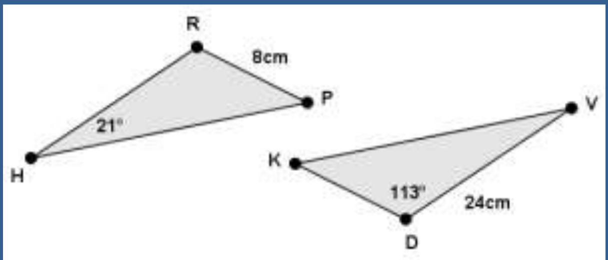
29. En la figura adjunta, $\Delta PRH \cong \Delta KDV$ y el perímetro del ΔKDV es de 42 cm. Determine la medida de:

(a) $m\measuredangle V =$ _____ (b) $m\measuredangle K =$ _____

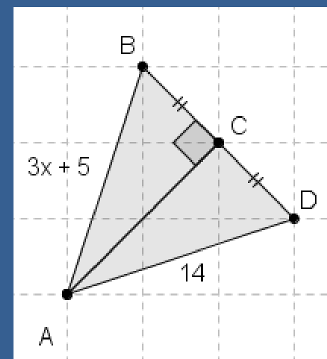
(c) $m\measuredangle R =$ _____ (d) $m\measuredangle P =$ _____

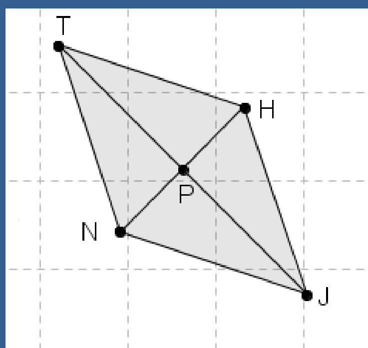
(e) $KD =$ _____ (f) $KV =$ _____

(g) $RH =$ _____ (h) $PH =$ _____



30. Dada la figura adjunta, determine el valor de “x”





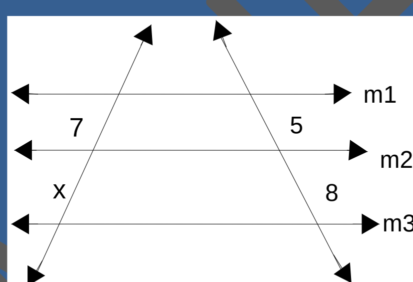
31. Dado el rombo THJN, determine pares de triángulos congruentes y justifique sus respuestas, indicar el criterio utilizado en el análisis.

Habilidades:
Aplicar el teorema de Thales en la resolución de problemas de diversos contextos

32. Determine en cada caso, el valor solicitado.

(a)

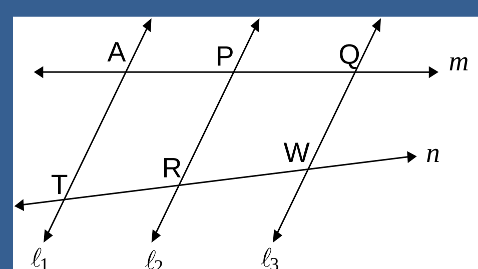
m1|| m2 || m3. Halle el valor de x



(b)

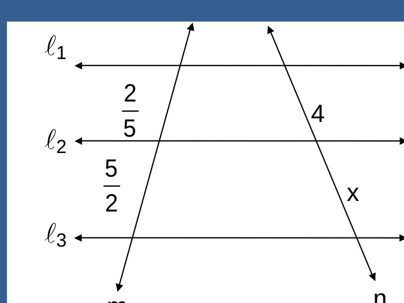
$\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3$. AQ = 7, PQ = 3, TR = 5,

Halle el valor de TW



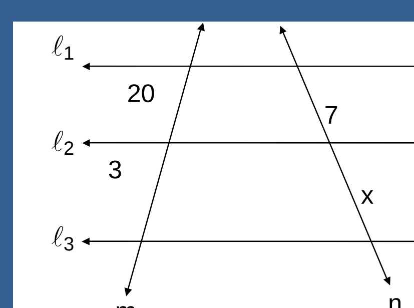
(c)

$\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3$. Determine el valor de x



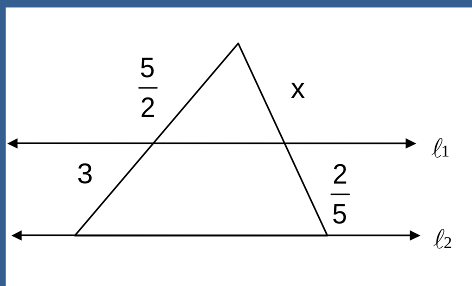
(d)

$\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3$ Determine el valor de x



(e)

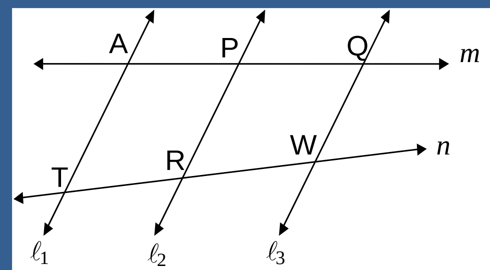
$\ell_1 \parallel \ell_2$ Determine el valor de x



(f)

$\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3$, $\frac{AQ}{PQ} = \frac{7}{2}$, TW = 21. Determine

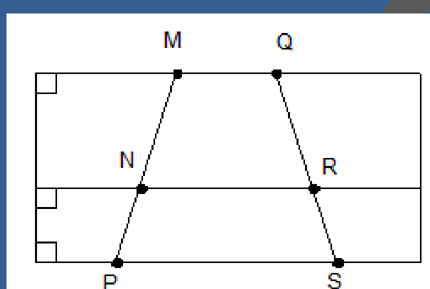
El valor de RW



(g)

MN = 5, NP = 15, QS = 60

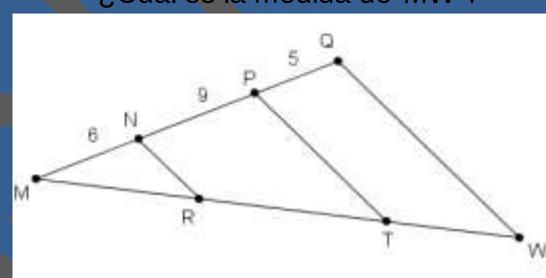
¿Cuál es el valor de QR?



(h)

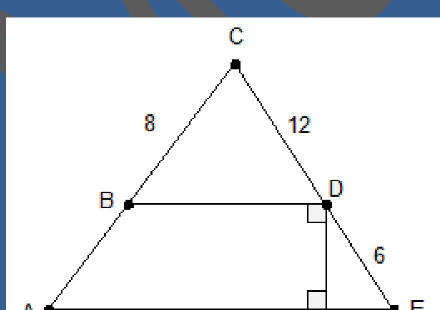
MT = 37,5 $\overleftrightarrow{NR} \parallel \overleftrightarrow{PT}$, $\overleftrightarrow{PT} \parallel \overleftrightarrow{QW}$

¿Cuál es la medida de $\overline{MW}$?



(i)

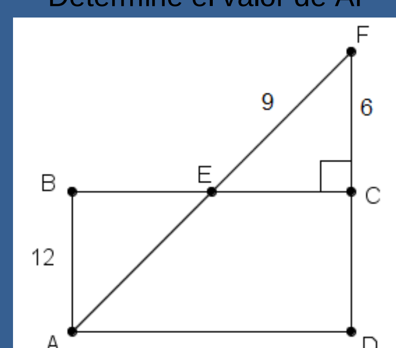
¿Cuál es el valor de AC?



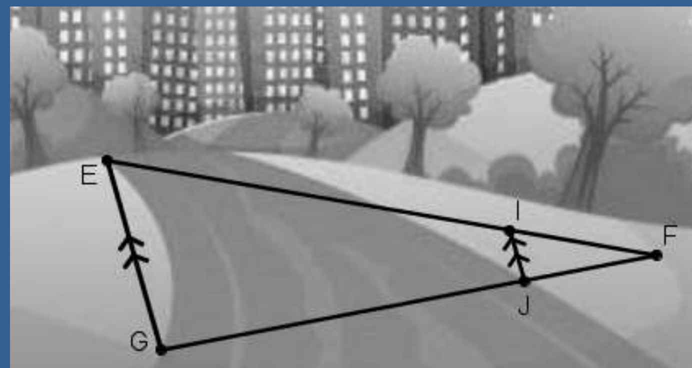
(j)

□ABCD es un rectángulo.

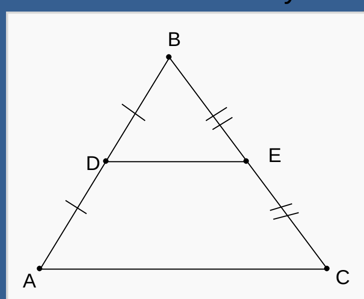
Determine el valor de AF



33. Calcule el ancho de la calle, determinado por los puntos G y J, sabiendo que EF = 22m, FI = 6m, FJ = 4,5m, $\overleftrightarrow{EG} \parallel \overleftrightarrow{JI}$



34. Una paralela a uno de los lados de un triángulo y definida por los puntos medios de los otros dos lados, se llama **paralela media** y mide la **mitad** del lado al cual es paralela.
La paralela media de un triángulo determina dos triángulos semejantes cuya proporción es **un medio** y viceversa. Así:

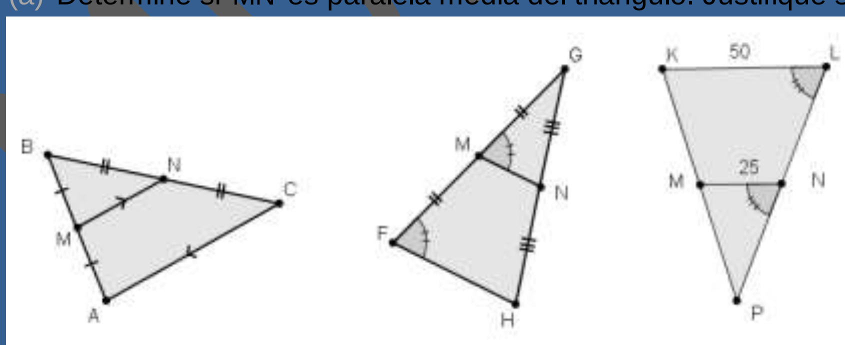


Si AD = DB, BE = EC

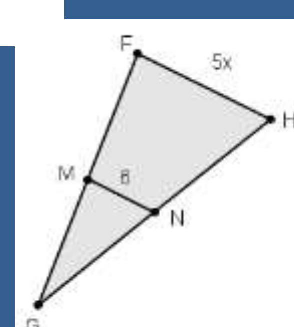
entonces $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ tal que $2 \cdot DE = AC$

y $\frac{DB}{AB} = \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2}$

(a) Determine si $\overline{MN}$ es paralela media del triángulo. Justifique su respuesta.



(b) Sea $\overline{MN}$ la paralela media del triángulo GFH. Determine el valor de x



¿Sabías que...?

Las cámaras fotográficas como la que se muestra en la ilustración, captan una imagen semejante a la original, pero de modo invertido.

Cuando el fotógrafo ha obtenido la imagen invertida, le da vuelta a la placa y listo.

Es increíble que nuestros ojos hagan también este proceso.

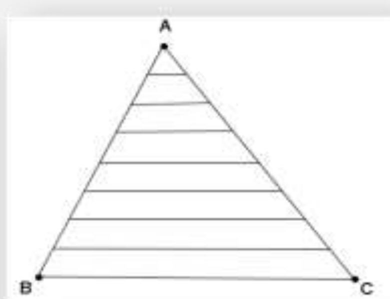
Reto de lógica:

Como buen campesino

Un campesino desea afrontar la crisis económica y el deterioro ambiental, por lo que decide construir una huerta orgánica en un terreno que tiene forma triangular. En el plano que se adjunta, el terreno está representado por el ΔABC.

Él construye siete hileras para sembrar, paralelas al lado BC, que dividen en 8 partes iguales al lado AC.

Si $\overline{BC}$ mide 20 metros, ¿cuál es la suma de las longitudes de las 7 hileras en las que el campesino hará su siembra?



Conocimiento: Cuerpos Sólidos

Estereometría

Nosotros vivimos en un espacio de tres dimensiones, por lo que es muy común observar cuerpos sólidos compuestos por figuras geométricas: hermosos diamantes, pirámides y esferas antiguas, balones de futbol, botellas, cajas, sombreros para fiestas, entre muchos otros.

Conocer al menos las propiedades de los cuerpos sólidos más comunes, puede ser de mucha utilidad, por ejemplo al sacar el presupuesto para pintar una habitación, conocer la cantidad de agua que puede almacenar un recipiente cilíndrico, el número de bolinchas que se pueden empacar en una caja.

Joyero en forma de prisma hexagonal

La estereometría es una rama de la geometría que estudia las relaciones y propiedades de ciertos cuerpos sólidos tridimensionales. Se le conoce también como la geometría del espacio.

Los cuerpos sólidos se pueden dividir en dos grandes grupos:

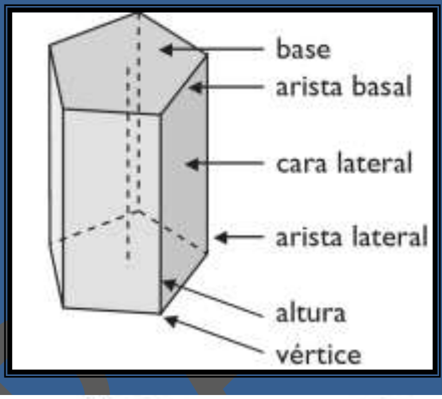
- **Poliedros**: Son los cuerpos sólidos que están delimitados únicamente por figuras planas. Entre ellos tenemos el prisma y la pirámide.
- **Cuerpos Redondos:** Son los cuerpos sólidos que están delimitados por superficies curvas, o superficies planas y cuervas. Entre ellos tenemos; el cilindro, el cono y la esfera.

Las partes que componen un poliedro reciben diferentes nombres, así:

- **Cara:** superficie plana (polígono) que delimita el poliedro.
- **Arista:** Segmento en el que se intersecan dos caras del poliedro.
- **Vértice:** Punto en el que se intersecan tres o más aristas del poliedro.

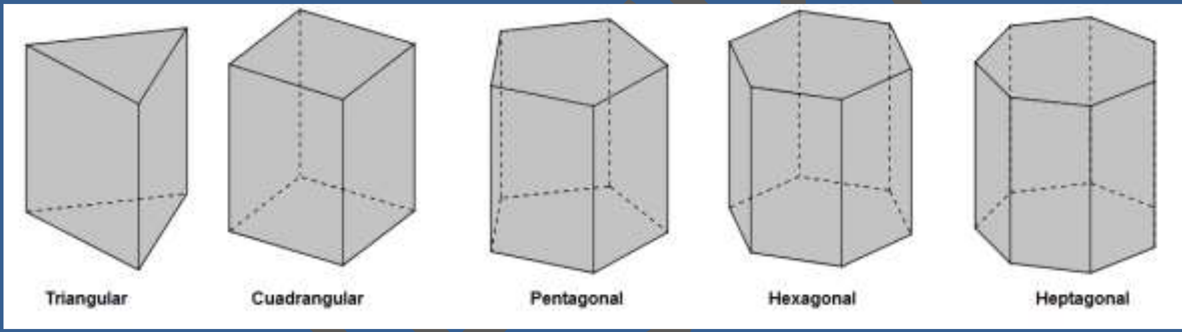
Prisma

Los prismas son aquellos sólidos que tienen las caras laterales formadas por paralelogramos y un par de caras congruentes denominadas bases.



En un prisma recto su altura es congruente a la altura de uno de los rectángulos que forman las caras laterales.

A continuación, algunos prismas, cuyo nombre depende del polígono de su base.

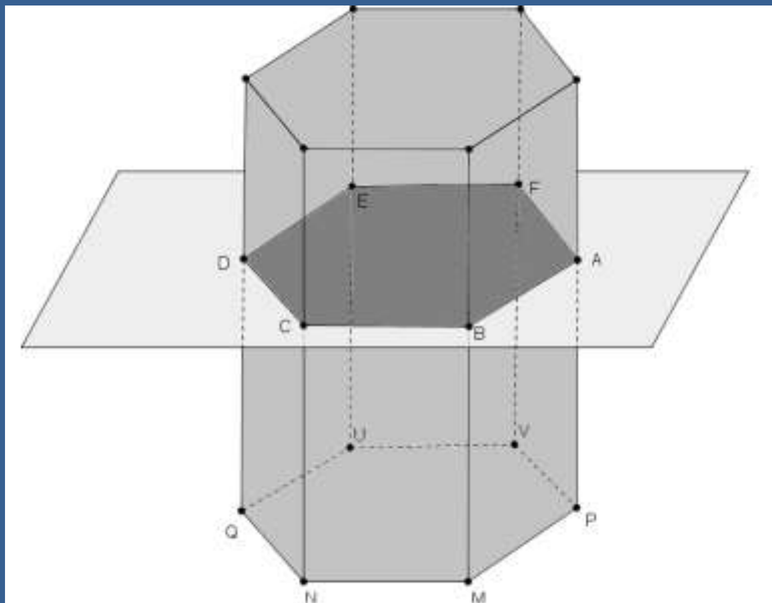


Si se desea calcular el área de un prisma de base regular, basta con calcular el área basal (que son dos polígonos) y los rectángulos que forman el área lateral (la cantidad de rectángulos es igual al número de lados del polígono de la base).

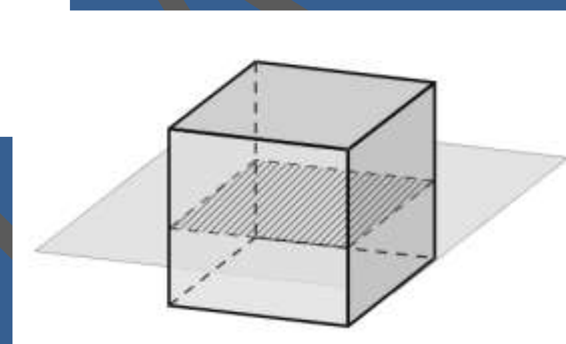
Secciones planas de un prisma

Cuando se corta un prisma con un plano, se obtiene un polígono que recibe el nombre de sección plana del sólido. Según la inclinación con la que se trace dicho plano, así será el polígono resultante.

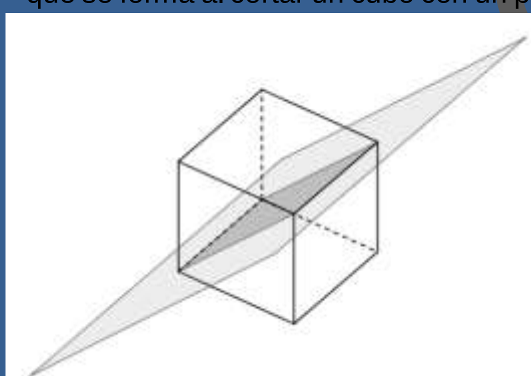
Por ejemplo, si se tiene un prisma hexagonal recto, y se traza un plano paralelo a la base, ¿qué figura se forma entre el plano y el prisma? ¿Qué relación cumple esa nueva figura con la base del prisma?



Note que el hexágono ABCDE es congruente con la base.



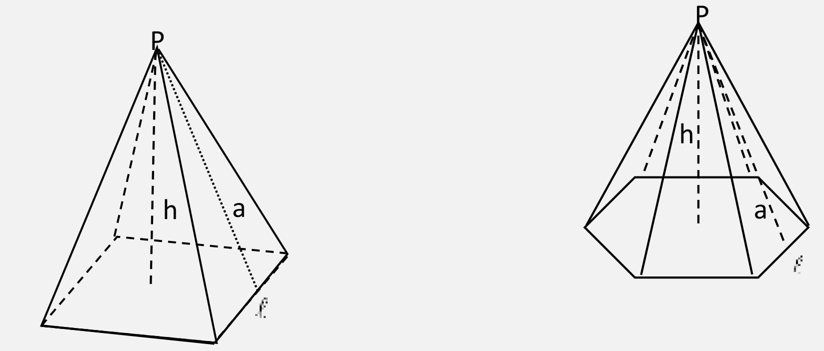
En la figura de la derecha se presenta la sección que se forma al cortar un cubo con un plano paralelo a su base.



En la figura de la izquierda se muestra la sección formada por un plano que atraviesa un cubo por su diagonal. Note que se forman dos cuerpos sólidos congruentes.

Pirámide

Una pirámide es un poliedro, en el cual todas las caras, menos la base tienen un vértice común. Este punto se denomina vértice, cúspide o ápice de la pirámide. Las caras laterales están formadas por triángulos. A continuación se ofrece la ilustración de dos pirámides: la de base cuadrada y una de base hexagonal.



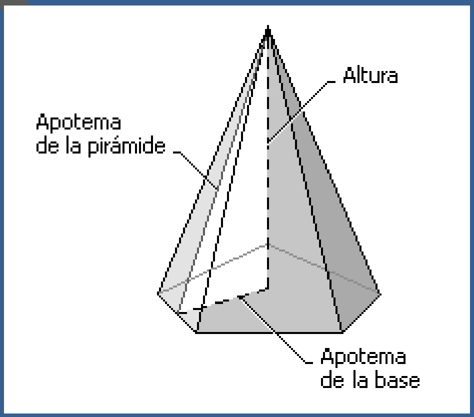
Pirámide cuadrada

Pirámide hexagonal

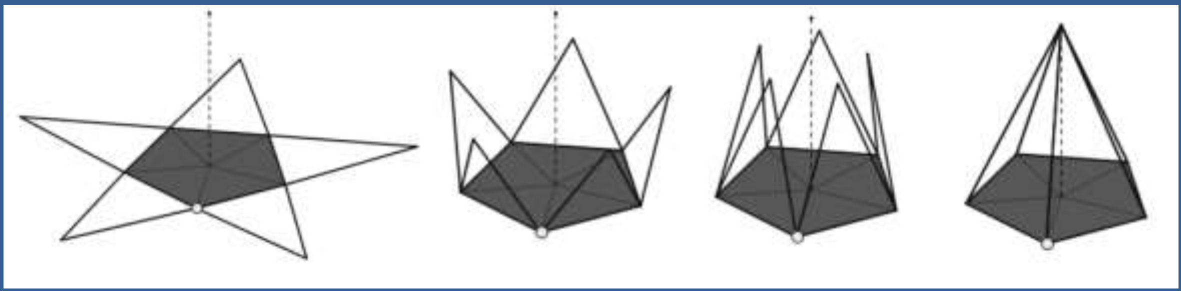
P: vértice, a: apotema, ℓ: lado h: altura

P: vértice, a: apotema, ℓ: lado h: altura

Una pirámide está formada por:

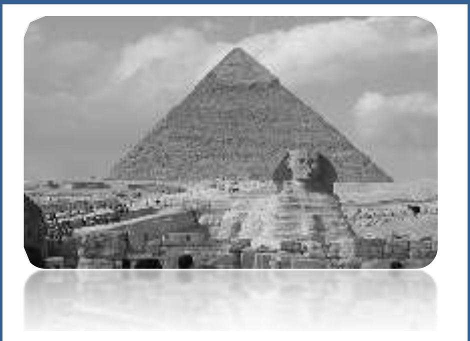


- **Cúspide o ápice** Es el vértice de la pirámide.
- **Altura:** Segmento que va de la cúspide de la pirámide hasta la base de la misma en forma perpendicular. Cuando la base es regular, el pie de la altura es el centro de la base.
- **Apotema:** Es la altura de cada uno de los triángulos que forman las caras laterales de la pirámide.
- **Arista Lateral:** Segmento que une dos triángulos de las caras laterales. Sus extremos son la cúspide de la pirámide y un vértice de la base.
- **Arista Basal:** Lado del polígono de la base de la pirámide.



Muchas civilizaciones fueron cautivadas por las pirámides, e incluso les daban significados místicos. Hay evidencias de majestuosas construcciones arquitectónicas en Egipto, Sudán, México, Perú y la antigua Mesopotamia, lo que demuestra que desde tiempos antiguos el ser humano ha aplicado conocimientos matemáticos en sus construcciones.

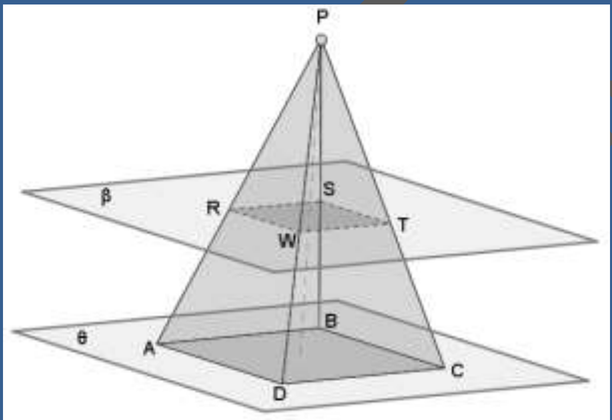

Pirámides de Sudán



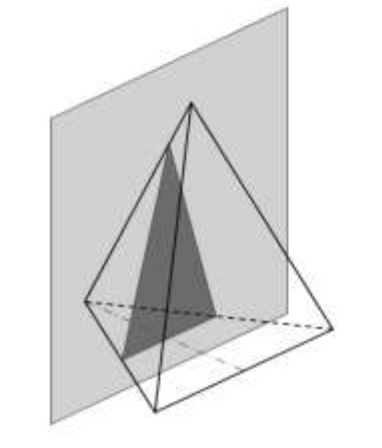
Incluso la única maravilla del mundo que todavía existe es la pirámide de Keops, cuya construcción finalizó en el año 2570 a. C.

Secciones planas de una pirámide

A continuación se presentan algunas secciones planas obtenidas por el corte de un plano con la pirámide.

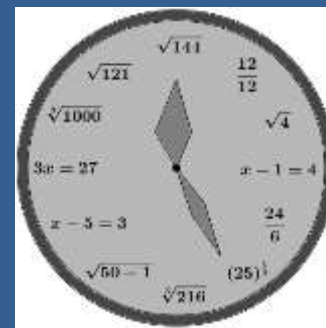


Si los planos β y α son paralelos, los cuadriláteros ABCD y RSTW son semejantes.



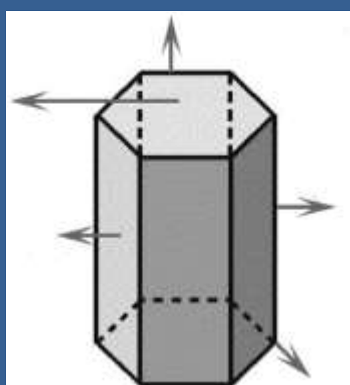
La sección plana que se forma en la pirámide de la derecha, corresponde a un triángulo.

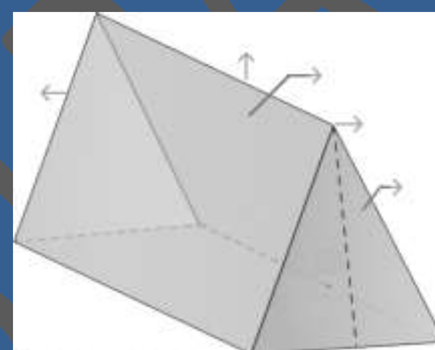
Tiempo para practicar 2.3

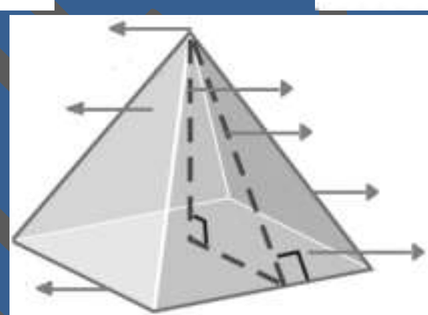


Habilidades:
Identificar la base, las caras laterales, la altura, las apotemas y el ápice o cúspide de una pirámide.
Identificar las caras laterales, las bases y la altura de un prisma recto.
Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular.
Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.

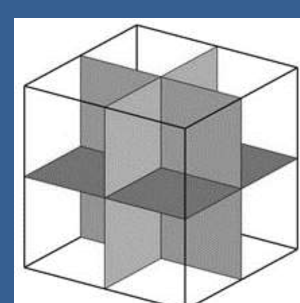
1. Escriba el nombre de cada parte señalada.

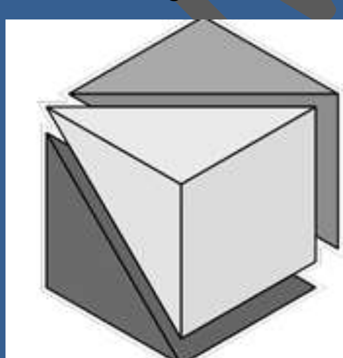






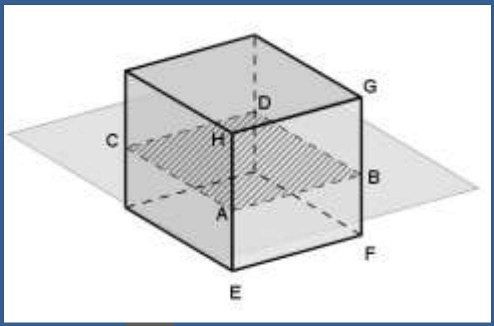
2. En la figura de la derecha, ¿cuántos cubos hay en total?



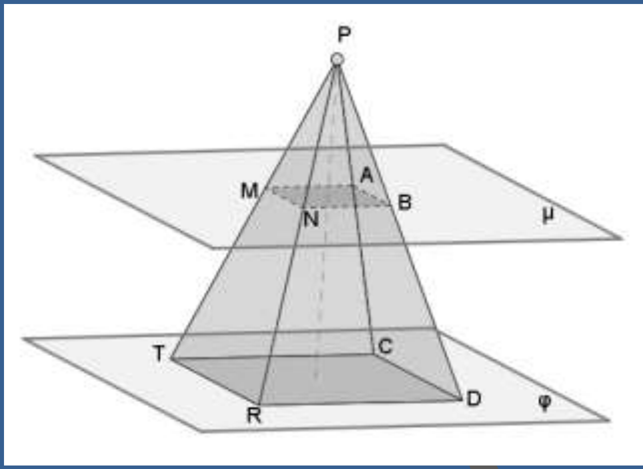


3. ¿Cuáles cuerpos sólidos se aprecian en la figura de la izquierda?

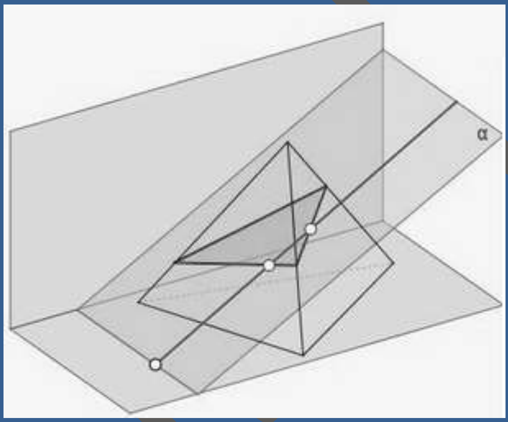
4. Considere el cubo que es cortado por un plano paralelo a la base, donde A y B son puntos medios de $\overline{HE}$ y $\overline{GF}$ respectivamente



(a) ¿Qué nombre recibe el cuadrilátero ABDC?
(b) ¿Qué nombre recibe el cuadrilátero AHGB?
(c) ¿Cuántos y cuáles cuadriláteros son congruentes a □AHGB?



5. La figura adjunta muestra una pirámide cuadrangular donde los planos μ y φ son paralelos.
(a) ¿Qué nombre recibe el cuadrilátero ABNM?

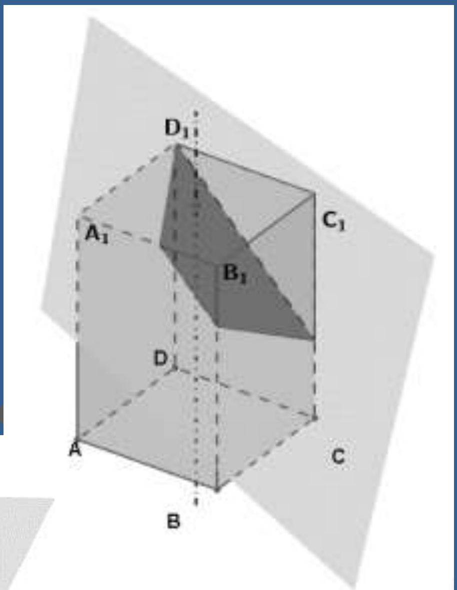


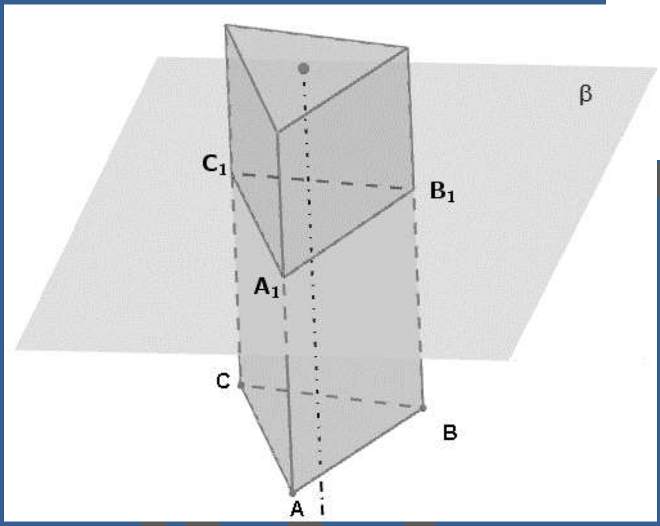
6. En la figura adjunta, analice si el triángulo determinado por el plano α y la pirámide, es semejante a la base de dicha pirámide.

7. En el prisma cuadrangular, se presenta a modo de ejemplo, un plano que lo atraviesa, de manera que determina un cuadrilátero irregular.

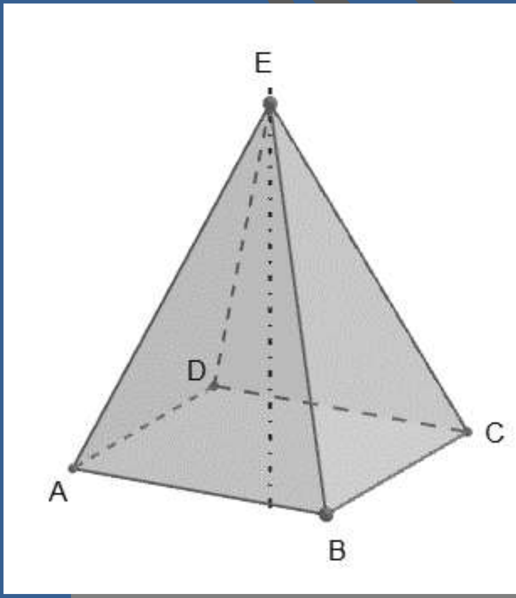
Describa la manera en que se debe atravesar un plano al prisma, de modo que la figura que resulta sea:

(a) Congruente a la base.
(b) Congruente al rectángulo AA_1D_1D
(c) Un triángulo.
(d) Un paralelogramo distinto a la base.





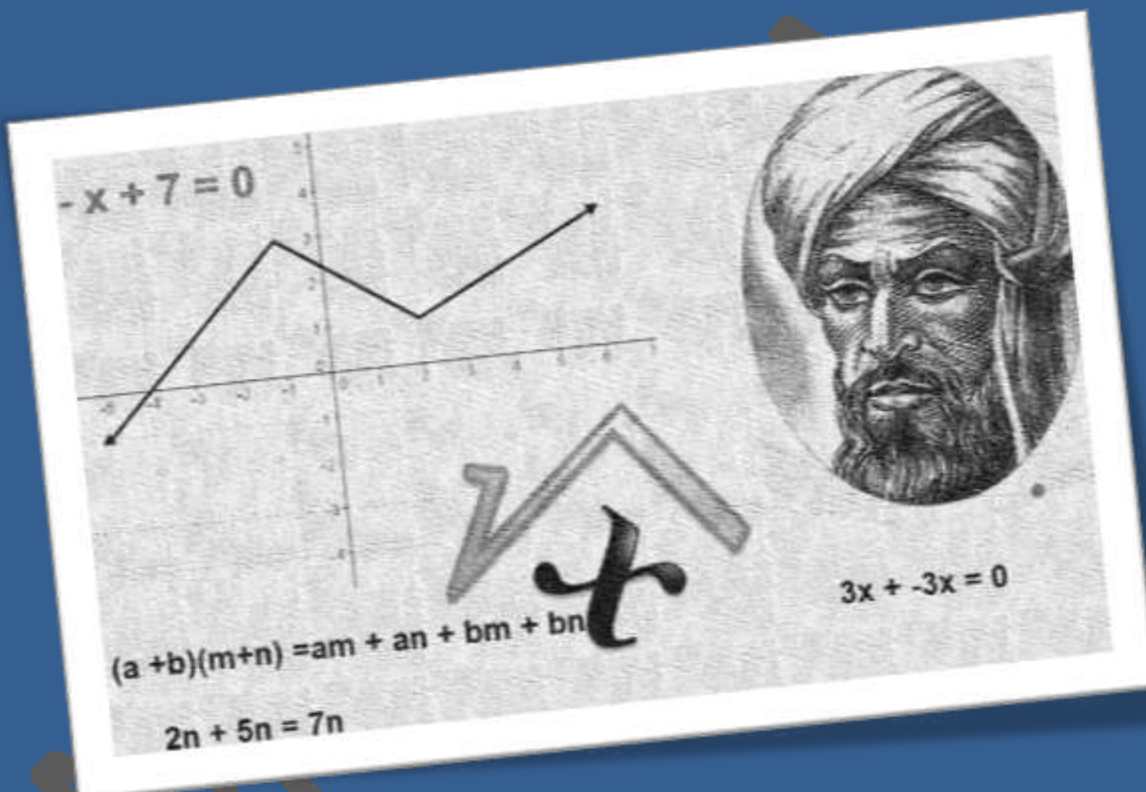
8. Dada la figura, donde AB = 4cm, BC = 7cm , AC = 5 y el plano β es paralelo a la base, determine el perímetro del $\Delta A_1B_1C_1$



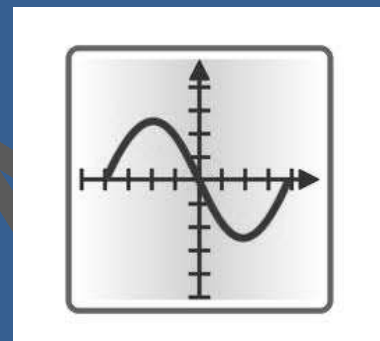
9. Dada la pirámide cuadrangular, describa la manera en que se debe atravesar un plano a la misma, de modo que la figura que resulta sea:

(a) Un cuadrado
(b) Un triángulo semejante al ΔBCE
(c) Un cuadrilátero no cuadrado
(d) Un triángulo congruente con ΔABE .

Relaciones y Álgebra



Relaciones y Álgebra



El lenguaje matemático ha estado presente en toda civilización, a tal punto que el origen simbólico de los números precedió a la escritura de las palabras. Sin embargo, conforme surgían nuevas necesidades en la sociedad y en el pensamiento humano, se fueron formulando generalizaciones de la aritmética, que permitieron simplificar diversos problemas, para dar origen al álgebra.

كتاب الخوارزمي

Página del libro *Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-ŷabr wa-l-muqābala*, de Al-Juarismi.

La palabra "álgebra" proviene del vocablo árabe الجبر *al-ŷabar* que se traduce como "restauración" o "reintegración", expuesta por primera vez en el tratado escrito del año 820 d.C. por el matemático y astrónomo persa Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi.

Conocimiento: Función Lineal

Escenario de aprendizaje

El tiempo vale oro

En un barrio abrieron un salón de juegos, donde cobran ₡1000 como tarifa de entrada y ₡600 por cada hora que permanezca en el local.

(a) Eliseo quiere ir al salón de juegos y disfrutar por tres horas y media ¿Cuánto dinero tendrá que pagar?

(b) Al amigo de Eliseo, su madre le da ₡4 600 ¿Cuántas horas COMO máximo podrá estar en el local?

(c) Al final Eliseo decide ir dos veces y estar una hora cada día, mientras que su amigo prefiere ir un solo día y estar tres horas. ¿Quién gasta más dinero?

(d) Si una persona usa “x” horas el salón de juegos, determine una expresión general, que permita obtener el dinero por pagar.

Muchas situaciones cotidianas involucran variables que se relacionan entre sí. En este caso, por ejemplo, existe una relación entre el precio por pagar y el número de horas que se está dentro del local.

Para abordar la primera pregunta, es importante distinguir entre las cantidades **constantes** y aquellas **variables.** La entrada, en efecto, es una cantidad constante, pues se debe pagar sin importar el tiempo que se esté en el local. Por su parte el número de horas sí es variable e independiente, mientras que el precio por pagar es una variable dependiente.

Ahora bien, por el ingreso, Eliseo paga ₡1 000 y por las tres horas y media ₡600 $\cdot 3,5 =$ ₡2 100. En total debe pagar ₡1 000 + ₡2 100 = ₡3 100.

Con respecto a la pregunta (b), necesitamos saber a cuántas horas equivale el pago de ₡4 600. Hay muchas formas correctas de proceder, una de ellas, es restar primero los ₡1 000 de entrada, eso nos dejaría ₡3 600. Como cada hora vale ₡600, entonces realizamos ₡3 600 ÷ ₡600 = 6. Por tanto, el amigo de Eliseo puede ir durante 6 horas como máximo, al salón de juegos.

Para el punto (c), se tiene:

	Condiciones		Dinero por pagar
	Días	**Horas por día**	
Eliseo	2	1	Día uno: ₡1 000 + ₡600 $\cdot 1 =$ ₡1 600 Día dos: ₡1 000 + ₡600 $\cdot 1 =$ ₡1 600 Total: ₡3 200
Amigo de Eliseo	1	3	Día uno: ₡1 000 + ₡600 $\cdot 3 =$ ₡2 800

Gasta más dinero Eliseo, a pesar de que usa menos tiempo los juegos del salón.

Esta situación descrita, puede ser modelada mediante una fórmula matemática, que permite asociar cada hora con el respectivo monto a pagar. De esta forma, si llamamos P al pago y "x" a la cantidad de horas, podemos expresar esta relación así:

$$P(x) = 1000 + 600 \cdot x$$

- Por tanto si se desea saber el pago por 5 horas de juego, solo se resuelve:

$$P(5) = 1000 + 600 \cdot 5 = 4000 .$$

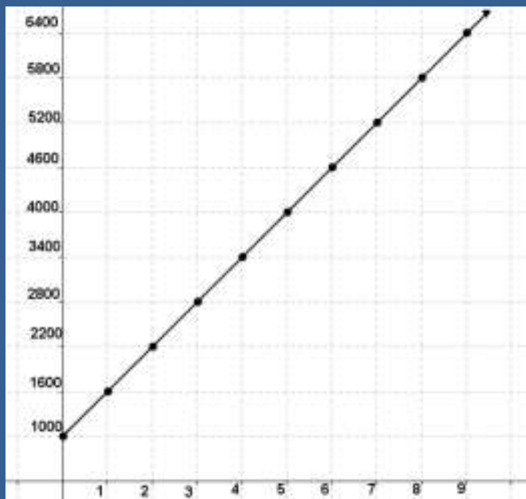
- Para determinar cuántas horas puede estar en el local si cuenta con ₡2 500, se realiza:

$$2500 = 1\,000 + 600 \cdot x$$
$$\frac{2500 - 1000}{600} = x$$
$$2{,}5 \text{horas} = x$$

Esta relación puede ser representada mediante una gráfica, para lo cual es conveniente hacer una tabla que resuma algunos datos. Para más comodidad se usarán horas exactas.

Horas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pago	1600	2200	2800	3400	4000	4600	5200	5800	6400	7000

Se ubican los pares ordenados (x,y) en el plano cartesiano y se unen los puntos.



Note que al unir los puntos queda una recta. Esta es la razón por la cual a relaciones como la que estamos analizando, se les conoce con el nombre de **función lineal**.

Para graficar una función lineal solo se necesitan dos pares ordenados que pertenezcan a la función, ubicarlos en el plano cartesiano y trazar una recta que los una.

Conceptos

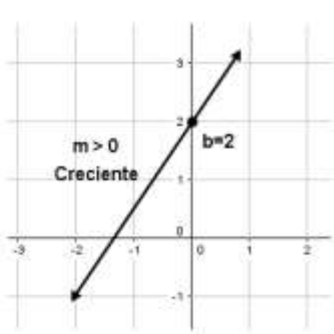
- Un símbolo que representa un valor fijo, se llama **constante**.
- Un símbolo que puede representar distintos valores se llama **variable.**
- Una **variable independiente** es aquella cuyo valor no depende del de otra variable.
- Una **variable dependiente** es aquella cuyos valores dependen de los que tome otra variable.

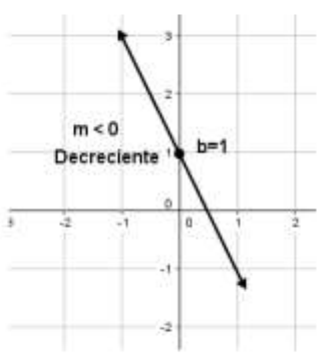
Definición: Función Lineal

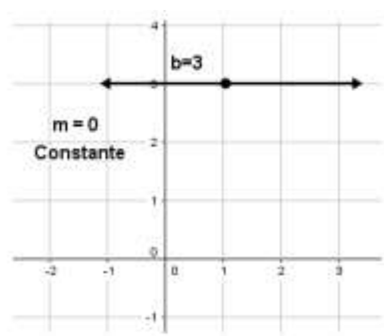
Una función lineal o afín, es aquella relación que puede ser representada de la forma:

$$y = mx + b$$

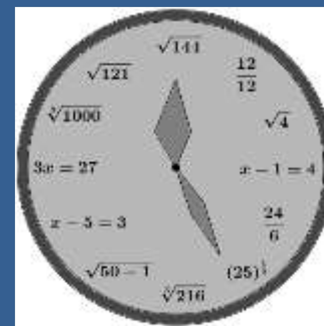
A la “m” se le llama pendiente, y “b” representa el punto donde interseca la gráfica el eje “y”







Tiempo para practicar 3.1



Habilidades:
Identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la forma y = ax + b
Representar de forma tabular, algebraica y gráfica una función lineal.

1. La conversión de grados Celsius a Fahrenheit, está modelada mediante la siguiente función lineal: F(C) = 1,8C + 32.

(a) ¿Cuál es una constante?
(b) ¿Cuál es la variable dependiente?
(c) ¿Cuál es la variable independiente?
(d) ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 10° C?
(e) ¿A cuántos grados Celsius equivalen 104° F?
(f) Artemio ayuda a su mamá a cocinar. Su madre le dice que le suba 20°C al horno. Artemio se percata de que el horno indica 215°F. ¿A cuántos grados Fahrenheit quedará el horno con la indicación que le dio la mamá?
(g) Complete la tabla:

C	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
F								

(h) Construya la gráfica de la función F

2. La función T dada por $T(h) = -\frac{1}{400}h + 30$, se utiliza para aproximar la temperatura del aire en grados Celsius a "h" metros de altura sobre la superficie de la Tierra.

(a) ¿Cuál es una constante?
(b) ¿Cuál es la variable dependiente?
(c) ¿Cuál es la variable independiente?
(d) Un avión vuela a 10 000 metros de altura, ¿cuál es la temperatura a esa altura?

3. La masa esperada en toneladas de una ballena se expresa como $m(L) = 1{,}7L - 42{,}8$, donde L es la longitud de la ballena en pies.

(a) ¿Cuál es una constante?
(b) ¿Cuál es la variable dependiente?
(c) ¿Cuál es la variable independiente?
(d) ¿Cuál será la masa de una ballena de 30 pies?
(e) Si una ballena tiene una masa de 28,6 toneladas, ¿cuál será su longitud?

4. En una fábrica de pantalones, por día hay un gasto de 200 000 colones que incluye el alquiler del local, la electricidad y la planilla. Además por cada pantalón que se fabrique se gasta 1000 colones.

(a) Determine una función lineal que modele la situación anterior.
(b) ¿Cuál es el gasto en colones en un día por la confección de 200 pantalones?

(c) En un día hubo un gasto de ₡380 000, ¿Cuántos pantalones se fabricaron?

5. El costo en euros "C" de producir "x" unidades de un producto mensualmente está dado por C(x) = 3x + 900. Determine:

(a) ¿Cuál es el costo de producción si se ha producido 115 unidades?

(b) En el mes de setiembre el costo de producción fue de 1560 euros, mientras que en octubre fue de 1593 euros ¿Cuántas unidades más se produjeron en octubre en comparación a setiembre?

6. El valor inicial de un terreno es de ₡25 000 000 y su valor "V" aumenta cada año en ₡500 000. Según la información anterior, conteste:

(a) Si "x" representa la cantidad de años que trascurren, exprese mediante una función lineal el valor del terreno.

(b) ¿Cuál es la variable dependiente?

(c) Si han pasado 6 años, ¿cuál es el valor del terreno?

(d)

(e) ¿Cuál es la variable independiente?

7. En un colegio se desea contratar un servicio de fotocopiado. Tres compañías cotizan para tal fin:

Compañía A: cobra ₡75 000 por semana y ₡2000 por hora

Compañía B: cobra únicamente ₡5000 por hora

Compañía C: cobra ₡40 000 por semana y ₡3000 por hora

(a) Escriba una función lineal para cada cotización, donde "x" represente las horas de uso de la fotocopiadora

(b) Si se espera un uso de 14 horas por semana, ¿cuál será la opción más económica?

(c) Si se espera un uso de 33 horas por semana, ¿cuál será la opción más económica?

(d) A cuántas horas de uso de la fotocopiadora, el costo de la compañía A será igual al de la compañía B

(e) A cuántas horas de uso de la fotocopiadora, el costo de la compañía A será menor que el de las otras dos. [sugerencia: usar Excel para hacer una tabla con los valores respectivos]

8. En una compañía se rentan automóviles a ₡20 000 el día. Además, se suma a ese costo una tarifa de ₡500 por cada kilómetro recorrido.

(a) Represente este caso mediante una función lineal

(b) ¿Cuál es el costo en un recorrido de 50km en un día?

(c) Si se paga un total de ₡57 500, ¿cuántos kilómetros se recorrieron?

9. Estela desea aprender inglés, por lo que va a una academia y le indican que el precio por la matrícula es de ₡25 650 y la mensualidad de ₡15 300.

(a) Modele esta situación mediante una función lineal

(b) Luego de pagar ₡377 550, Estela logró aprender inglés. ¿cuántos meses estudió en la academia?

10. El cobro "C" en dólares, que realiza un fontanero para cambiar la tubería, está dado por C(m) = 2m + 5, donde "m" es el número de metros de tubería.

(a) Complete la tabla

m	1	2	3	4	5	6
C						

(b) Construya la gráfica que representa la situación anterior.

11. La dosis "D" en miligramos, de un medicamento para un tipo de perro, está relacionada con la masa corporal "m" del mismo, dada en kilogramos, mediante la fórmula D(m) = 2 +3m

(a) Complete la tabla

m	2	4	6	8
D				

(b) Construya la gráfica que representa la situación anterior.

12. Un jugador de fútbol de una liga menor percibe un ingreso de $625 por partido jugado y por cada gol anotado a favor de su equipo se le acredita una bonificación de $100.

(a) Modele esta situación mediante una función lineal.

(b) Construya una tabla en la que aparezca de cero a cinco goles.

13. El salario fijo mensual de un oficinista es de ₡425 000, más ₡15 000 por cada hora extra.

(a) Modele esta situación mediante una función lineal.

(b) Construya una tabla en la que aparezca de cero a 8 horas extra.

14. Construya una tabla y la gráfica de cada función lineal. Indique el valor de la pendiente "m" y de la intersección con el eje "y".

(a) y = -2x + 4

x	-2	-1	0	1
y				

(b) y = 5 – x

x	-3	-1	1	3
y				

(c) $y = \dfrac{5x-15}{2}$

x	-3	-1	1	3
y				

(d) $y = -x$

x	-2	0	1	2
y				

Conocimiento: Valor numérico

Escenario de aprendizaje

Una invitación para colaborar

En el colegio se organiza una actividad para recaudar fondos, con el fin de ayudar a niños de escasos recursos. Deciden confeccionar las invitaciones en forma de triángulo. La imprenta cobra según el área que tengan las invitaciones.

(a) ¿Cuál expresión simbólica representa la medida del área de un triángulo, dadas las medidas de la base y la altura?
(b) ¿Cuál es el área de una invitación, si la base mide 20cm y la altura 15cm?

Los símbolos que utilizamos en Matemática, nos ayudan a simplificar muchos problemas de la vida cotidiana y trabajar con un lenguaje más sencillo y manejable.

En este escenario, si deseamos calcular el área de un triángulo indicamos que está dada por: “*el producto de la medida de la base por la longitud de la altura, divido por dos*”.

Todo esto lo podemos simplificar si expresamos:

$$\frac{b \bullet h}{2}$$

Cada vez que trabajamos con expresiones formadas por **variables** y **constantes** (números) estamos utilizando **expresiones algebraicas.**

Por ejemplo $\frac{b \bullet h}{2}$ es una expresión algebraica, donde “b” y “h” son variables y $\frac{1}{2}$ es una constante.

Cuando a una expresión algebraica se le asignan valores a las variables, se le conoce como **valor numérico.**

En este caso, al calcular el área de la invitación, estaríamos hallando el valor numérico de $\frac{b \bullet h}{2}$ cuando b = 20cm y h = 15cm

$$\frac{20 \bullet 15}{2} = 150$$

Ejemplo 1

Halle el valor numérico de

$$\left(x+\frac{y}{z^2}\right)^m$$

donde $x=1,\ y=-3,\ z=-2,\ m=3$

Se reemplaza cada variable por los valores respectivos y se efectúa la operación:

$$\left(1+\frac{-3}{(-2)^2}\right)^3$$

$$=\left(1+\frac{-3}{4}\right)^3=\left(\frac{4-3}{4}\right)^3=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

Ejemplo 2

El lado de un rectángulo es -5x + m y el ancho x^2 + x. Halle el área de ese rectángulo cuando x = -3 y m = 7

Medida del largo $=-5\bullet-3+7=22$

Medida del ancho $=(-5)^2+-5=20$

Área $=22\bullet20=440$

Definiciones

⌗ ***Término:*** Es cualquier sumando de una expresión algebraica

$$\underset{\text{primer término}}{2bx}+\underset{\text{segundo término}}{\frac{3x}{5}}-\underset{\text{tercer término}}{4}$$

⌗ ***Monomio:*** Se llama monomio a toda constante o bien, a toda expresión algebraica, en la cual las potencias de las variables son de exponentes enteros positivos y están relacionados únicamente por la multiplicación y además no contiene letras en el denominador.

Ejemplos de monomios:

(1) $3ab$ (2) $\frac{4x^2y^3}{7}$ (3) $5a^3b\div6$

(4) -32 (5) $\frac{D\bullet d}{2}$

No son monomios:

(1) $\frac{3w}{x}$ (2) $5d^{\frac{2}{3}}$ (3) $12x^{-3}$

(4) $-32+5x$ (5) $x-y$

⌗ ***Factor numérico:*** También llamado coeficiente, es la parte numérica (constante) de la expresión.

⌗ ***Factor literal:*** Son las variables del monomio.

Monomio	Factor literal	Factor numérico
$2\pi r$	r	2π
$\frac{ab^2}{5}$	ab^2	$\frac{1}{5}$
bh	bh	1

⌗ **Grado del monomio:** Es el mayor exponente del factor literal del monomio

⌗ **Grado global:** Es la suma de los exponentes del factor literal del monomio.

Monomio	Grado del monomio	Grado global
$\frac{3x^4v^6}{5}$	6	10
$-h^5d$	5	6
$9^3x^5y^5w^0$	5	10

⌗ **Monomios semejantes:** Son aquellos monomios que tienen el mismo factor literal.

Ejemplos

Monomios semejantes:

$3x^2y$ con $\frac{-5}{7}x^2y$; $9x$ con x; $-8y^3z^5m$ con my^3z^5

No son semejantes: $3x^2$ con $5x$; $9x^2y$ con $-6x$

⌗ **Binomio:** Expresión algebraica formada por dos monomios no semejantes.

Ejemplos

(1) $2b+2a$ (2) $\frac{-2}{5}m+5a^2b$

⌗ **Trinomio:** Expresión algebraica formada por tres monomios no semejantes.

(1) $-3+\frac{a^3}{7}-k$

(2) $dh-7h+5hd-2$

⌗ **Polinomio:** Expresión algebraica formada por al menos dos monomios no semejantes.

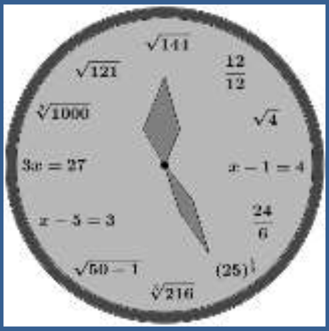
(1) $-1+y$

(2) $\frac{v}{3}-y^2+p^3-w^3z$

Todo binomio y todo trinomio es un polinomio; pero no todo polinomio es binomio o trinomio.

Tiempo para practicar 3.2

Habilidades:
Identificar una expresión algebraica.
Determinar el valor numérico de una expresión algebraica.
Reconocer monomios semejantes.
Clasificar expresiones en monomios, binomios, trinomios y polinomios de más de tres términos.



1. Determine en cada caso el valor numérico.

a) $2x^2y$ cuando $x=-1,\ y=3$

b) $m+2n$ cuando $m=7,\ n=-5$

c) $15c^3m$ cuando $c=-1,\ m=4$

d) $\left(y+\dfrac{b^2}{y}\right)^y$ cuando $b=4,\ y=2$

e) $\dfrac{4a^2+a-b^6}{3}$ cuando $a=3,\ b=-2$

f) $5xy^2+y^3$ cuando $x=\dfrac{1}{2},\ y=4$

g) $\dfrac{2}{3}x-1$ cuando $x=\dfrac{3}{4}$

2. Halle el área de un triángulo cuya longitud de la base es el doble de la longitud de la altura y la longitud de su altura está dada por x^2y, donde $x=-5,\ y=\dfrac{2}{5}$

3. Determine el valor numérico de $\dfrac{1}{x}-x$ donde $x=\dfrac{-1}{2}$

4. Calcule el valor numérico de a^b+3a-b donde $a=3$ y $b=0$

5. Determine el valor numérico de $\dfrac{x-y}{xy}+2x$ donde $x=\dfrac{2}{3}$ y $y=-1$

6. Calcule el valor numérico de $-x^2+x^0-5^x+x^6$ donde $x=-1$

7. En un rectángulo ABCD, si AB = 3 y BC = $\dfrac{AB}{3}$, entonces ¿cuál es el perímetro del rectángulo?

8. Halle el valor numérico de la expresión $\dfrac{x^2-x+2^x}{2-x}$ donde $x=-2$

9. En un rombo, la medida de la diagonal mayor es cuatro terceras partes de la diagonal menor. Si la medida de la diagonal menor es de $3\frac{1}{2}$, entonces ¿cuál es el área del rombo?

10. En un triángulo equilátero, la longitud del lado está dada por $a-b$, donde $a=\dfrac{1}{2}$ y $b=-2$; entonces ¿cuál es el perímetro del triángulo?

11. El área de un cuadrado está dada por $\dfrac{9}{169}(50x+19)$ ¿Cuál es el perímetro de ese cuadrado si $x=3$?

12. Para calcular el interés simple que se obtiene al invertir P cantidad de dinero, a una tasa de interés "r" y un tiempo de "t" años, se usa la fórmula: Interés $= P \cdot r \cdot t$. Determine el interés simple que se obtiene al invertir ₡50 000 a una tasa del 0,25 en un lapso de 2,5 años.

13. Complete el cuadro con la información que se le solicita.

Expresión algebraica	Factor (coeficiente) numérico	Factor literal
$-5x^3y$		
$\frac{5x^3y^8}{7}$		
$8ab$		
y^5		
$\frac{8}{9}m$		
m^3n		
$-x^8z$		
$3^3d^5m^6$		

14. Determine si la expresión es o no monomio. Si no es monomio, justifique la razón; de serlo indique el grado del monomio y el grado global. Guíese con los dos ejemplos.

Expresión algebraica	Es monomio		No es monomio
	Grado monomio	Grado global	Justificación
$5x^7m^2$	7	9	
$\frac{8x^3}{y}$			Tiene factores literales en el denominador
$-10a^3n^7$			
$\frac{8x^3y}{5}$			
$-ab$			
$6x^{-5}y$			
$23m^{\frac{5}{7}}g$			
8^3mn			
$\frac{1}{x}$			
$5a^7bc^5d^7e^5$			

15. Clasifique cada expresión en monomio, binomio, o trinomio, según sea el caso. Marque con una equis en la casilla correspondiente

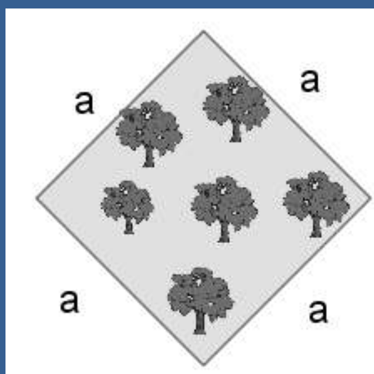
Expresión algebraica	Monomio	Binomio	Trinomio
$-5x^3 - y$			
$417a^3b^5h^{15}m$			
$x - 1$			
$2a - 5m + k$			
$\frac{8m^3n^5}{15}$			
$4f^2 - 5a + y^3$			
$1 + x - 2x$			

16. En cada caso encierre en un óvalo los términos que son semejantes entre sí. Guíense con el ejemplo.

Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 4
$5mk^2$	$6km$	$-9k^2m$	$-2km^2$
$\frac{2}{3}x^5y^3$	y^3x	$-5x^5y^3$	$\frac{x^5y^3}{9}$
ab	$-ba$	$5ab$	$8a$
x^2	$2x$	$5x^2$	x^3

Conocimiento: Suma y resta de monomios

Alucio corre todos los días alrededor de un terreno cuadrado de "a" metros. Siempre da 6 vueltas. ¿Cuántos metros recorre Alucio?



Cada vuelta que da Alucio, recorre: **a + a + a + a,** es decir recorre **cuatro** veces **"a",** esto se puede expresar como **4a,** es decir:

$$a + a + a + a = 4a$$

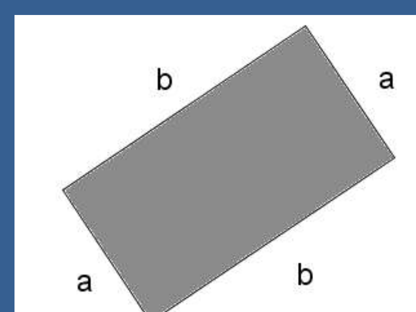
Ahora bien, como da 6 vueltas, corre **4a + 4a + 4a + 4a + 4a + 4a,** que equivale a una distancia de **6 veces 4a,** por tanto, se puede indicar que

$$4a + 4a + 4a + 4a + 4a + 4a = 24a$$

Note que para efectuar esta suma, solo se resolvió la operación con los factores numéricos y se mantuvo el factor literal.

Dorotea, una amiga de Alucio, corre pero alrededor de una plaza rectangular de "a" metros de ancho y "b" metros de largo. Si dio 4 vueltas, ¿Cuántos metros recorrió?

Como en este caso hay dos dimensiones diferentes (largo y ancho), tenemos que Dorotea recorre en una vuelta: **a + a + b + b.** Por tanto corre **dos veces** la distancia de **"a"** y **dos veces** la de **"b":**



$$2a + 2b$$

Al dar cuatro vueltas, se tiene que la distancia recorrida será:

$$2a + 2b + 2a + 2b + 2a + 2b + 2a + 2b = 8a + 8b$$

Con estas dos situaciones, se puede rescatar una importante propiedad:

"Para sumar o restar monomios, estos deben ser semejantes. Para efectuar estas operaciones se suman o restan los coeficientes numéricos de los monomios semejantes y el factor literal se mantiene".

Ejemplos.

(1) $5n + 7n = (5+7)n = 12n$

(2) $\frac{-2}{3}x^2y + 3xy^2 - \frac{7}{6}yx^2 = \left(\frac{-2}{3} - \frac{7}{6}\right)x^2y + 3xy^2 = \frac{-11}{6}x^2y + 3xy^2$

(3) $\frac{1}{2}x + \frac{x^2}{3} - \frac{3x}{4} - x^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)x + \left(\frac{1}{3} - 1\right)x^2 = \frac{-1}{4}x + \frac{-2}{3}x^2$

Conocimiento: Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios se toman en consideración los siguientes aspectos:

(a) Cuando hay un signo positivo (de suma) delante de un paréntesis, se elimina el paréntesis y se suman o restan los monomios semejantes.

(b) Cuando hay un signo negativo (de resta) delante de un paréntesis, se elimina el paréntesis y se **cambian** los signos de todos los términos que estaban dentro del paréntesis. Luego se suman o restan los monomios semejantes.

Ejemplos:

1) $4xy + (3x + {}^{-}4y) + (2x - 5y + 3yx)$

$= 4xy + \overset{\frown}{3x} + \underline{\underline{{}^{-}4y}} + \overset{\frown}{2x} \underline{\underline{-5y}} + 3yx$

$= 7xy + \overset{\frown}{5x} - \underline{\underline{9y}}$

2) $\frac{1}{2} - \frac{4m}{3} - 7m^2 - \left(3m^2 + \frac{1}{5} - 5m\right)$

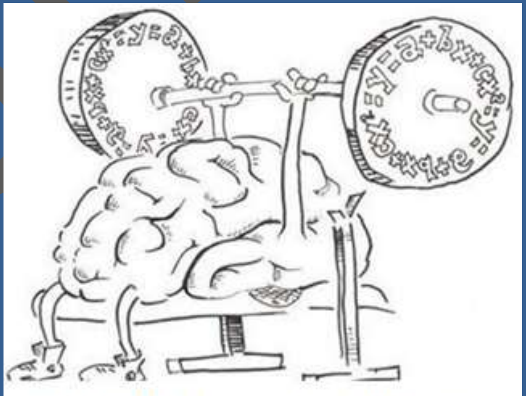
$= \frac{1}{2} - \frac{4m}{3} - 7m^2 + {}^{-}3m^2 - \frac{1}{5} + 5m$

$= \frac{3}{10} + \frac{11m}{3} - 10m^2$

3) $-(2a+4) + \left(7 - \frac{3}{2}a\right) - \left(\frac{5}{3} + 2a\right)$

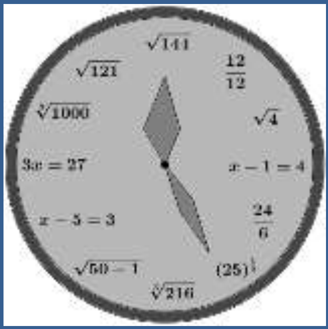
$= -2a - 4 + 7 - \frac{3}{2}a - \frac{5}{3} - 2a$

$= \frac{-11}{2}a + \frac{4}{3}$



¡A ejercitar el cerebro con álgebra!

Tiempo para practicar 3.3



Habilidades:
Efectuar operaciones con monomios: suma, resta.
Efectuar operaciones con polinomios: suma, resta

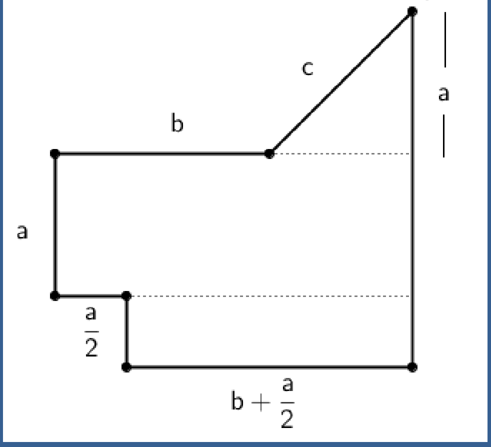
1. Efectúe las siguientes operaciones.

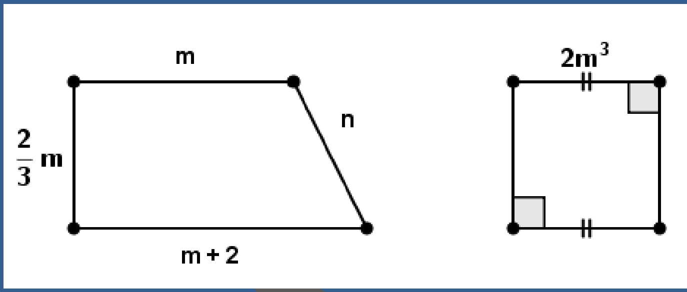
a) $6x - 9x$
b) $6a - 8a + a$
c) $8xy - 16xy + 20yx$
d) $\frac{-2}{3}ab + \frac{-1}{2}ba$
e) $-d + d - d$
f) $4k + k - 5k$
g) $zy + 9yz$
h) $\frac{x}{2} + \frac{5}{2}x$
i) $3x^2 + 4x - 5x^2 - 3x$
j) $\frac{ay}{2} - \frac{by}{4} + \frac{ay}{3}$
k) $-5a + 3ax - a + x$
l) $5 - 9y + 4 - 15y$
m) $9ab^2 - {}^{-}a^2b + 15b^2a + 7a^2b$
n) $15 - 6a + 9a - b$
o) $2a - 5a + 32a^2$
p) $-2km + 6mk - 3km$
q) $-b^3 - 3b + 3b^3 - 7b$
r) $\frac{x}{2} - 5x + \frac{3}{2}x$
s) $-3xy^3 + 12yx^3 - {}^{-}8x^3y$
t) $\frac{x - 5 + 9 - 3x + 11}{3}$
u) $-9h^5 - 8h + 7 + 9h^5$
v) $\frac{5p}{4} - 7p + 4 - 5p$
w) $12a^2x^2 - 4xa + 3x^2a^2 + 8ax^2$
y) $-m^5 - 5m^{10} + 5m^{10} + 4m^5 - 2m^5$
x) $3 - x^9y^9 + 2y^9 - 8 - y^9x^9$
z) $\frac{-b}{2} - b^7 + \frac{3b^7}{3} + \frac{2}{3}b - b^7$

2. Efectúe las siguientes operaciones.

a) $6 + (9 - x) - x + (3x - 2)$
b) $\left(\frac{x-1}{2}\right) + \left(\frac{x-1}{3}\right)$
c) $(8y^3 - 4x) - (3y^3 - 9x)$
d) $-(3a^2 - 4a) + (5a - 2) - (2a^2 - 7a) + 5a$
e) $\frac{5}{4}x - \left(\frac{3x-1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right)$
f) $m - (4 - m) + 4$
g) $-(3b - 6b^2) + (b^2 - 9b)$
h) $x^2 - (y^2 + 5x) + (x^2 - y)$
i) $5 + (7 - 3d) - (7d - 1)$
j) $-\left(\frac{x}{3} - 5\right) + \left(\frac{x}{3} - 5\right)$
k) $-(y - 5 + 5y) - (9y + 2)$
l) $4x^5 - (9x - 3x^5) + (x - x^5)$
m) $(4r^{11} - 5) + 6 - (7 + 9r^{11})$
n) $-\frac{3a^3}{5} - \left(\frac{a^3}{2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{10}$
o) $8m + 5 - (7 - 6m) + m^2 - m$

3. En cada caso, determine el perímetro de la figura.





Conocimiento: Leyes de potencia

El siguiente cuadro resume algunas propiedades ya vistas en aritmética, las cuales se pueden generalizar en álgebra

En aritmética	En álgebra	Ejemplos
$3^2 \cdot 3^5 = 3^7$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	(1) $3x^2 \cdot 5x^6 = 15x^8$ (2) $-a^3bw^4 \cdot 7a^4b^7 = -7a^7b^8w^4$
$8^{100} \div 8^{98} = 8^2$	$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$a^6 \div a = \frac{a^6}{a^1} = a^5$
$\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$	$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(y^3\right)^5 = y^{15}$
$\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3^3}{7^3} = \frac{27}{343}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad b \neq 0$	$\left(\frac{2x}{3y^2}\right)^3 = \frac{2^3x^3}{3^3\left(y^2\right)^3} = \frac{8x^3}{27y^6}$
$5^0 = 1$	$a^0 = 1$	$(3m)^0 = 1$
$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$\frac{x^{-5}}{y^2m^{-1}} = \frac{m}{y^2x^5}$
$\left(\frac{7}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$	$\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^{-5} = \left(\frac{3y}{2x^2}\right)^5 = \frac{243y^5}{32x^{10}}$

Tiempo para practicar 3.4

Habilidades:
Utilizar leyes de potencias para la simplificación de expresiones algebraicas.

1. Aplique correctamente las leyes de potencias en la simplificación de cada expresión

a) $5x^2 \bullet -6x^3y$

b) $\frac{11a^3}{2} \bullet \frac{5a}{3}$

c) $m \bullet m^3 \bullet m$

d) $4x^{\frac{2}{3}} \bullet -6x^{\frac{5}{3}}$

e) $-18g^7k^5 \div -6gk^4$

f) $\frac{60k^8f^{15}}{10k^6f^2}$

g) $\frac{-3}{4}a^7b^3c \div \frac{7}{5}ab^2c$

h) $\frac{15h^7a^9p^{15}}{-3h^7a^{11}p^{12}}$

i) $\frac{-8w^{16}z^3}{16w^{17}z^4}$

j) $-9x^6y^3 \div 3x^0y^2$

k) $(a^7)^5$

l) $(2a^5b^7c^2)^5$

m) $\left(\frac{2m^3}{3n^2}\right)^3$

n) $\frac{4m^{-2}n^7}{mn^3}$

o) $\frac{2h^3p^{-5}}{4h^{-3}p}$

p) $2a^{13} \bullet -a^3 \bullet \; a^7 \bullet 3b^{11}$

q) $\frac{x}{4} \bullet \frac{-4}{9}x$

r) $3h^3 \bullet 4h^3$

s) $-5m^3 \bullet 2mn^3 \bullet 7n^5$

t) $-\frac{5}{2}x^3ym^3 \bullet \frac{-7}{4}m^5x^3$

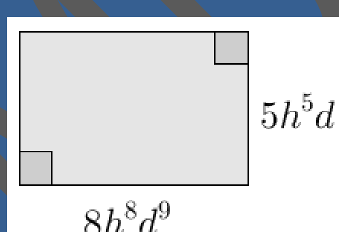
u) $-h^3 \bullet 9$

v) $\left(\frac{3j^5k^3}{k^2j^{-7}}\right)^{-4}$

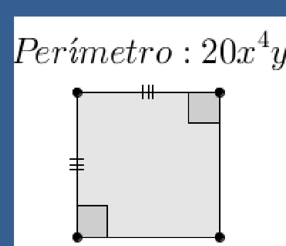
w) $\left(\frac{3d^{-3}d^5m^{-2}}{4m^{-8}d^3}\right)^{-3}$

2. Determine el área de cada figura.

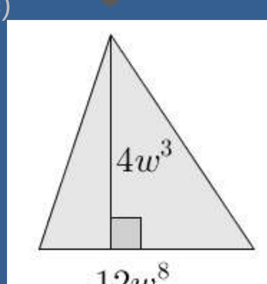
(a)



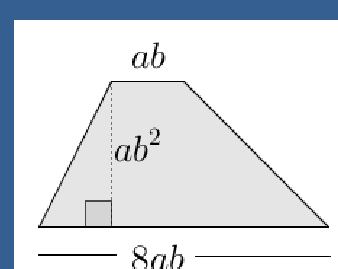
(b)



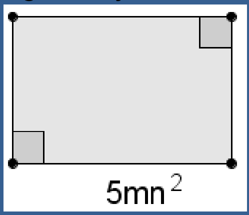
(c)



(d)



3. Determine la expresión que representa al ancho del rectángulo adjunto, si se sabe que el área de ese cuadrilátero es de $35m^6n^2$



4. Simplifique cada expresión:

(a) $x^{5m}y^{3-n} \bullet x^{4+m}y^{n+4}$

(b) $\dfrac{x^{3m+1}y^{3-2n}}{x^{m}y^{n-5}}$

5. **Adicionales**. Resuelva y simplifique cada expresión. No deje exponentes negativos en la respuesta final.

a) $m^2 \bullet m^{-3} \bullet 4m$

b) $\dfrac{y^3}{2} \bullet y^5$

c) $h^{\frac{-5}{3}} \bullet \dfrac{-5}{3}h^3 \bullet 7$

d) $-x^{-1} \bullet -12x^{-1}$

e) $3p^{2k} \bullet -5p^{6k}$

f) $18 \bullet -2k^7$

g) $5k^{12} \bullet k \bullet 2k^{-12}$

h) $8a^{b+1} \bullet -10a^{3+5b}$

i) $\left(24h^7\right) \div \left(12h^8\right)$

j) $\left(8x^{-3}y\right) \div \left(2x^{-2}\right)$

k) $\left(\dfrac{2}{7}a^3b\right) \div \left(2b^5a^3\right)$

l) $\left(d^{4n-5}\right) \div \left(d^{3n}\right)$

m) $\left(w^3f^9\right) \div \left(f^{-9}w^9\right)$

n) $\dfrac{62\,e^9a^8}{31\,e^0a}$

ñ) $\left(\dfrac{d^3}{b^4}\right)^6$

o) $\left(\dfrac{d^3}{b^4}\right)^{-6}$

p) $\left(3h^3 \bullet k\right)^5$

q) $\left(5p^4u^5\right)^3$

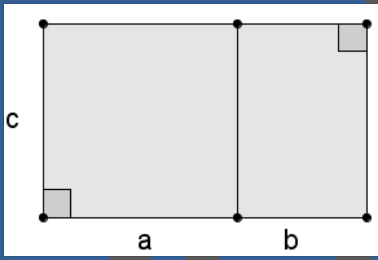
r) $\dfrac{8m^{-3}}{2n^5}$

s) $\left(\dfrac{2m^7d^{-5}}{m^{-4}b^9}\right)^5$

Conocimiento: Operaciones con polinomios

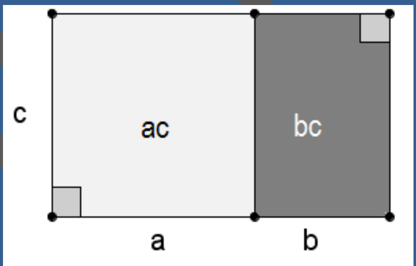
A continuación, vamos a analizar algunas operaciones con polinomios, la primera de ellas, conocida como **ley distributiva para la multiplicación**. Para ello, realizaremos la siguiente construcción geométrica.

- ☑ Se construye un rectángulo de largo **"a + b"** y ancho **"c"**



- ☑ Se determina el área del rectángulo: **c(a + b)**

- ☑ Se calcula el área de los dos rectángulos pequeños y se suman: **ca + cb**



El área del rectángulo original es igual a la suma de las áreas de los rectángulos pequeños. Se concluye:

$$c(a + b) = ca + cb$$

Resumen

Multiplicación de monomio por polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio se hace uso de la propiedad distributiva. Es decir, el monomio se multiplica por cada término del polinomio.

$$\frac{-5}{2}x^3y\left(\frac{2}{5}xy-\frac{4}{25}x^5-3\right)$$

$$=\boxed{\frac{-5}{2}x^3y\bullet\frac{2}{5}xy}+\boxed{\frac{-5}{2}x^3y\bullet-\frac{4}{25}x^5}+\boxed{\frac{-5}{2}x^3y\bullet-3}\qquad \text{al distribuir}$$

$$=\quad -x^4y^2\quad+\quad\frac{2}{5}x^8y\quad+\quad\frac{15}{2}x^3y\qquad \text{al multiplicar monomios}$$

Ejemplos

1) $3x(x+1)$

$=3x^2+3x$

2) $-5y(4y^3-2y+4x)$

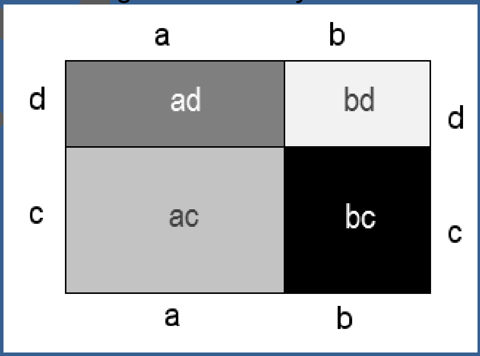
$=-20y^4+10y^2-20xy$

3) $(8m^5+3)\frac{1}{2}m$

$=4m^6+\frac{3}{2}m$

Multiplicación de polinomio por polinomio

☑ Considere un rectángulo de largo **“a + b”** y ancho **“c + d”**



☑ El área del rectángulo está dada por: **(c + d) (a + b)**

☑ La suma del área de cada rectángulo en que queda dividido el original está dada por: **ac + bc + ad + bd**

Se concluye que **(c + d) (a + b) = ac + bc + ad + bd**

Resumen

Multiplicación de polinomio por polinomio

Para multiplicar un polinomio por otro se hace uso de la propiedad distributiva. Es decir se multiplica cada término del primer polinomio por los términos del segundo. Si hay términos semejantes, se suman o restan, según sea.

$$(3x - 6)\ (2x + 5)$$

$$= \boxed{3x \cdot 2x} + \boxed{3x \cdot 5} + \boxed{-6 \cdot 2x} + \boxed{-6 \cdot 5}$$

$$= 6x^2 + 15x - 12x - 30$$

$$= 6x^2 + 3x - 30$$

Ejemplos

1) $(-3a + 2b)(3a^2 + 5)$

$$= -9a^3 - 15a + 6ba^2 + 10b$$

2) $(x + y - 3)(x^2 - 5x + 4)$

$$= x^3 - 5x^2 + 4x + yx^2 - 5xy + 4y - 3x^2 + 15x - 12$$

$$= x^3 - 8x^2 + 19x + yx^2 - 5xy + 4y - 12$$

3) $\left(\frac{2}{3}x - 1\right)\left(3 - \frac{1}{6}x\right)$

$$= 2x - \frac{1}{9}x^2 - 3 + \frac{1}{6}x$$

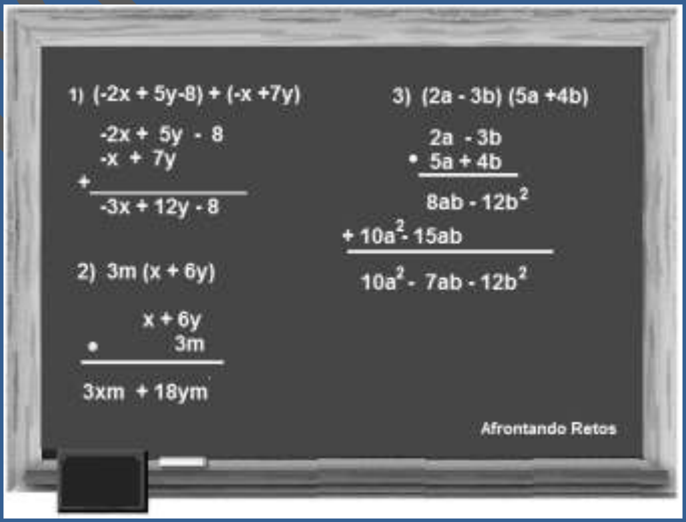
$$= -\frac{1}{9}x^2 + \frac{13x}{6} - 3$$

4) $(m + n)(m + n)$

$$= m^2 + mn + nm + n^2$$

$$= m^2 + 2mn + n^2$$

Otra forma de resolver operaciones algebraicas:



Productos Notables.

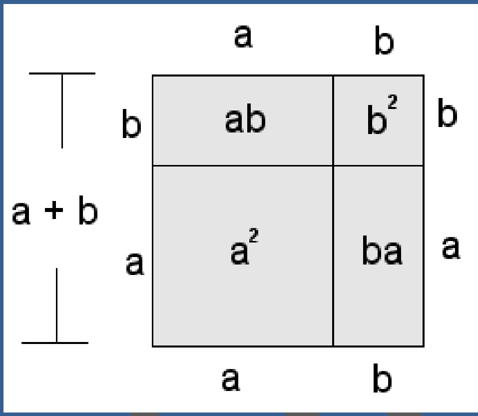
Existen algunos productos de polinomios que pueden ser resueltos de una manera más ágil, a los que llamamos productos notables.

Primer producto notable: El cuadrado de un binomio en suma.

Para efectuar la operación: $(a+b)^2$ se puede resolver $(a+b)(a+b)$. Así:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$$

Geométricamente se puede explicar como el área de un cuadrado de lado a + b



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primer término, más el doble del producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

Segundo producto notable: El cuadrado de un binomio en resta.

Si se procede de manera similar al primer producto notable, solo que con un binomio en resta, se tiene que:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-2ab+b^2$$

El cuadrado de la resta de dos términos es igual al cuadrado del primer término, menos el doble del producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

Tercer producto notable: Producto de binomios conjugados.

Dos binomios como a + b y a – b reciben el nombre de binomios conjugados, donde se tiene un término común (en este caso el "a") y términos simétricos (con diferente signo, como el b y – b).

El producto de ellos se resuelve:

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2 = a^2 - b^2$$

El producto de binomios conjugados, es una diferencia de cuadrados, entre el del término común con el de uno de los términos simétricos.

Ejemplos

1) $(2x+5y)^2$

$= (2x)^2 + 2\bullet 2x \bullet 5y + (5y)^2$

$= 4x^2 + 20xy + 25y^2$

2) $(6x - xy)^2$

$= (6x)^2 - 2\bullet 6x \bullet xy + (xy)^2$

$= 36x^2 - 12x^2y + x^2y^2$

3) $(7x^3-5)(7x^3+5)$

$= 7x^3 \bullet 7x^3 - 5 \bullet 5$

$= 49x^6 - 25$

4) $(-2a^2-7a)^2$

$= (-2a^2)^2 + 2\bullet - 2a^2 \bullet - 7a + (-7a)^2$

$= 4a^4 + 28a^3 + 49a^2$

5) $\left(\frac{2}{3}w - \frac{1}{5}h^6\right)^2$

$= \left(\frac{2}{3}w\right)^2 - 2\bullet \frac{2}{3}w \bullet \frac{1}{5}h^6 + \left(\frac{1}{5}h^6\right)^2$

$= \frac{4}{9}w^2 - \frac{4}{15}wh^6 + \frac{1}{25}h^{12}$

6) $\left(\frac{-2}{3}x+1\right)\left(-1+\frac{-2}{3}x\right)$

$= \frac{-2}{3}x \bullet \frac{-2}{3}x - 1 \bullet 1$

$= \frac{4}{9}x^2 - 1$

Operaciones combinadas con polinomios.

1) $3(a+2b)-2(a-3b)^2$

$$=3a+6b-2\left(a^2-6ab+9b^2\right)$$
$$=3a+6b-2a^2+12ab-18b^2$$

2) $(2x+y)(x+3)+5(x+y)(x-y)$

$$=2x^2+6x+yx+3y+5\left(x^2-y^2\right)$$
$$=2x^2+6x+yx+3y+5x^2-5y^2$$
$$=7x^2+6x+yx+3y-5y^2$$

3) $4\left(\dfrac{3a+b}{4}\right)^2-\left(b-\dfrac{a}{2}\right)\left(b+\dfrac{a}{2}\right)$

$$=\cancel{4}\left(\frac{9a^2+6ab+b^2}{\cancel{16}}\right)-\left(b^2-\frac{a^2}{4}\right)$$
$$=\frac{9a^2}{4}+\frac{6ab}{4}+\frac{b^2}{4}-b^2+\frac{a^2}{4}$$
$$=\frac{5}{2}a^2+\frac{3ab}{2}-\frac{3}{4}b^2$$

4) $(4x+5y)^2(2x-3y)-(2x-7y)^2$

$$=\left(16x^2+40xy+25y^2\right)(2x-3y)-\left(4x^2-28xy+49y^2\right)$$
$$=32x^3-48x^2y+80x^2y-120xy^2+50y^2x-75y^3-4x^2+28xy-49y^2$$
$$=32x^3+32x^2y-70xy^2-75y^3-4x^2+28xy-49y^2$$

Tiempo para practicar 3.5

Habilidades: Multiplicar polinomios
Utilizar productos notables para desarrollar expresiones algebraicas.

1. Resuelva las siguientes operaciones y simplifique al máximo

(a) $-3m^2(8m-mn)$ (b) $x\left(\frac{x^3}{2}-1\right)$ (c) $\left(ab^2-a^4\right)a^2b$

(d) $6d\left(\frac{d^2-2}{2}\right)$ (e) $\frac{w^3}{5}\left(xw-\frac{w^2}{3}-x\right)$ (f) $-p^2\left(p^5+p-p^4-5\right)$

(g) $\frac{2r^3}{7}\left(\frac{7r^3-2r-1}{5}\right)$ (h) $ah(a-h^2)h$ (i) $3y^3h^2(5h^4+4y^2h)$

(j) $\frac{-e}{2}\left(\frac{2e}{7}-e^9+6\right)$ (k) $3xy^2(5-y+x^5)$ (l) $\frac{-3ab^5}{2}\left(\frac{5b^2a^4}{9}+\frac{4ab^{-2}}{5}\right)$

2. Simplifique al máximo cada expresión

(a) $-5m^2(4m-3)-m\left(m^2-6m\right)$ (b) $3x^{n+1}\left(x^{2n}-5+x^3\right)$

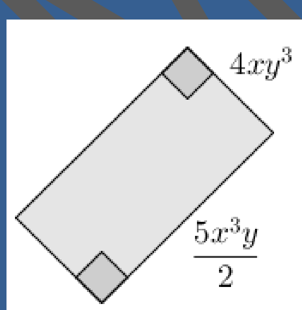
(c) $a(3-a-h)+h(6+a-h)$ (d) $y^{n+2m}\left(y^{2m-n}-y^{-6m}\right)$

(e) $x(x-y)-y(2y-x)+2\left(x^2-y^2\right)$ (f) $\frac{x}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)+y\left(\frac{y-5x}{6}\right)$

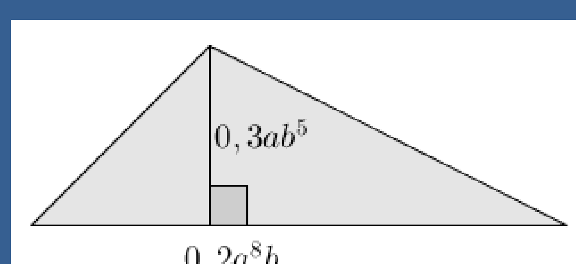
(g) $3+5\left(x^2-9\right)-x(4-9x)-\left(x^2-4xy\right)$ (h) $6a(b-2a)+2b-b(3b+1)$

3. Determine el área de cada polígono, según los datos proporcionados

(a)



(b)



4. Resuelva las siguientes operaciones y simplifique al máximo

(a) $\left(-2m^2+n\right)\left(3n-5m^2\right)$

(b) $\left(\frac{x^2}{3}-x\right)\left(x-3x^2\right)$

(c) $\left(\frac{-2b^2-3a}{5}\right)\left(\frac{2a^2-5b}{2}\right)$

(d) $(6d+1)(d+7)$

(e) $\left(w^7-h\right)\left(w-5h^3-3h\right)$

(f) $\left(p^2-7p-2\right)(p-5)$

(g) $(r-1)\left(r^2+r+1\right)$

(h) $-\left(a-2h^2\right)\left(2h^2+5a\right)$

(i) $\frac{x}{2}\left(2-\frac{1}{3}x\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

(j) $-2a^2\left(2a-5a^3\right)\left(a^3-3a\right)$

(k) $(7x-2)(2-3x)-(x+1)(2x+3)$

(l) $-\left(3a^3-a\right)\left(5a-a^3\right)+a^2(2a+9)$

(m) $\frac{1}{2}y^2(y-1)+\left(\frac{3y+2}{2}\right)\left(y^2-4\right)$

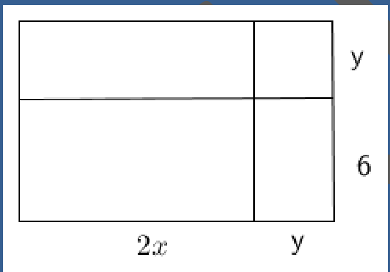
(n) $\left(h^2-5x^3\right)\left(-2x^3-7h^2\right)+\left(-9x^3h^2+7h^4\right)$

(ñ) $xy(5y-x)+(2x-y)(4y+x)$

(o) $\left(a-2b^2\right)(-5-b)+\left(-b^3+b\right)(2+a)$

5. Las diagonales de un rombo están dadas por: $2a^2-1$ y $5+a^2$ Determine el área de ese rombo.

6. Determine el área del rectángulo



7. Resuelva las siguientes operaciones.

(a) $(3x+7)^2$

(b) $(8m+5)^2$

(c) $\left(4h^7+9\right)^2$

(d) $(-y-11)^2$

(e) $(x+1)^2$

(f) $\left(\frac{x}{4}+9\right)^2$

(g) $4(3k+5)^2$

(h) $\left(\frac{3x+7}{4}\right)^2$

(i) $\left(7+\frac{3m}{5}\right)^2$

(j) $\left(3h^2+5h^4\right)^2$

(k) $\left(w^9+9w\right)^2$

(l) $\left(-7z^5-z^3\right)^2$

8. Resuelva las siguientes operaciones.

(a) $(5y-w)^2$ (b) $(9-k)^2$ (c) $(6y^8-y)^2$ (d) $(-x+8)^2$

(e) $(3p^2-1)^2$ (f) $\left(\frac{w}{7}-9\right)^2$ (g) $x(x-5)^2$ (h) $\left(\frac{9-y}{7}\right)^2$

(i) $\left(\frac{2}{5}-\frac{y^7}{4}\right)^2$ (j) $(a^6-10a^3)^2$ (k) $(-3x^7+2x)^2$ (l) $(-3yx^3+y^3)^2$

9. Resuelva las siguientes operaciones.

(a) $(3x-1)(3x+1)$ (b) $(6h+h^3)(6h-h^3)$ (c) $(5y^3-4)(5y^3+4)$

(d) $\left(\frac{7}{3}-k\right)\left(\frac{7}{3}+k\right)$ (e) $(8m+m^7)(8m-m^7)$ (f) $(-11-k)(-11+k)$

(g) $a(a-4)(a+4)$ (h) $\left(\frac{6-y}{3}\right)\left(\frac{6+y}{3}\right)$ (i) $\left(\frac{7+b}{2}\right)\left(\frac{7-b}{5}\right)$

10. Resuelva las siguientes operaciones. Simplifique al máximo

(a) $(h+n^3)^2$ (b) $(11x-y^4)(11x+y^4)$ (c) $(2b^2-7a)^2$

(d) $\left(\frac{d^2+7}{3}\right)^2$ (e) $(w^7-h)(h+w^7)$ (f) $(2p^2+3p)^2$

(g) $(-r-1)(1-r)$ (h) $\left(2h^2-\frac{5a}{2}\right)^2$ (i) $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}x\right)^2$

(j) $(a^3-3a)(a^3+3a)$ (k) $(5x^5-3x^3)^2$ (l) $\left(\frac{h^9}{3}+h\right)^2$

(m) $\left(\frac{k^3}{8}-2k\right)\left(\frac{k^3}{8}+2k\right)$ (n) $(-5c-7)^2$ (o) $(-7p+2)^2$

(p) $(ab-5)(ab-5)$ (q) $(-xy^3-x)(x-xy^3)$ (r) $\left[(6-m^3)(m^3+6)\right]^2$

(s) $3x^2(5x+6)^2$ (t) $-2y(4-5y)(5y+4)$

11. Simplifique al máximo cada expresión.

(a) $(2a+5b)(2a-5b)-(4a-b)^2$

(b) $3m(2m-n)+(m-n)(2n-3m)$

(c) $(2h-k)^2-5h(3k-h)+(5hk-k^2)$

(d) $3ab-(2a-b)^2+(3a+4b)(3a-4b)$

(e) $6(x-1)^2-(2x-3)(2x+3)+(x-2)(3+2x)$

(f) $5(x-7y)+(x-6y)(4x+9y)-y^2$

(g) $(2a^3-6)^2-(36-a^3)+4a(a^5-3)$

(h) $(-4y^5-5)(6+3y)-(3-y^3)^2$

12. Resuelva cada una de las siguientes operaciones. Simplifique al máximo

(a) $3h^3(-3h-4h^3)$

(b) $-5m^3\ (2mn^3+7n^5-1)$

(c) $-\dfrac{5}{2}x^3ym^3\left(\dfrac{-7}{4}m^5x^3-3xym^9\right)$

(d) $(-h^3-7h)(9h-7h^3)$

(e) $(2a^{13}-a^3)\ (-a^7+3b^{11})$

(f) $\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{4}{9}\right)\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{4x}{3}\right)$

(g) $6d^3(4-7d)(8d-7)$

(h) $-(6x-y)(8y-3x)$

(i) $(5y^2-4)(-6-y+3y^2)$

(j) $(3-5h^3)^2$

(k) $(5mn^3+4n^5)^2$

(l) $\left(\dfrac{-1}{4}m^5-3m\right)^2$

(m) $(-d^3+7d)^2$

(n) $(2a^{13}-12a^3)\ (2a^{13}+12a^3)$

(o) $\left(\dfrac{yx}{4}-y^6\right)\left(\dfrac{xy}{4}+y^6\right)$

RETO: Determine el valor de:

$$(x-a)^2\,(x-b)^2\,(x-c)^2\bullet\ \ldots\bullet(x-y)^2\,(x-z)^2$$

Rompecabezas polinomial

Al final del libro encontrará un rectángulo dividido en 9 piezas, cada una con expresiones algebraicas. Resuelva cada operación y escriba el resultado. Luego recorte las 9 piezas y vuelva a armar un rectángulo de modo que queden a la par expresiones equivalentes.

Se puede guiar con este ejemplo:

5 45 $6 \div 2$ 15	25 3 $8+1$ $7+3$	$6-6$ 9 -2 -1
$3 \bullet 5$ $8 \div 2$ $-3+3$ $15 \div 15$	10 0 49 $7-9$	$6-7$ 7^2 $6 \bullet 5$ $26 \div 2$
$1+0$ $6+9$ 3^2 34	-2 $6+3$ $9+1$ $18 \div 3$	13 10 3 2^3

Conocimiento: Ecuaciones

Escenario de aprendizaje

Acceso al celular.

Horacio fue a estudiar a la casa de Vicente y dejó olvidado su salveque con el celular. Lo llama desde su teléfono fijo pidiendo que por favor busque un contacto que tiene guardado en la memoria de dicho celular. Horacio le indica a Vicente que no recuerda el número de su pin, pero que en el salveque, a modo de seguridad, tiene un papel con una información que puede ayudarle a descifrarlo.

En el papel se halla la frase: *"Dos veces el número del pin aumentado en cincuenta es igual a 5700"*

Horacio le da otra pista a Vicente, le dice que el número de pin está entre 2820 y 2830 inclusive. Pero si digita 3 veces el pin incorrecto, el celular se bloquea

¿Cuál es el número del pin?

Hay diversas maneras de resolver este caso. Pero para ello es importante plantear algebraicamente lo que expresa el papel:

"Dos veces el número del pin aumentado en cincuenta es igual a 5700"

Podemos indicar el número del pin con alguna letra	Sea "n" el número del pin
Dos veces el número del pin	$2 \bullet n$
Dos veces el número del pin aumentado en cincuenta	$2 \bullet n + 50$
Dos veces el número del pin aumentado en cincuenta es igual a 5700	$2 \bullet n + 50 = 5700$

Esta igualdad entre expresiones algebraicas, en la cual se desconoce algún valor, recibe el nombre de **ecuación.**

Definición

Ecuación algebraica

Una ecuación algebraica es una igualdad de dos expresiones algebraicas; en las cuales hay uno o unos valores desconocidos a los que se les llama incógnitas o variables.

$$\overbrace{\underset{\downarrow}{2n} + \underbrace{50}_{\searrow}}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{\underbrace{5700}_{\swarrow}}^{\text{Segundo miembro}}$$

variable constantes

Método 1: Hacer pruebas

Vicente puede probar los números que están entre 2820 y 2830, inclusive, para determinar cuál valor cumple con la igualdad que ha quedado expresada. Pero esto no lo puede hacer directamente en el celular, ya que existe la posibilidad de que este quede bloqueado. Una posibilidad es construir una tabla en Excel para obtener el resultado correcto:

- Coloque los valores del 2820 al 2830 en una columna.
- Escriba en otra columna la fórmula 2•n + 50
- “Arrastre” esa fórmula en el resto de filas, de modo que se copie la fórmula.
- Verifique cuál fila tiene como resultado 5700.

Portapapeles Fuente
POTENCIA =2*A2+50

	A	B	C
1	Posible pin	Resultado	
2	2820	=2*A2+50	
3	2821		
4	2822		
5	2823		
6	2824		
7	2825		
8	2826		
9	2827		
10	2828		
11	2829		
12	2830		

Portapapeles Fuente
B2 =2*A2+50

	A	B	C
1	Posible pin	Resultado	
2	2820	5690	
3	2821	5692	
4	2822	5694	
5	2823	5696	
6	2824	5698	
7	2825	5700	
8	2826	5702	
9	2827	5704	
10	2828	5706	
11	2829	5708	
12	2830	5710	

Portapapeles
G4

	A	B
1	Posible pin	Resultado
2	2820	5690
3	2821	5692
4	2822	5694
5	2823	5696
6	2824	5698
7	**2825**	**5700**
8	2826	5702
9	2827	5704
10	2828	5706
11	2829	5708
12	2830	5710

Realmente, lo que Vicente hizo fue probar cuál de los valores (del 2820 al 2830) correspondía a la **solución de la ecuación**, esto es, el número que cumple la igualdad. En este caso, se concluye que el número del pin debe ser 2825.

Lo que se ha hecho con ayuda del Excel es aplicar el valor numérico:

$$2 \bullet 2825 + 50 = 5700$$

Definición

Conjunto solución de una ecuación

Se le llama conjunto solución de una ecuación, al conjunto de números o valores que hacen que la igualdad se cumpla.

Método 2: Resolver algebraicamente.

Para Vicente fue fácil buscar, mediante "tanteo", el número que cumplía la igualdad, puesto que tenía una pista: la solución estaba entre 2820 y 2830, inclusive. Pero si no supiera esto, sería poco factible probar con todas las posibilidades que se tiene para un pin (0000 a 9999).

Es por esto, que resulta importante conocer el proceso algebraico para resolver ecuaciones, mediante la aplicación de las operaciones inversas.

Cualquier valor de una ecuación se puede trasladar de un miembro al otro, para lo cual se efectúa la operación inversa; es decir:

- ☑ Si el valor está sumando; pasa al otro miembro de la ecuación a restar
- ☑ Si el valor está restando; pasa al otro miembro de la ecuación a sumar
- ☑ Si el valor está multiplicando; pasa al otro miembro de la ecuación a dividir
- ☑ Si el valor está dividiendo; pasa al otro miembro de la ecuación a multiplicar

Al resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, es conveniente reunir las variables o incógnitas a un mismo miembro de la ecuación, y las constantes al otro.

(1) $2 \bullet n + 50 = 5700$

Se aplica la operación inversa de la suma: la resta

(2) $2 \bullet n = 5700 - 50$

(3) $2 \bullet n = 5650$

Se aplica la operación inversa de la multiplicación: la división

$n = 5650 \div 2$

$n = 2825$

Las tres expresiones numeradas, corresponden a **ecuaciones equivalentes**, puesto que tienen la misma solución.

Ejemplos

1. El índice de masa corporal es utilizado para evaluar si una persona padece de obesidad o no. Si el índice es mayor a 25, se considera con sobrepeso. Para ello, se relacionan la masa y la estatura de las personas.

La fórmula que lo determina es:

$$I = \frac{M}{E^2} \qquad \text{M: masa en kg} \qquad \text{E: estatura en m}$$

Una persona tiene una estatura de 1,6m y desea mantener su índice en 25, para no tener sobrepeso. ¿Cuál debe ser su masa corporal?

En este caso se plantea y resuelve la ecuación de la siguiente manera:

$$25 = \frac{M}{1{,}6^2}$$

$$25 = \frac{M}{2{,}56}$$

Se aplica la operación inversa de la división: la multiplicación

$$25 \bullet 2{,}56 = M$$

$$64 = M$$

2. El perímetro de la cancha del Estadio Nacional de Costa Rica es de 346 m. Si la medida del ancho es de 68m, ¿cuánto mide el largo?

El perímetro de un rectángulo está dado por la fórmula $P = 2\ell + 2a$

Al reemplazar los datos se tiene:

$$346 = 2\ell + 2\bullet 68$$

$$346 = 2\ell + 136$$

Se aplica la resta

$$346 - 136 = 2\ell$$

$$210 = 2\ell$$

Se aplica la división

$$210 \div 2 = \ell$$

$$105 = \ell$$

Por lo tanto, la medida del largo de la cancha del Estadio Nacional es de 105m.

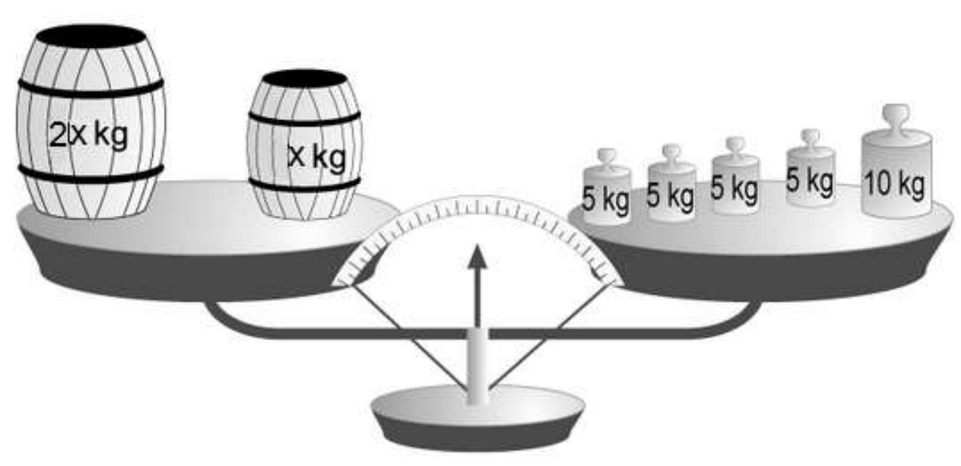
Si se desea comprobar que efectivamente la medida del largo debe ser 105 metros, basta con reemplazar en la ecuación original:

$$346 = 2\bullet 105 + 2\bullet 68$$

$$346 = 346$$

Como la igualdad se cumple, entonces 105 es solución de la ecuación.

3. Una balanza está equilibrada, tal como lo muestra la figura. Determine la masa en kg de cada uno de los barriles que están en el plato izquierdo



Se plantea y resuelve la ecuación:

$$2x + x = 5 + 5 + 5 + 5 + 10$$

Se suma términos semejantes

$$3x = 30$$

Se aplica la operación inversa de la multiplicación: la división

$$x = \frac{30}{3} = 10$$

El barril de 2x kg tiene una masa de 2•10 = 20kg, el otro de 10kg. En efecto, los dos juntos tienen una masa de 30kg.

4. Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

$(a)\ 3x + 6 = 10$

$$3x = 10 - 6$$
$$3x = 4$$
$$x = \frac{4}{3} \qquad S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

$(d)\ 7x - 6 = 1 + 2x$

$$7x - 2x = 1 + 6$$
$$5x = 7$$
$$x = \frac{7}{5} \qquad S = \left\{\frac{7}{5}\right\}$$

$(b)\ -x + 2 = \frac{5}{3}$

$$-x = \frac{5}{3} - 2$$
$$-x = \frac{-1}{3}$$
$$x = \frac{\frac{-1}{3}}{-1}$$
$$x = \frac{1}{3}$$
$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$(c)\ \frac{-3x}{4} = 2$

$$-3x = 2 \bullet 4$$
$$-3x = 8$$
$$x = \frac{8}{-3}$$
$$x = \frac{-8}{3}$$
$$S = \left\{\frac{-8}{3}\right\}$$

Hay casos en los que aparecen operaciones con polinomios en la ecuación. Estas se resuelven según lo aprendido en los contenidos anteriores.

$e)\ -6x - (2 - 4x) = -3$

$$-6x + -2 + 4x = -3$$
$$-2x - 2 = -3$$
$$-2x = -3 + 2$$
$$-2x = -1$$
$$x = \frac{-1}{-2}$$
$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$f)\ 3a - (-2a + 5) = -5a + (3 - a)$

$$3a + 2a - 5 = -5a + 3 - a$$
$$5a - 5 = -6a + 3$$
$$5a + 6a = 3 + 5$$
$$11a = 8$$
$$a = \frac{8}{11}$$
$$S = \left\{\frac{8}{11}\right\}$$

$$g)\ 7(3x-2)=-4(2-6x)$$
$$21x-14=-8+24x$$
$$21x-24x=-8+14$$
$$-3x=6$$
$$x=\frac{6}{-3}$$
$$x=-2$$
$$S=\{-2\}$$

$$h)\ \frac{x}{5}-3=\frac{2}{3}$$
$$\frac{x}{5}=\frac{2}{3}+3$$
$$\frac{x}{5}=\frac{2}{3}+\frac{9}{3}$$
$$\frac{x}{5}=\frac{11}{3}$$
$$x=\frac{11}{3}\bullet 5$$
$$x=\frac{55}{3}\qquad S=\left\{\frac{55}{3}\right\}$$

$$i)\ \frac{3x-1}{4}-\frac{2x-1}{5}=\frac{1}{2}x-\frac{13}{20}$$

Para resolver esta ecuación es conviene sacar el mcm de los denominadores, que es 20. Luego se hace el proceso de homogenización:

$$\frac{5(3x-1)-4(2x-1)}{20}=\frac{10x-13}{20}$$

Se pueden eliminar los denominadores (¿por qué?) y así se trabaja solo con los numeradores:

$$5(3x-1)-4(2x-1)=10x-13$$
$$15x-5-8x+4=10x-13$$
$$15x-8x-10x=-13+5-4$$
$$-3x=-12$$
$$x=\frac{-12}{-3}\qquad S=\{4\}$$

Definiciones

Identidad algebraica

Una identidad algebraica, es aquella ecuación que es verdadera para cualquier valor.

Solución vacía

Se dice que el conjunto solución de una ecuación es vacío, si no existe ningún valor que satisfaga la igualdad.

Ejemplos

Determine el conjunto solución de:

$(a)\ 2(2x-1)+2=4x$

$$4x-2+2=4x$$
$$4x-4x+0=0$$
$$0=0 \qquad S=\mathbb{Q}$$

Corresponde a una identidad

De hecho, si planteamos la ecuación equivalente $2(2x-1)+2-4x=0$ en Excel, nos daremos cuenta que todo valor cumple la igualdad.

B1 =2*(2*A1-1)+2-4*A1

A	B	C	D
-3	0		
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			
4			

B8 =2*(2*A8-1)+2-4*A8

A	B	C	D
-3	0		
-2	0		
-1	0		
0	0		
1	0		
2	0		
3	0		
4	0		

$(b)\ 3x-5x+2=-2x+7$

$$3x-5x+2x=7-2$$
$$0=5$$

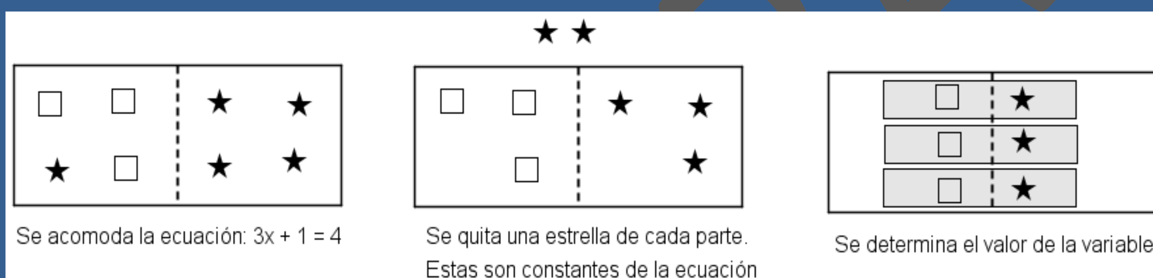
Es evidente que hemos llegado a una **igualdad falsa**, puesto que $0\neq 5$, por tanto la ecuación no tiene solución. Esto se expresa: S = ϕ o bien S = { }

Método del dominó

Un método que nos ayuda a comprender y visualizar el proceso que se lleva a cabo al resolver una ecuación, es el método del dominó. Esto es plantear la ecuación en una ficha de dominó, donde cada parte de la pieza representa un miembro de la ecuación. Se escoge dos símbolos, uno para las variables y otro para las constantes.
Veamos:

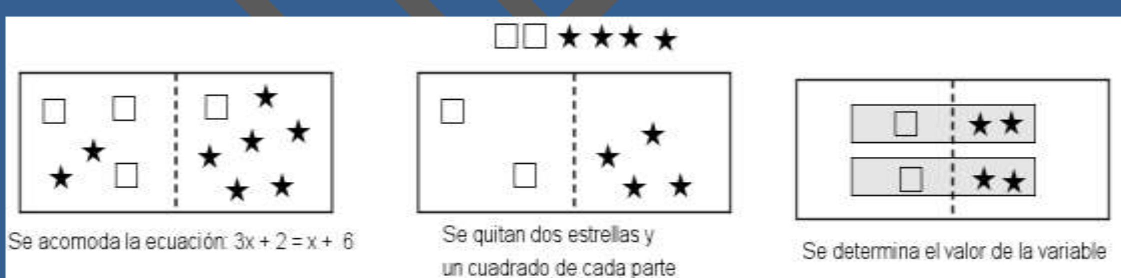
$$(a)\quad 3x+1=4$$

Representamos con □ a la variable (la equis) y con ★ a la constante (tiene el valor de 1)



Se concluye que □ = ★, es decir, x = 1

$$(b)\quad 3x+2=x+6$$



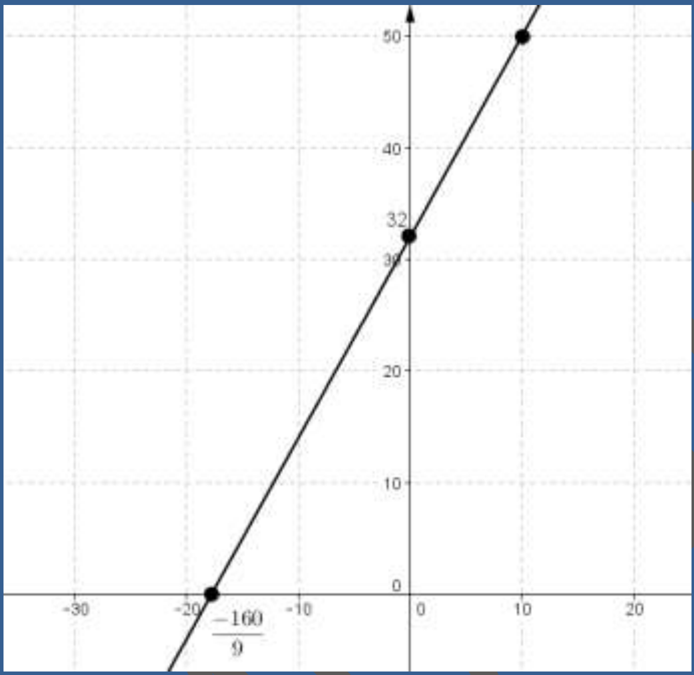
Se concluye que □ = ★★, es decir, x = 2

Raíz de una ecuación

Considere el siguiente caso:

La conversión de grados Celsius a Fahrenheit, está modelada mediante la función lineal: $y = 1{,}8x + 32$, donde "x" representa la medida en grados Celsius.

Esta función, tiene por gráfica:



(a) ¿A cuántos grados Celsius equivalen 50 grados Fahrenheit?

Para dar respuesta, se establece la ecuación: $1{,}8x + 32 = 50$.

Determinar el valor de "x" es encontrar la **raíz de esta ecuación**.

La gráfica adjunta, muestra cuál es ese valor: 10°C

Realicemos ahora el cálculo algebraico:

$1{,}8x + 32 = 50 \Rightarrow 1{,}8x = 50 - 32 \Rightarrow 1{,}8\,x = 18 \Rightarrow x = 18 \div 1{,}8 \Rightarrow x = 10.$

De este modo, encontrar la raíz de $1{,}8x + 32 = 50$, es determinar el valor de la variable independiente en $y = 1{,}8x + 32$, cuando $y = 50$.

(b) ¿A cuántos grados Celsius equivalen 0 grados Fahrenheit?

Se procede a resolver la ecuación $1{,}8x + 32 = 0$, lo cual equivale a encontrar el punto de intersección con el eje "x" de la función $y = 1{,}8x + 32$.

$$1{,}8x + 32 = 0$$
$$1{,}8x = 0 - 32$$
$$x = -32 \div 1{,}8 \Rightarrow x = \frac{-160}{9}$$

A este valor, se le conoce como **cero de la función.**

Definiciones

Raíz de una ecuación

La solución de la ecuación ax + b = c recibe el nombre de raíz de la ecuación. Determinar este valor equivale a resolver y = ax + b cuando y = c.

Ceros de una función

La solución de la ecuación ax + b = 0 recibe el nombre de cero de la función y = ax + b

Ecuaciones fraccionarias algebraicas

Considere el siguiente caso:

Por cada dos toneladas de papel que se recicle, se salvan 34 árboles. Si en un colegio en cierto período los estudiantes lograron recolectar 10 toneladas de papel, ¿cuántos árboles se salvaron en dicho período?

Tal como se aprendió en sétimo nivel, la situación planteada se puede expresar así:

$$\frac{2 \text{ toneladas}}{34 \text{ árboles}} = \frac{10 \text{ toneladas}}{x \text{ árboles}}$$

De este modo, para determinar cuántos árboles fueron salvados al reciclar 10 toneladas de papel, basta con resolver la siguiente regla de tres:

$$\frac{2}{34} = \frac{10}{x}$$

El procedimiento que se utiliza es multiplicar en equis y mantener la igualdad:

$$2 \bullet x = 34 \bullet 10$$
$$2x = 340$$

Y se despeja la “x”

$$x = \frac{340}{2} = 170 \text{ árboles}$$

Esta ecuación planteada mediante la regla de tres, se llama **fraccionaria algebraica** porque tiene **literales en el denominador** de al menos uno de los miembros de la igualdad. Para resolver este tipo de ecuaciones, se procede a multiplicar en equis y usar los procesos previamente aprendidos sobre resolución de ecuaciones.

Como la incógnita está en el denominador, es necesario verificar que esta **no indefina** la fracción, es decir, que la solución **no haga cero al denominador**.

En el ejemplo anterior, $x \neq 0$

Ejemplos

Determine el conjunto solución de

1) $\dfrac{5x}{3x-5} = 3$

Restricción

$3x - 5 \neq 0$

$x \neq \dfrac{5}{3}$

$5x \cdot 1 = 3 \cdot (3x-5)$	Al multiplicar en equis
$5x = 9x - 15$	Al efectuar la multiplicación
$5x - 9x = -15$	Al agrupar las variables y las constantes
$-4x = -15$	
$x = \dfrac{-15}{-4} = \dfrac{15}{4}$	

Ahora bien, en este tipo de ecuaciones, es necesario determinar las restricciones, y comprobar que el valor de "x" sea diferente a estas. La restricción es

La restricción es $\dfrac{5}{3}$ y la el valor de "x" es $\dfrac{5}{4}$. Por tanto $\dfrac{5}{4}$ sí es solución.

Se concluye que $S = \left\{\dfrac{15}{4}\right\}$

2) $\dfrac{-2}{x-3} = \dfrac{5}{2x-1}$

Restricciones

$x - 3 \neq 0 \qquad 2x - 1 \neq 0$

$x \neq 3 \qquad x \neq \dfrac{1}{2}$

$$-2(2x-1) = 5(x-3)$$
$$-4x + 2 = 5x - 15$$
$$-4x - 5x = -15 - 2$$
$$-9x = -17$$
$$x = \frac{-17}{-9} = \frac{17}{9}$$

Como $\dfrac{17}{9}$ no es parte de las restricciones, $S = \left\{\dfrac{17}{9}\right\}$

3) $\frac{1}{x-1}=\frac{4}{2x-2}$

$$4(x-1)=1(2x-2)$$
$$4x-4=2x-2$$
$$4x-2x=-2+4$$
$$2x=2$$
$$x=\frac{2}{2}=1$$

Restricciones

$x-1\neq 0$ $\qquad$ $2x-2\neq 0$

$x\neq 1$ $\qquad$ $x\neq \frac{2}{2},\quad x\neq 1$

Note que el valor de "x" es igual a la restricción, por tanto indefine las fracciones. Se concluye que el conjunto solución es vacío. S = { }

Conocimiento: Lenguaje algebraico y resolución de problemas

Escenario de aprendizaje

¿Magia o Matemática?

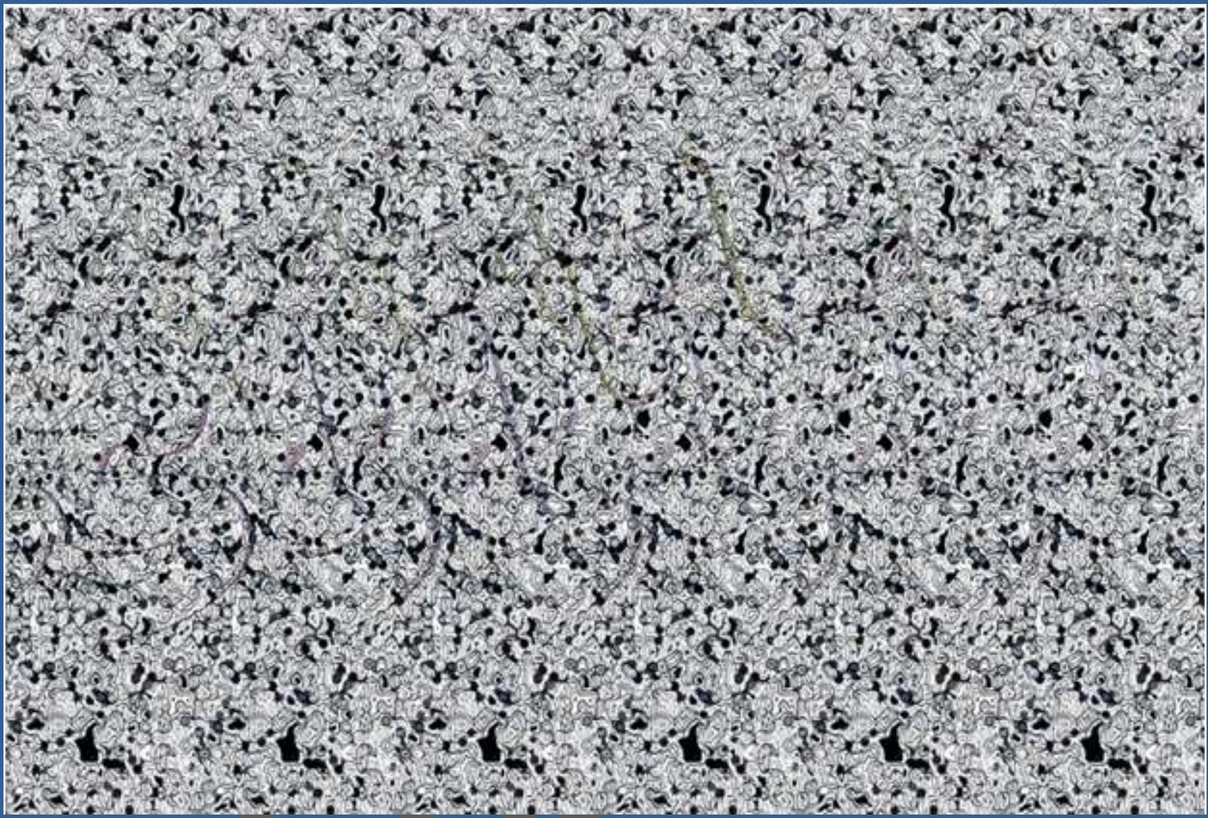
Piense un número

- ☑ Multiplíquelo por 2
- ☑ A lo que obtuvo súmele 9
- ☑ Al resultado súmele el número que pensaste
- ☑ El resultado anterior divídalo entre 3
- ☑ A lo que quedó súmele 4
- ☑ Al resultado, réstele el número que pensaste

Ese resultado es ____________________

Independientemente del número que se piense, el resultado siempre será el mismo.

En el siguiente estereograma está la respuesta:



¿Por qué esto siempre funciona, sin importar el número pensado?

No existe magia alguna en este caso, es solo una elaboración algebraica. Para ello, representemos cada frase de modo simbólico:

☑	Piense un número	x
☑	Multiplícalo por 2	2x
☑	A lo que obtuvo súmele 9	2x + 9
☑	Al resultado súmele el número que pensaste	2x +9 + x = 3x +9
☑	El resultado anterior divídelo entre 3	$\frac{\cancel{3}x+\cancel{9}}{\cancel{3}}=x+3$
☑	A lo que quedó súmele 4	x + 3 +4 = x + 7
☑	Al resultado, réstele el número que pensaste	x + 7 – x = 7

Usar un lenguaje algebraico agiliza la resolución de diversos problemas, es por esta razón, que estudiaremos algunas frases, las cuales serán de utilidad.

Lenguaje cotidiano	Lenguaje algebraico
El número n aumentado en 3	$n + 3$
El número n disminuido en 4	$n - 4$
El número n disminuido de 4	$4 - n$
El duplo (doble) de un número x	$2x$
El triple de un número m	$3m$
La mitad de un número x	$\frac{x}{2}$
Las tres cuartas partes de un número z	$\frac{3z}{4}$
El cuadrado de un número n	n^2
El cuádruplo de un número aumentado en cinco	$4x + 5$
Si una persona tiene t años, su edad dentro de cinco años la representamos	$t + 5$
Si una persona tiene t años, su edad hace cuatro años la representamos	$t - 4$
Tres números enteros consecutivos, x el primero	$x, x+1, x+2$
Un número par	$2x$
Un número impar	$2x+1$
Dos números pares consecutivos	$2x, 2x+2$
El 15% de un número “n”	$0{,}15n$
El cubo de un número “h”	h^3
La raíz quinta de un número “x” disminuida de siete	$7 - \sqrt[5]{x}$
El triple de: un número disminuido en su quinta parte.	$3\left(x - \frac{x}{5}\right)$
La tercera parte de: un número “x” aumentado en cuatro	$\frac{1}{3}(x+4)$ $= \frac{x+4}{3}$

Resolución de problemas mediante ecuaciones lineales

Problema 1 La edad de Hilarión aumentada en cinco, equivale al triple de su edad disminuida en siete. ¿Cuál es la edad de Hilarión?

Datos	Resolución de la ecuación	Respuesta
x = edad de Hilarión	$5 + 7 = 3x - x$ $12 = 2x$ $x = 12 \div 2 = 6$	Hilarión tiene 6 años.
Planteo de la ecuación		
$x + 5 = 3x - 7$		

Problema 2 Suponga que para una feria científica confeccionan varios panfletos con material de desecho, unos sobre la importancia del consumo de frutas y otros sobre los daños que causa el fumado. Tres de tus compañeros cuentan los panfletos y te indican que hay 40. Uno de ellos te informa que la diferencia entre la cantidad de panfletos sobre el consumo de frutas respecto a los relacionados con los daños del fumado es de 8 y hay más panfletos de fumado ¿Cuántos panfletos hay de cada tipo?

Datos	Resolución de la ecuación	Respuesta
x = panfletos sobre fumado x – 8 = panfletos sobre consumo de frutas	$x + x - 8 = 40$ $2x = 40 + 8$ $2x = 48$ $x = 24$	Hay 24 panfletos sobre el fumado y 16 sobre consumo de frutas
Planteo de la ecuación		
$x + x - 8 = 40$		

Problema 3 Gertrudis tiene 25 años. Sus primas Juana y Roberta son muy allegadas a ella. La edad de Juana es el triple de la edad de Roberta. La resta de las edades de Juana y Roberta es de 48 años. ¿Cuál es la edad de Juana?

Datos	Resolución de la ecuación	Respuesta
x = edad de Roberta 3x = edad de Juana	$3x - x = 48$ $2x = 48$ $x = 24$	La edad de Juana es de 72 años
Planteo de la ecuación		
$3x - x = 48$		

Problema 4 En Costa Rica, la calles tienen numeración impar y las avenidas par. Gandolfo tiene un local entre dos calles de San José. La suma de los números de esas calles es 20. ¿Entre cuáles calles tiene Gandolfo el local?

Datos	Resolución de la ecuación	Respuesta
2x + 1 = una calle 2x +3 = la otra calle	$2x + 1 + 2x + 3 = 20$ $4x = 20-4$ $x = 16 \div 4$ $x = 4$ $2x + 1 = 2 \bullet 4 + 1 = 9$	El local está entre las calles 9 y 11
Planteo de la ecuación		
$2x + 1 + 2x + 3 = 20$		

Problema 5 En un rectángulo, la medida del largo excede en 2 al triple del ancho. El perímetro del rectángulo es de 100cm. Determine la medida del largo.

Datos	Resolución de la ecuación	Respuesta
x: ancho 3x +2: largo	$3x + 2 + 3x + 2 + x + x = 100$ $8x = 100 - 4$ $x = \frac{96}{8} \quad x = 12$ $\text{Largo}: 3 \bullet 12 + 2 = 38$	La medida del largo es de 38cm
Planteo de la ecuación		
$3x + 2 + 3x + 2 + x + x = 100$		

Problema 6 Un estudiante está inquieto por conocer la edad de su profesor de Matemática. Este le indica que nunca dice la edad a nadie, pero que sí le puede dar una pista para que la logre determinar: Mi hermano (le dice el profesor) tiene el doble de mi edad aumentado en diez. Hace ocho años su edad era el triple de la mía disminuida en cinco. ¿Cuál es la edad del profesor?

Datos	Planteo de la ecuación	Respuesta
x = edad actual del profesor 2x + 10 = edad actual del hermano del profesor x – 8 = edad del profesor hace 8 años 2x + 2 = edad del hermano hace 8 años	$2x + 2 = 3(x - 8) - 5$ **Resolución de la ecuación** $2x + 2 = 3(x - 8) - 5$ $2x + 2 = 3x - 24 - 5$ $31 = x$	La edad del profesor es de 31 años

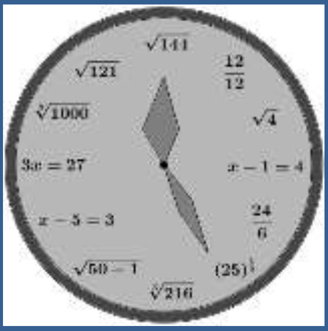
Problema 7 Como respuesta a la crisis económica, una familia ha decidido hacer su propia granja. Poco a poco ha crecido el número de animales que tienen y con ello los recursos económicos. Actualmente hay gallinas, patos y cabras. El número de patos es la mitad del número de gallinas y el doble del número de cabras. Si en total hay 84 animales, entonces ¿cuántas cabras hay en la granja?

Datos	Resolución de la ecuación	Respuesta
x = número de gallinas $\frac{x}{2}$ = número de patos $\frac{x}{4}$ = número de las cabras	$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=84$ $\frac{7x}{4}=84$ $x=84\div\frac{7}{4}$ $x=48$	Hay 12 cabras en la granja
Planteo de la ecuación		
$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=84$		

Problema 8 Un joven estudiante, interesado en ahorrar dinero, guarda un poco de lo que recibe de sus padres. Hasta el momento tiene billetes de dos denominaciones, de ₡ 1000 y ₡ 2000. Entre todos tiene 35 billetes. Ya ha logrado ahorrar ₡ 60 000. ¿Cuántos billetes de ₡ 1000 y ₡ 2000 tiene el estudiante?

Datos	Planteo de la ecuación	Respuesta
x = cantidad de billetes de ₡1000 35 – x = cantidad de billetes de ₡2000 1000 x= dinero total en billetes de ₡1000 2000(35 – x) = dinero total en billetes de ₡2000	1000 x + 2000(35 – x) = 60 000 **Resolución de la ecuación** 1000 x + 2000(35 – x) = 60 000 1000x + 70 000 – 2000x = 60000 -1000x = -10000 x= 10	El estudiante tiene 10 billetes de ₡1000 y 25 de ₡2000

Tiempo para practicar 3.6



Habilidades:
Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.
Resolver ecuaciones algebraicas fraccionarias que se reducen a ecuaciones de primer grado con una incógnita.
Resolver ecuaciones literales para una de las letras
Relacionar una ecuación de primer grado con una incógnita de la forma ax + b = c con la función lineal cuya representación algebraica es y = ax + b.

1. Determine en cada caso el conjunto solución

(a) $5x=75$ (b) $x-3=9$ (c) $m+6=-8$

(d) $\frac{x}{15}=-2$ (e) $7-x=11$ (f) $45=-15x$

(g) $-3=-2+a$ (h) $-3y=17$ (i) $-\frac{x}{6}=11$

(j) $\frac{4}{7}+x=3$ (k) $\frac{2}{3}x=-1$ (l) $\frac{1}{6}-x=-2$

2. Determine en cada caso el conjunto solución

(a) $9x-2=61$ (b) $x-2=\frac{-10}{7}$ (c) $\frac{11}{6}x=2$

(d) $2x-1=-1$ (e) $x-7=9$ (f) $x-11=-4$

(g) $2a-3=2$ (h) $5-3y=12$ (i) $3-\frac{x}{2}=5$

(j) $\frac{4}{7}+5x=3$ (k) $\frac{7-x}{8}=-7$ (l) $7x-2=5x-1+2x$

(m) $\frac{2}{3}-x=\frac{-3}{2}$ (n) $3x-5+x=-8x+9$ (ñ) $-5x-4=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{3}$

(o) $2-7x=x-6+{}^{-}2x$ (p) $-0,3x-3=0,2+x$ (q) $2,5x=3x-3,4$

3. Determine en cada caso el conjunto solución

(a) $-2-(x-2)=4$ (b) $-(4y-5)=6+(3+y)$

(c) $6(-3-5x)=-3$ (d) $x=-2(-1+6x)$

(e) $4-9(2x-1)=2-x$ (f) $11-(-x+4)=-5(x+4)$

(g) $\frac{-3}{5}(2-x)=-\left(6-\frac{x}{2}\right)$ (h) $4(x-3)-x=3x+9$

(i) $\frac{2(5-x)}{7}=-2$ (j) $(3-2x)(x+2)=-2x(x+1)$

(k) $(5x-4)(5x+4)=25x^2-(x+1)$ (l) $(4-3x)^2-4x^2=5x(x+9)$

(m) $x(x-1)-5=(x-3)^2$ (n) $-5-3(x-1)=-x-2(x+1)$

4. Determine en cada caso el conjunto solución

(a) $\frac{7x-2}{3}=\frac{1}{2}-\frac{x}{5}$

(b) $1-\frac{2x+6}{7}=\frac{x-1}{14}$

(c) $\frac{4}{5}(x-2)=\frac{9-x}{10}$

(d) $\frac{1}{3}+\frac{4+x}{6}=\frac{5x}{2}$

(e) $\frac{7x-11}{2}=\frac{-1+3x}{4}-\frac{1}{2}$

(f) $\frac{3-(x-2)}{10}=-\frac{2}{5}-x$

(g) $-4y-\frac{3-6y}{4}=\frac{y+2}{8}$

(h) $\frac{x-2}{3}+\frac{x-1}{2}=3x-(x-1)+6$

(i) $\frac{3(x-5)}{2}-1=\frac{2(x-2)+3}{3}$

(j) $6-\frac{2(2-x)}{5}=1$

5. Determine en cada caso el conjunto solución

(a) $\frac{6}{2x+9}=\frac{1}{2}$

(b) $\frac{9x+1}{7-x}=\frac{4}{3}$

(c) $\frac{-3}{4x-1}=\frac{2}{2x+7}$

(d) $\frac{-2}{x}=\frac{11}{x-2}$

(e) $\frac{6}{x}=\frac{1}{5}$

(f) $\frac{-5}{4x+8}=\frac{2}{x+2}$

(g) $-\frac{6}{5}=\frac{x-3}{5x}$

(h) $\frac{5x-5}{x-1}=\frac{3}{7}$

(i) $\frac{4+x}{3-(x+1)}=\frac{-2}{3}$

(j) $-\frac{2-x}{x+2}=4$

6. Determine el cero de cada función lineal.

(a) $y=5x$

(b) $y=x-6$

(c) $y=-x+7$

(d) $y=6x-11$

(e) $y=-2x+\frac{1}{5}$

(f) $y=\frac{1-7x}{3}$

(g) $y=-\frac{2}{7}x+-1$

(h) $y=\frac{x}{2}+-\frac{1}{3}$

7. Determine en cada caso la raíz de la ecuación ax +b = c. Grafique la función lineal y = ax +b y ubique dicha raíz.

(a) $x+2=3$

(b) $2x+3=-1$

(c) $4-x=5$

(d) $x-5=4$

8. Despeje la variable que se le indica en cada caso.

(a) $y = mx + b$ Despeje b

(b) $\frac{b \bullet h}{2} = A$ Despeje h

(c) $\frac{(B+b) \bullet h}{2} = A$ Despeje B

(d) $2b + 2h = P$ Despeje b

Habilidades: Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita

9. El perímetro de un cuadrado es de $\frac{22}{3} cm$. Determine la longitud del lado.

10. El área de un triángulo es de $24dm^2$. Si la base mide 8cm, ¿cuál es la longitud de la altura que cae sobre dicha base?

11. Para convertir de libras a kilogramos, se puede usar la siguiente fórmula: K = 0,45359237x, donde “x” es el número de libras. Un joven de octavo nivel tiene una masa de 48 kilogramos, ¿a cuántas libras equivale?

12. Para determinar la distancia, se usa la relación $d = v \bullet t$. Si un automóvil viaja a una velocidad de 60km/h, ¿cuánto tiempo necesita para recorrer 180km?

13. Una empresa de electricidad establece el cobro a los domicilios de la siguiente manera:

- ₡120 por cada kWh
- ₡3,30 por cada kWh como concepto de alumbrado público
- 5% de impuesto de venta, solo del primer punto.

A modo de ejemplo, si en un hogar se consumen 125 kWh, el monto a pagar se calcula:

- ₡120 • 125 = ₡15 000
- ₡3,30 • 125 = ₡412, 5
- Se saca el 5% de ₡15 000: 15 000 • 0,05 = ₡750
- Monto total: ₡15 000 + ₡412, 5 + ₡750 = ₡16 162,5

Si en un hogar pagaron ₡ 20 688, ¿cuántos kWh consumió?

14. En un rombo la longitud de la diagonal menor mide 3, la mayor 4x – 5. Si el área es de $\frac{61}{2}$, ¿Cuál es el valor de x?

15. El triple de un número aumentado en once, equivale al mismo número disminuido de nueve". ¿Cuál es el número? Si "x" representa el número, una ecuación que permite resolver el problema corresponde a

(A) $x^3 + 11 = x - 9$

(B) $3x + 11 = x - 9$

(C) $x^3 + 11 = 9 - x$

(D) $3x + 11 = 9 - x$

16. "En un colegio de Limón, el número de docentes varones respecto al número de docentes mujeres, está en relación 2: 3. En total hay 55 docentes. ¿Cuántos docentes varones hay?" Una ecuación que permite resolver el problema corresponde a

(A) $2x = 55 - 3x$

(B) $2 \bullet 3x = 55$

(C) $\frac{2}{3}x = 55$

(D) $2x - 3x = 55$

17. El nueve por ciento del valor de un artículo equivale a dos mil seiscientos cincuenta. ¿Cuál es el valor del artículo? Si "x" representa el valor del artículo, una ecuación que permite resolver el problema

(A) $\frac{9}{10}x = 2\ 650$

(B) $0,09x = 2\ 650$

(C) $900x = 2650$

(D) $0,9x = 2\ 650$

18. "En la librería de un colegio de Guanacaste hay a la venta 30 lapiceros, entre tinta negra y azul. El número de lapiceros de tinta negra es el doble del número de tinta azul". ¿Cuántos lapiceros de cada color hay? Si "x" representa el número de lapiceros de tinta azul, una ecuación que permite resolver el problema corresponde a

(A) $x + 2x = 30$

(B) $x^2 + 2x = 30$

(C) $x = 30 + 2x$

(D) $2x - 30 = x$

19. La suma de dos números es 49 y su diferencia 19. ¿Cuál es el número mayor? Si "x" representa el número mayor, una ecuación que permite resolver el problema corresponde a

(A) $x+x+49=19$ (B) $x+x+19=49$

(C) $x+x-19=49$ (D) $19-x+x=49$

20. Primer bloque de problemas.

(a) En un grupo secreto existe la sospecha de que un espía desea penetrar la organización. Saben que ese espía tiene debilidades en Matemática, por lo que a cada nuevo integrante le solicitan responder un acertijo. Llega una persona y le dicen que determine un número, para lo cual le dan la siguiente pista: el triple de un número aumentado en dos equivale a la mitad de ese número disminuida de veinte. La persona contesta que el número es $\frac{-44}{5}$ ¿Sospecharán de él?

(b) El auditorio de un colegio tiene forma rectangular. El ancho mide dos terceras partes del largo disminuidas en siete. Determine las dimensiones, si se sabe que el perímetro es de 30cm.

(c) La suma de las edades de Jacobo y Modesto es de 60 años. La edad de Modesto es el quíntuple de la edad de Jacobo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

(d) En el 8C hay 32 personas. La diferencia entre hombres y mujeres es de 8. Si hay más mujeres que hombres, ¿cuántos hombres hay en la 8C?

(e) Uno de los ángulos suplementarios mide 30° más que el otro ¿cuál es la medida de cada ángulo

(f) Al quíntuplo de la edad de Nazaria le faltan 5 años para llegar a 80 años ¿Cuál es la edad de Nazaria?

(g) Del total de personas que asisten a una actividad, 1 de cada 4 personas toman café. Si en total asisten 240 personas a la actividad ¿cuántas personas NO toman café?

(h) Un alambre de 20 m de largo se corta en dos piezas de tal forma que el largo de una de ellas es 6 m mayor que el largo de la otra. ¿Cuál es, en metros, el largo de la pieza de mayor longitud?

(i) La suma de la edad de una madre y la de su hijo es 62 años. ¿Cuál es la edad de la madre, si sabemos que su hijo nació cuando ella tenía 24 años?

(j) Si la quinta parte de un número más el duplo del mismo número es igual a la tercera parte de ese número sustraída de dos, entonces ¿cuál es ese número?

(k) En un colegio hay tres secciones de octavo nivel, el número de estudiantes en cada sección es impar y los números son consecutivos. Determine la cantidad de estudiantes que hay en la sección con mayor número de personas, si en total hay 99 estudiantes.

(l) El perímetro de un triángulo isósceles es 20. Si el lado desigual excede en 5 a uno de los lados congruentes, entonces ¿cuánto mide el lado desigual del triángulo?

(m) Paulina tiene 22 tarjetas para repartirlas entre Orestes y Silvano. El número de tarjetas que recibe Orestes es la mitad menos dos del número de tarjetas que recibe Silvano. ¿Cuántas tarjetas recibe Orestes?

(n) La medida de un ángulo A es igual que el doble de la del complemento aumentado en seis. ¿Cuál es la medida del ángulo A?

(o) La cantidad de gramos que hay en una naranja es igual a las dos terceras partes de esa cantidad disminuida de seis. ¿Cuántos gramos hay en la mitad de esa naranja?

(p) Una familia fue de paseo a un volcán. La entrada de los niños cuesta tres cuartas partes del valor de la de los adultos. Fueron tres adultos y dos niños, y en total pagaron ₡7875. ¿Cuál es el precio de entrada por cada adulto y por cada niño?

(q) El largo de un terreno excede ocho al doble de la medida del ancho. Si el perímetro del terreno es de 166m. Determine la medida del ancho.

(r) En tres días, una señora condujo en automóvil 175 km. Cada día manejó la mitad de lo que condujo el día anterior. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada día?

21. Segundo bloque de problemas.

(a) Un colegio de Puntarenas organizó un Festival de Talentos para recaudar fondos que serán invertidos en mejoras para la institución. La entrada de los niños es de ₡400 y la de los adultos de ₡600. A la actividad asistieron 427 personas y se recaudaron ₡210 800. ¿Cuántos niños asistieron al evento?

(b) El promedio (media) de cinco notas de un estudiante es de 81. Tres de sus notas son: 90, 85 y 80. De las notas faltantes, una de ellas es las dos terceras partes de la otra. ¿cuáles son esas notas faltantes?

(c) Tres hermanos deciden comprar una parrilla de gas y colaborar con el dinero en partes iguales. Si un cuarto hermano hubiese ayudado con la compra, cada uno tendría que pagar ₡10 000 menos. ¿Cuál es el precio de la parrilla?

(d) En una semana, Jacinta estudia el doble de horas que Valentín. Si cada uno hubiera estudiado 5 horas menos, Jacinta hubiera estudiado el cuádruple que Valentín. ¿Cuántas horas estudió cado uno?

(e) El denominador de una fracción es 3 unidades menor que su numerador. Si tanto al numerador como al denominador de esa fracción se le suma una unidad, la fracción que resulta es $\frac{3}{2}$. Determine la fracción

(f) En una granja hay gallinas y ovejas. En total hay 74 ojos y 114 patas. ¿Cuántas gallinas y ovejas hay?

(g) La edad de Avelino es el doble de la edad de Celedonio aumentado en uno. Hace siete años, la edad de Avelino era el triple de la edad de Celedonio disminuida en dos. Determine la edad actual de Avelino

(h) En una sección de un colegio de Alajuela hay 30 estudiantes que practican deportes. Los que practican futbol son el triple de los que practican voleibol y la mitad de los que practican básquetbol. ¿Cuántos estudiantes practican futbol y cuántos básquetbol?

(i) Un hombre y un niño recorren la misma distancia. Con cada paso, el hombre avanza 0,9 m y el niño 0, 45m . Si el niño da 2 000 pasos más que el hombre, entonces ¿cuál es la distancia que recorrió el niño?

(j) Rogerio utiliza monedas de ₡10 y ₡25 para hablar por teléfono. El costo de utilizar por un minuto el teléfono es de ₡25. Si Rogerio habló durante 30 minutos y el número de monedas de ₡25 que utilizó es la quinta parte del número de monedas de ₡10, entonces ¿cuántas monedas de ₡25 utilizó Rogerio?

(k) Simplicio entrenó un total de 65 horas en tres meses. El segundo mes entrenó 3 horas más que el primero y el tercer mes 2 horas más que el segundo. ¿Cuántas horas entrenó Simplicio en el primer mes?

(l) En una alcancía hay ₡200 en monedas de ₡10 y ₡5. Si hay 30 monedas en total, entonces ¿cuántas monedas de ₡10 hay en la alcancía?

(m) La edad de Sofronio hace cinco años, fue $\frac{9}{11}$ de la edad que tendrá dentro de 5 años. ¿Cuál es la edad actual de Sofronio?

(n) Una persona compró cierta cantidad de libros, dos libros por ₡5000 y los vendió a dos por ₡7000. Al vender todos libros ganó ₡6000. ¿Cuántos libros compró?

22. Resuelva el siguiente acertijo hindú:

Un palomo se encontraba descansando en una rama. Cuando de pronto, cruza el cielo una bandada de palomas. A lo cual el palomo, a modo de piropo, les dice:
- ¡Adiós mis CIEN PALOMAS! Como respuesta, se acerca una paloma, y le dice:
- Perdón, pero te has equivocado...No somos cien; para serlo, deberíamos ser: las que somos, más las que somos, más la mitad de las que somos, más la cuarta parte de las que somos y tú... Así si seríamos 100.
¿Cuántas palomas pasaron?

Cuadro Mágico

Resuelva cada una de las ecuaciones que se presentan a continuación y escriba la respuesta en los espacios del cuadro según la numeración. Al terminar compruebe que la suma en todas direcciones es la misma.

1) $3x-(x-7)=3+x$

2) $5(3x+1)=13(1+x)-{}^{-}3$

3) $\dfrac{x+1}{x+6}=\dfrac{2}{6}$

4) $2x+\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{7}{6}=\dfrac{29}{6}+\dfrac{4x-3}{2}$

5) $\dfrac{2}{3}x=6$

6) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{3}\right)-\dfrac{x}{4}=\dfrac{1-x}{4}$

7) $5-\dfrac{4x+1}{2}=\dfrac{-9}{2}$

8) $\dfrac{-25+x}{2x-1}=4$

9) $\dfrac{-6x}{17}=-3$

10) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}+x=\dfrac{13}{6}-x$

11) $x(x-5)=(x-4)^2-1$

12) $\dfrac{-1}{2}+\dfrac{4x+15}{10}=\dfrac{-2}{5}$

13) $\dfrac{3x+7}{2}-\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}$

14) $-(-6x-2)=x+(18+x)$

15) $\dfrac{8}{7}+\dfrac{5x-21}{3}=\dfrac{-41}{7}+x$

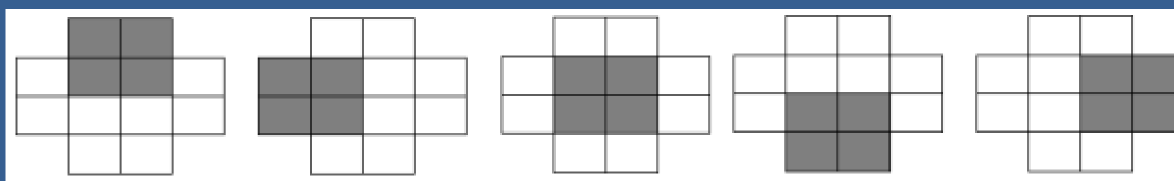
16) $\dfrac{4}{x}=\dfrac{8}{19}$

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.
9.	10.	11.	12.
13.	14.	15.	16.

Cruz algebraica

A continuación se presenta una cruz con doce casillas en la que están escondidos 12 números. Encuentra los valores de “x”, “y”, “z” y “m” para así obtener cada uno de esos números.

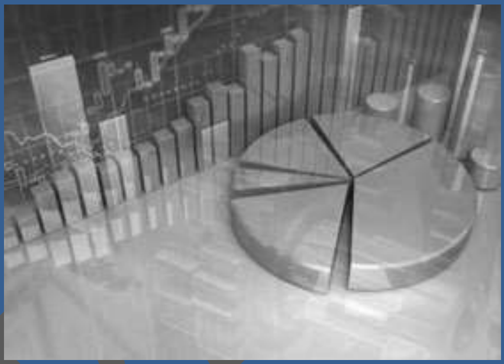
Esta cruz tiene la particularidad de que si se suman las cuatro casillas, tal como se muestra en la ilustración, se obtendrá un 8 como respuesta.



	$\frac{3}{2}x$	$\frac{x-1}{2}$	
$y-\frac{3}{4}$	$5-x$	$2x$	$12z-6$
$7-y$	$3y$	$4z+1$	$z+\frac{3}{4}$
	$\frac{m-1}{6}$	$\frac{m}{3}$	

ESTADÍSTICA

Estadística



Basta con leer un periódico, analizar una encuesta, realizar estudios de mercadeo, proyecciones a futuro, controles de población o presentar un informe, para darnos cuenta de lo valiosa que es la Estadística en nuestra sociedad. Desde los comienzos de la civilización, han existido formas sencillas de estadística. Hay evidencias de representaciones gráficas en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas, utilizadas para contar el número de personas, animales o siembras. Hacia el año 3000 a.C, los babilonios usaban ya pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola.

Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país, mucho antes de construir las pirámides, en el siglo XXXI a.C. Los libros bíblicos de Números y Crónicas incluyen también trabajos de estadística. El primero contiene dos censos de la población de Israel y el segundo, describe el bienestar material de las diversas tribus judías.

El desconocimiento de los elementos básicos de la Estadística puede hacer que se formulen análisis erróneos y conclusiones inválidas. Por tal razón, es de suma importancia saber cómo se recogen, analizan y presentan los datos para un estudio estadístico.

Conocimiento: Recolección y representación de datos

Escenario de aprendizaje

Rendimiento académico

La administración de un colegio está muy preocupada por el bajo rendimiento durante el I trimestre en Ciencias, en un grupo de octavo nivel. Para buscar soluciones, pasa un cuestionario a los estudiantes. Entre las preguntas destacan:

(a) Sexo 1.□ Masculino 2. □ Femenino

(b) ¿Cuántas horas a la semana estudia Ciencias? __________

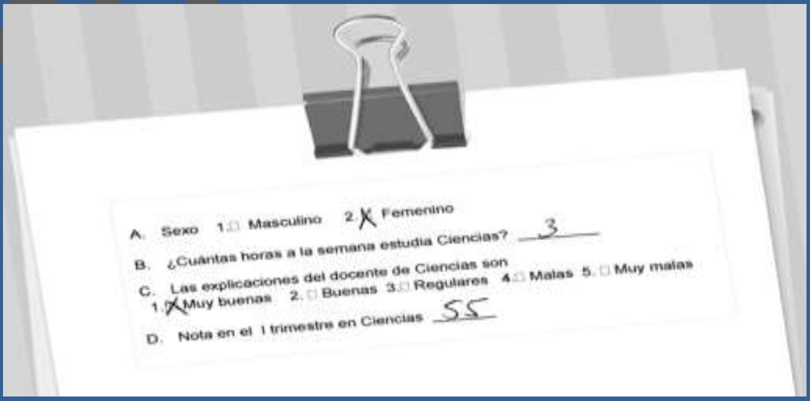
(c) Las explicaciones del docente de Ciencias son
1. □ Muy buenas 2. □ Buenas 3.□ Regulares 4.□ Malas 5. □ Muy malas

(d) Nota en el I trimestre en Ciencias _________

Las respuestas de las 24 personas se digitaron en Excel para hacer un análisis de las mismas.

Cuando se hace un estudio estadístico, es importante codificar cada observación, para poder usar de manera más eficiente la información en Excel.

A modo de ejemplo, supongamos que las siguientes son las respuestas del primer cuestionario:



Ahora veamos cómo queda codificado este y los demás cuestionarios en Excel.

	A	B	C	D	E
1	N° de cues-tionario	Sexo	Horas de estudio	Explicación del docente	Nota I trim
2	1	2	3	1	56
3	2	1	1	3	44
4	3	2	2	1	56
5	4	1	2	2	60
6	5	1	1	3	56
7	6	1	1	3	62
8	7	1	2	1	62
9	8	2	1	1	50
10	9	2	2	2	54
11	10	1	1	3	50
12	11	2	4	1	50
13	12	1	3	2	68
14	13	2	2	3	62
15	14	1	1	4	70
16	15	1	0	4	72
17	16	1	1	5	82
18	17	2	4	1	40
19	18	2	2	1	62
20	19	1	2	2	68
21	20	2	1	5	78
22	21	2	0	5	76
23	22	1	1	2	63
24	23	1	2	1	68
25	24	2	0	2	56

Para presentar la información, es importante considerar la naturaleza de las preguntas, puesto que en algunos casos, lo más conveniente puede ser usar una tabla, pero para otros un gráfico.

⌗ Si queremos saber cuántos hombres y mujeres hay en el grupo, no es necesario un gráfico o tabla, basta con mencionar de modo textual esa información. Si no se desea hacer el conteo manual, mediante Excel se puede calcular. Para ello nos posicionamos en un espacio vacío y colocamos la fórmula siguiente:

=contar.si( )

CONTAR.SI(**rango**; criterio)

En el rango se señala la columna correspondiente a las respuestas de la primera pregunta, en el criterio se escribe "1", para que contabilice la cantidad de hombres. Similarmente se trabaja para contar las mujeres, pero colocando "2" en el criterio.

=CONTAR.SI(B2:B25;"1")

=CONTAR.SI(B2:B25;"1")	13

En el grupo hay 13 hombres y por tanto 11 mujeres. El porcentaje de hombres es entonces de $13 \div 0,24 = 54,16\%$.

En este caso no es necesario construir una tabla o gráfico, basta con señalar que el 54, 16% de los encuestados corresponde a varones y el 45,84% a mujeres.

⌗ Para presentar la información sobre cuántas horas estudian los y las jóvenes, se puede utilizar un gráfico de barras verticales, puesto que la variable es cuantitativa.

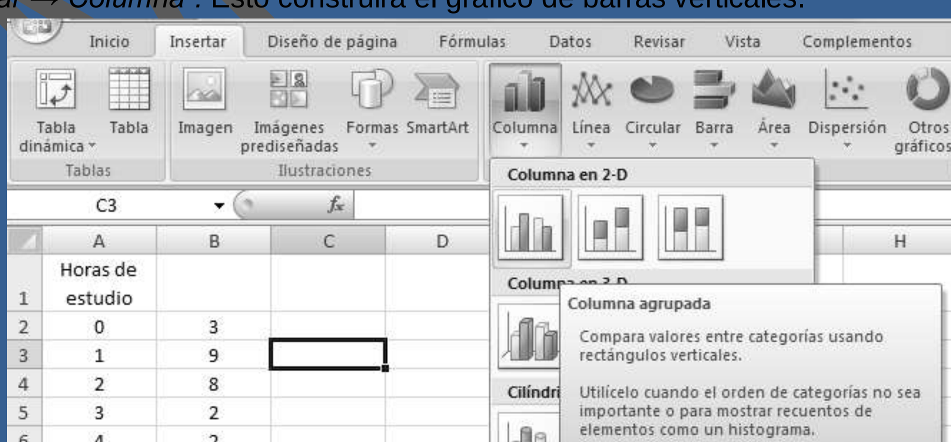
Pero para ello primero es necesario determinar la frecuencia absoluta de cada una de las horas que se dieron como respuesta. Se ubica el mínimo y máximo, que en este caso es 0 y 4. De esta manera, construimos una nueva columna con las “horas ordenadas”, y a la par su respectiva frecuencia, la cual se puede determinar con el contador de Excel.

Horas ordenadas		
0	=CONTAR.SI(C2:C25;"0")	
1	CONTAR.SI(rango; **criterio**)	
2		
3		
4		

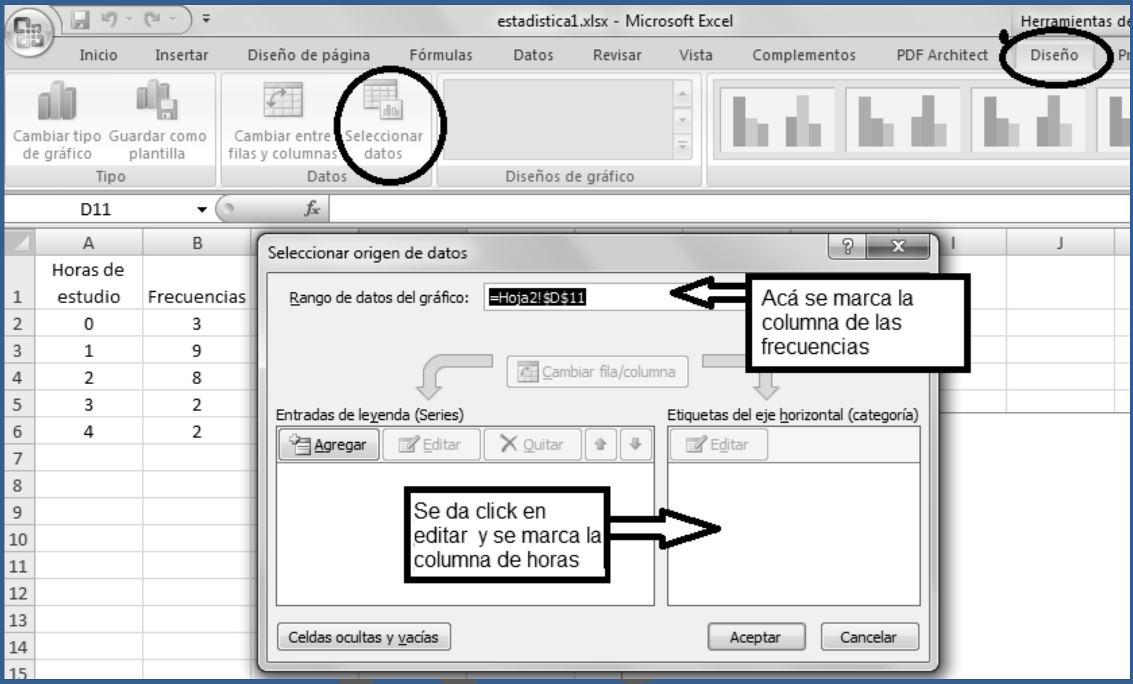
Al repetir este proceso, se obtiene:

G	H
Horas ordenadas	
0	3
1	9
2	8
3	2
4	2

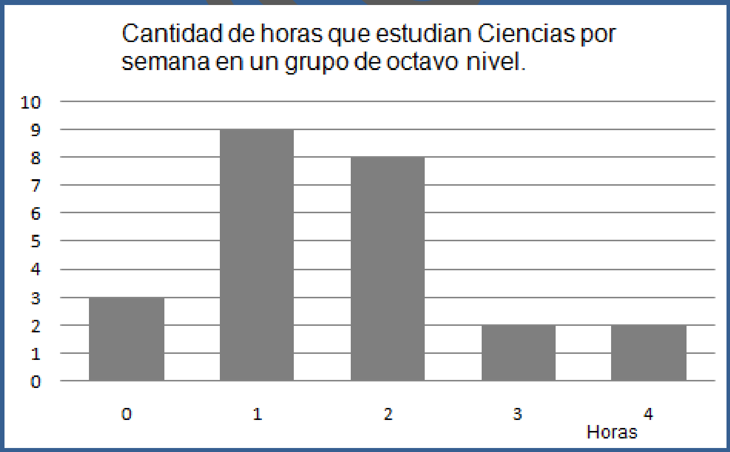
Para construir el gráfico en Excel, se ubica en la barra de herramientas la opción *“Insertar → Columna”.* Esto construirá el gráfico de barras verticales.



Seguidamente, se marca el área donde aparecerá el gráfico y en las opciones de *"Diseño"* se marca *"Seleccionar datos".* Se desplegará un cuadro, en el cual se marcará la columna de las frecuencias en el espacio que dice *"Rango de datos del gráfico"* y en las "etiquetas del eje horizontal" se da click en *"Editar"* y se marca la columna correspondiente a "Horas de estudio"



Esto le desplegará el gráfico deseado, al cual se le puede incorporar título y otros detalles.

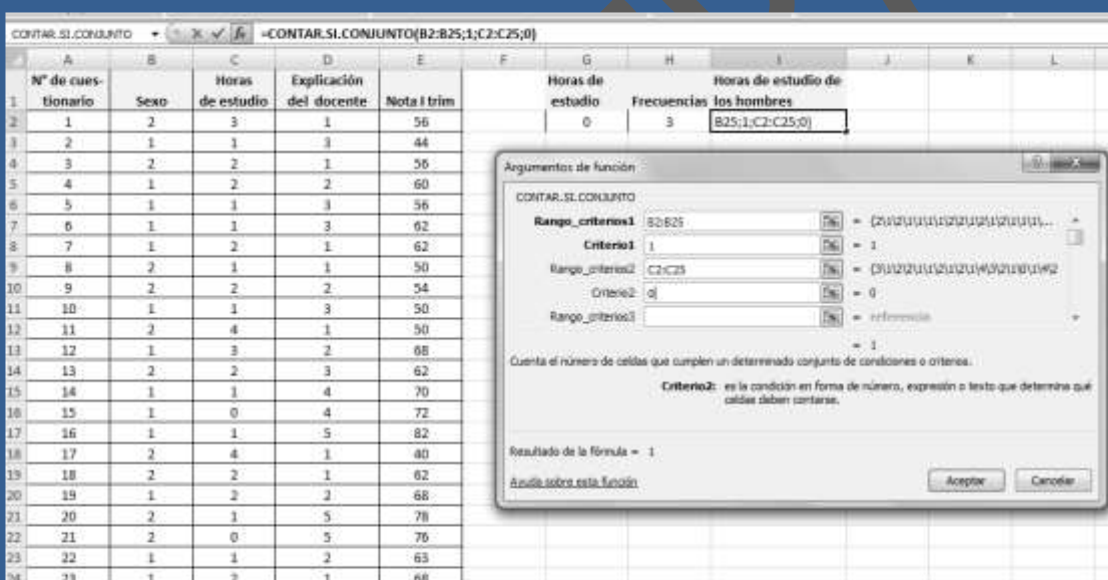


Este gráfico nos ayuda a resumir la información y poder brindar algunas conclusiones. Más de la mitad de los estudiantes estudian a lo sumo una hora por semana (una o cero horas). Se aprecia también que es una minoría la que estudia tres o cuatro horas semanales. Esto puede ayudar a la administración del colegio a brindar soluciones en busca de mejoras, como por ejemplo, colaborar en la confección de horarios de estudio.

⌗ Ahora bien, si se quiere establecer comparaciones entre hombres y mujeres sobre la cantidad de horas de estudio, es necesario trabajar con porcentajes, puesto que el número de varones no es el mismo de las mujeres.

Pero antes de determinar los porcentajes, se debe contabilizar cuántos hombres estudian 0, 1, 2, 3, o horas; y repetir el proceso con las mujeres.

Como son dos condiciones las que se necesitan contabilizar, en Excel conviene usar la función "*Contar.Si.Conjunto*". Al desplegarse el cuadro de diálogo, en el "*Rango Criterio_1*" se marca la columna de "sexo"; en "*criterio 1*" se coloca 1 (que corresponde al código masculino). Con esto solo se establece una condición. Luego se completa "*Rango Criterio_2*" marcando la columna "horas" y en el "*criterio 2*" se escribe 0 (que corresponde a los que no estudian)



En Excel queda la siguiente tabla:

Horas de estudio	Frecuencias absolutas totales	Hombres	Mujeres
0	3	1	2
1	9	7	2
2	8	4	4
3	2	1	1
4	2	0	2
Totales	24	13	11

Esta tabla nos muestra las frecuencias absolutas; por ejemplo, podemos saber que 2 mujeres estudian 1 hora por semana Ciencias. Sin embargo, no se pueden hacer comparaciones hasta que se tengan los valores porcentuales.

Horas de estudio	Porcentajes totales	Hombres	Mujeres
0	12,5	7,7	18,2
1	37,5	53,8	18,2
2	33,3	30,8	36,4
3	8,3	7,7	9,1
4	8,3	0,0	18,2
Totales	100	100	100

Si deseamos construir una tabla que resuma todos estos datos, podemos realizarla de la siguiente manera:

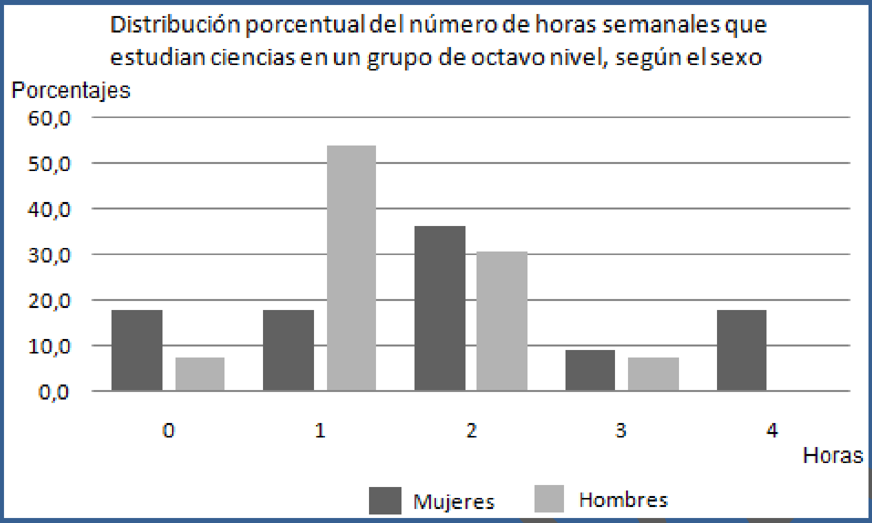
Tabla 1: Distribución absoluta y porcentual del número de horas que estudian Ciencias en un grupo de octavo nivel, según el sexo.

Número de horas	Frecuencias absolutas			Porcentajes		
	Hombres	Mujeres	Totales	Hombres	Mujeres	Totales
0	1	2	3	7,7	18,2	12,5
1	7	2	9	53,8	18,2	37,5
2	4	4	8	30,8	36,4	33,3
3	1	1	2	7,7	9,1	8,3
4	0	2	2	0,0	18,2	8,3
Totales	13	11	24	100	100	100

Interpretemos algunos números de la tabla:

36,4: Significa que aproximadamente 36,4 de cada 100 mujeres (36,4%) estudian 2 horas por semana.
37,5: Indica que 37,5 de cada 100 alumnos (37,5 %) estudian 1 hora por semana.
8: Expresa que 8 estudiantes estudian 1 hora por semana.
7: Significa que 7 varones estudian 1 hora por semana.

Los gráficos de barras también permiten presentar esta información, pero se deben confeccionar solo con porcentajes. Para esto se hará uso de dos series, una para hombres y otra para mujeres.



Con el gráfico es fácil deducir que el porcentaje de hombres que estudian 3 horas es parecido al de mujeres, y que la mayor diferencia entre sexos se muestra sobre los que estudian una hora.

⌗ También se puede hacer un análisis estadístico con las medidas de tendencia central. En el caso de la cantidad de horas que estudian ciencias, se puede calcular:

Moda. Cuando se preguntó a los alumnos, cuál es la cantidad de horas que estudian, la respuesta que más se repitió fue “una”.

Media. Con los datos recopilados se tiene:

Horas de estudio	**Frecuencias absolutas totales**	**Horas por frecuencia**
0	3	0
1	9	9
2	8	16
3	2	6
4	2	8
Totales	24	39

Por tanto, la media se obtiene al resolver $\frac{39}{24}$

Los alumnos del grupo de octavo estudian en promedio 1,62 horas semanales.

Máximo. 4 horas. *Mínimo.* 0 horas.

Recuerde:

☑ **Media aritmética:** (promedio): Es la suma de los valores de la variable dividida por el número de datos. Se puede simbolizar mediante $\overline{x}$.

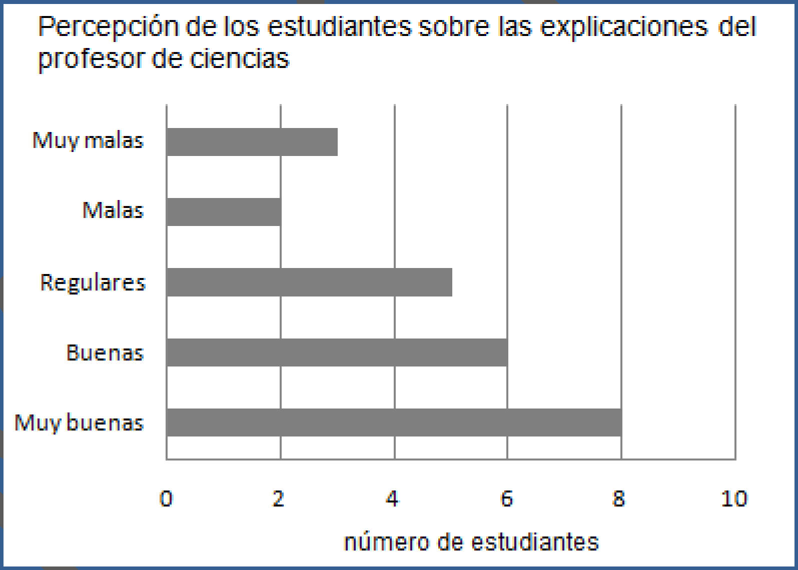
$$\overline{x} = \frac{\text{suma de valores de la variable}}{\text{total de datos}}$$

☑ **Moda:** Es el valor de la variable con más frecuencia.

☑ **Máximo y mínimo:** Estos valores se definen a partir de sus propios nombres. El máximo corresponde al dato de mayor valor numérico del conjunto y el mínimo representa el de menor valor numérico.

☑ **Recorrido:** Es la diferencia entre el máximo y el mínimo.

⌗ Sobre la percepción que tienen los estudiantes respecto a la forma en que explica su profesor de ciencias, se puede construir un gráfico de barras horizontales.



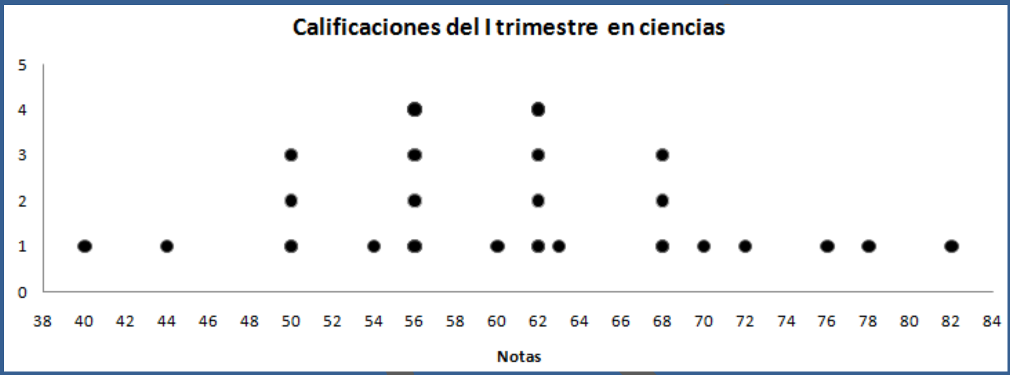
A pesar de que las notas son bajas, los estudiantes consideran en su mayoría que las explicaciones son buenas o muy buenas.

⌗ Para analizar las notas obtenidas por los estudiantes, al tener tanta variabilidad, no conviene confeccionar un gráfico de barras o una tabla, sino un diagrama de puntos. Esto debido a que los cuadros de frecuencia no permiten observar claramente el patrón de variabilidad de los datos.

Un diagrama de puntos es una gráfica utilizada para ilustrar un número reducido de datos, la cual permite identificar con facilidad la localización de los datos y la dispersión o variabilidad de los datos.

Cada dato se representa con un punto encima de la correspondiente localización, en una escala horizontal de medida. Cuando un valor se repite, hay un punto por cada ocurrencia y se colocan verticalmente.

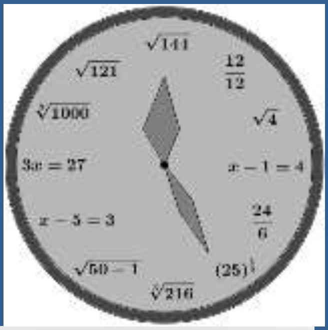
Para ello se ordenan los datos del mínimo hasta el máximo.



Mediante este diagrama se puede visualizar más fácilmente, que la mayoría de notas en ciencias están aglutinadas en un rango que va de 50 a 68. Dentro de esos valores, se encuentra, en este caso, el promedio de las calificaciones, el cual es de 61, 04. Es decir, la nota máxima y mínima (82 y 40) no provocaron que el promedio se inclinara más hacia uno de los dos extremos.

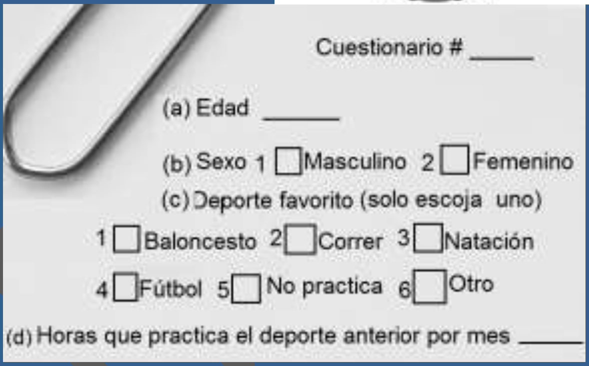
Cuanto más dispersos estén los puntos, más variabilidad habrá en los datos.

Tiempo para practicar 4.1



Habilidades:
Recolectar datos del entorno por medio de experimentación o interrogación.
Utilizar representaciones tabulares o gráficas con frecuencias absolutas o porcentuales, simples o comparativas.
Utilizar un software especializado o una hoja de cálculo para favorecer la construcción de cuadros y gráficos.
Caracterizar un grupo de datos utilizando medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido.

1. En una municipalidad desean apoyar el deporte, por lo cual paulatinamente están construyendo espacios recreativos. Desean dar prioridad a los deportes más practicados, para lo cual hacen unas encuestas en el parque del cantón, con las preguntas adjuntas.
Las respuestas se resumen en la siguiente tabla.



Cuestionario # _____

(a) Edad _____

(b) Sexo 1 ☐ Masculino 2 ☐ Femenino

(c) Deporte favorito (solo escoja uno)

1 ☐ Baloncesto 2 ☐ Correr 3 ☐ Natación

4 ☐ Fútbol 5 ☐ No practica 6 ☐ Otro

(d) Horas que practica el deporte anterior por mes _____

Cuestio-nario	Sexo	deporte	Horas
1	1	4	7
2	2	5	0
3	1	1	3
4	2	6	2
5	2	4	8
6	2	1	4
7	2	2	1
8	1	4	6
9	1	4	8
10	1	4	6
11	1	4	6
12	1	1	3
13	2	2	5
14	2	2	5
15	1	2	7
16	2	2	9
17	1	5	0
18	2	2	3
19	1	4	6
20	2	2	3
21	1	4	5
22	2	1	1
23	2	2	2
24	2	2	3
25	2	4	6
26	1	2	5
27	1	4	8
28	1	2	1
29	2	4	9
30	2	3	5
31	2	3	2

De acuerdo con la información, realice lo que se le solicita.

(a) Indique el porcentaje de hombres y mujeres entrevistados.

(b) Construya un gráfico circular que represente los deportes favoritos, con porcentajes.

(c) Construya una tabla en la que se aprecie cuántos hombres y cuántas mujeres practican cada deporte. En la misma tabla proporcione los porcentajes respectivos. Realice un análisis de la tabla construida.

(d) Realice dos diagramas de puntos, uno para hombres y otro para mujeres, donde se representen las horas que practican deporte. Analice en cuál sexo se presenta mayor variabilidad.

(e) Respecto a las horas que se practica deporte, determine: moda, media, mínimo, máximo y recorrido.

(f) En un gráfico de barras, represente la cantidad de horas que practican fútbol.

2. Como un proyecto de Educación Física, se desea hacer una investigación sobre los hábitos alimenticios dentro del colegio.

Para ello se distribuye un cuestionario a estudiantes con las preguntas que se adjuntan.

Las respuestas fueron digitadas y se presentan a continuación.

Cuestionario # ____

(a) Nivel:

1☐ Sétimo 2☐ Octavo 3☐ Noveno

4☐ Décimo 5☐ Undécimo

(b) Número de días por semana que compra en la soda a la hora del almuerzo __________

(c) ¿Qué compra en la soda a la hora del almuerzo?

1☐ Casados 2☐ Snacks 3☐ Hamburguesas

4☐ Dulces (confites) 5☐ Helados

Cuestionario	Nivel	Días de almuerzo	Comida comprada		Cuestionario	Nivel	Días de almuerzo	Comida comprada
1	1	2	1		21	5	5	1
2	1				22	4	2	1
3	2	1	4		23	3	2	4
4	5	2	2		24	2	3	5
5	4	3	1		25	2	4	2
6	5	5	1		26	1	2	2
7	2	2	4		27	4	4	4
8	3	2	1		28	4	5	3
9	1	4	4		29	4	5	1
10	5	5	1		30	5	5	1
11	2	3	4		31	3	3	4
12	1				32	3	4	3
13	5	4	1		33	2	3	5
14	4	1	3		34	3	5	3
15	4	2	3		35	4	4	3
16	1	2	5		36	4	4	3
17	4	0	1		37	5	4	1
18	3	4	5		38	2	4	5
19	1	1	2		39	5	2	2
20	2	2	5		40	1	3	1

(a) Complete la siguiente tabla.

Distribución absoluta y porcentual de la cantidad de veces que los estudiantes almuerzan en la soda, según el nivel que cursan.

Días que almuerzan en la soda	Frecuencias absolutas						Porcentajes					
	Sétimo	Octavo	Noveno	Décimo	Undécimo	Totales	Sétimo	Octavo	Noveno	Décimo	Undécimo	Totales
0							25					7,5
1						3						
2												
3												15
4								25				
5						7						
Totales	8			10		40		100				100

(b) Respecto a la cantidad de días que se almuerza en la soda, determine: moda, media, mínimo, máximo y recorrido.

(c) Construya un gráfico de barras donde se visualicen los porcentajes de cada tipo de comida que consumen los estudiantes en la soda.

(d) ¿En qué nivel se consumen más casados por semana?

3. Considere la tabla y conteste lo que se le solicita.

Costa Rica: Nacimientos según año y sexo
Periodo 1990 - 2006

Año	Sexo		Totales
	Hombres	Mujeres	
1990	42291	39648	81939
1991	41707	39403	81110
1992	41390	38774	80164
1993	41092	38622	79714
1994	41104	39287	80391
1995	41181	39125	80306
1996	40558	38645	79203
1997	39790	38228	78018
1998	39428	37554	76982
1999	40417	38109	78526
2000	39943	38235	78178
2001	39214	37187	76401
2002	36868	34276	71144
2003	37172	35766	72938
2004	36748	35499	72247
2005	36700	34848	71548
2006	36276	35015	71291

Fuente: INEC

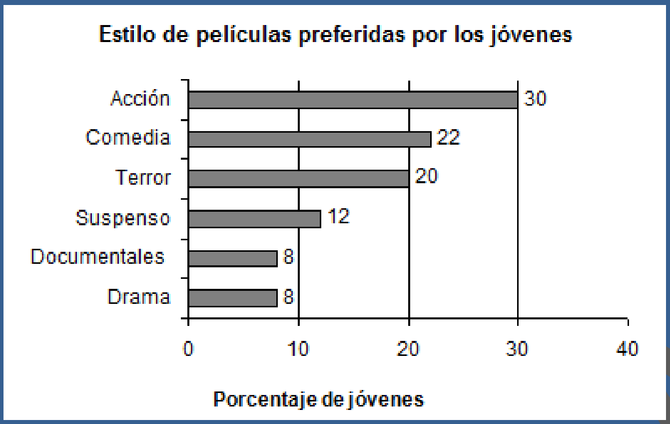
(a) Construya un gráfico lineal donde se aprecie el número de nacimientos entre 1990 y 2006, tanto de hombres como de mujeres.

(b) ¿En cuál año hay más diferencia entre el número de nacimientos de hombres y mujeres?

(c) ¿En cuál año la razón entre el número de hombres y el total de personas se aproxima más a $\frac{1}{2}$? ¿Qué significa ese resultado?

(d) Determine la media (redondee a la unidad más cercana), mínimo, máximo y recorrido de la cantidad de nacimientos totales.

4. Considere el gráfico adjunto y conteste.



(a) Si se entrevistó a 13200 personas, complete la siguiente tabla.

Estilo de película	Frecuencias absolutas
Acción	
Comedia	
Terror	
Suspenso	
Documentales	
Drama	
Total	13200

(b) Determine la moda del estilo de películas preferidas.

5. En cada lista de datos, determine la moda, media, recorrido, valores máximo y mínimo.

(a) 12, 15, 8, 4, 8, 25, 6, 7, 9, 1, 1, 3

(b) 23, 41, 12, 11, 7, 35, 6, 45, 42, 53, 35, 46

(c) 8, 7, 6, 8, 6, 8, 8, 7, 8, 6, 7, 8

(d) $\frac{1}{4}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

(e) 15, 14, 13, 20, 16, 18, 14, 35, 12

6. Considere la información proporcionada en la tabla.

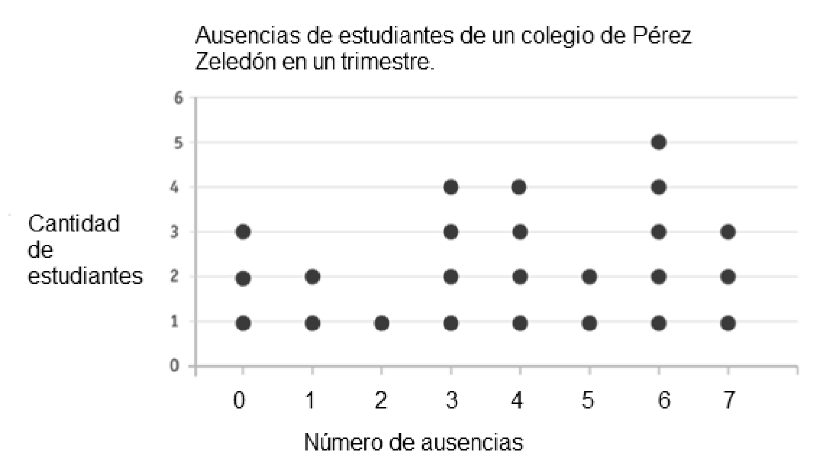
Costa Rica: Porcentaje de repitencia en secundaria, según el tipo de educación, de los años 2003 a 2012

Tipo de Educación	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Pública	11,6	11,3	12,6	12,6	13,4	12,8	11,0	12,9	14,3	13,3
Privada	2,9	2,6	3,4	3,4	3,5	3,4	2,3	2,3	2,5	2,0
Subvencionada	3,0	2,7	2,9	3,1	3,7	3,6	3,5	3,3	3,7	2,8

Fuente: Estado de la nación.

(a) Construya con ayuda del Excel un gráfico lineal donde se logre apreciar las tres series a lo largo de los años indicados.
(b) ¿Cuál es el año donde es menor la diferencia entre el porcentaje de repitencia de la educación pública y privada?
(c) ¿Cuál es la media con respecto al porcentaje de repitencia de estudiantes de una institución pública y cual la de una subvencionada?
(d) ¿Cuál es el máximo y el mínimo porcentaje de repitencia en los periodos del 2003 al 2012, para estudiantes de una institución privada?
(e) Con respecto al porcentaje de repitencia, ¿cuál es el recorrido en la educación privada y cuál en la subvencionada?

7. El siguiente diagrama de puntos, muestra el número de ausencias de los estudiantes de un colegio de Pérez Zeledón.



(a) ¿Cuántos estudiantes se tomaron en cuenta para el estudio?
(b) ¿Cuál es la moda con respecto a la cantidad de ausencias de los estudiantes?
(c) ¿Cuál es la media aritmética de la cantidad de ausencias durante el trimestre?
(d) ¿Cuál es el valor máximo y el valor mínimo de ausencias?

8. Los siguientes datos muestran las pulsaciones por minuto (ppm) de un grupo de 20 personas.

56	60	64	68	76
64	64	68	68	64
68	68	60	64	60
76	76	68	72	68

(a) Elabore un diagrama de puntos con la información anterior
(b) Determine la moda de las pulsaciones.
(c) Determine la media de las pulsaciones.
(d) Determine el máximo y mínimo de los datos.
(e) Determine el recorrido de los datos

9. La profesora de Español hizo una encuesta para determinar la cantidad de libros que se leyeron sus estudiantes el año anterior, pero que no correspondían a textos obligatorios. La información fue resumida en el siguiente gráfico:

Determine:
(a) La moda
(b) La media (Calcule primero el número de estudiantes encuestados)
(c) Los valores máximo y mínimo.

10. Las calificaciones obtenidas en la prueba escrita de manejo durante un mes, de aquellas personas que sí aprobaron el examen, se resumen en la siguiente tabla.

Nota	Personas con esa nota
100	2
97,5	11
95	15
92,5	21
90	23
87,5	23
85	28
82,5	20
80	27

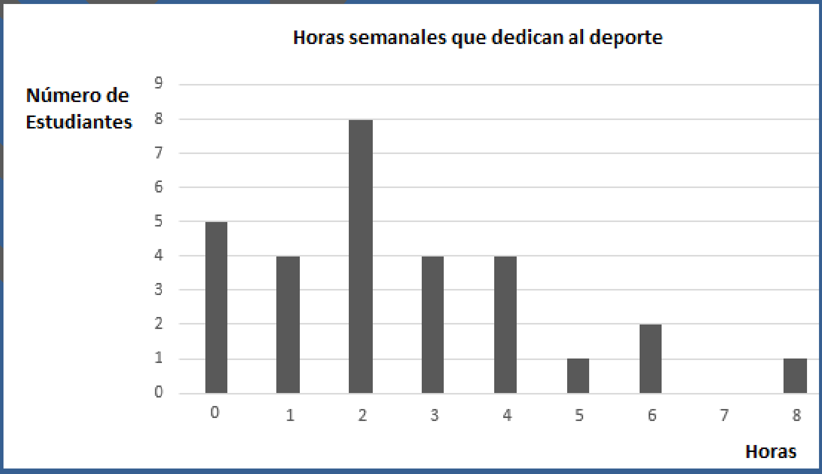
Determine:
(a) La moda
(b) La media
(c) Los valores máximo y mínimo.
(d) Recorrido

11. En un hotel, llevan el control de los turistas que se han hospedado en las primeras 20 semanas del año. Los datos son

88	74	30	27	21	23	31	48	18	20
47	49	78	21	48	21	46	19	80	77

(a) Determine la moda.
(b) Determine la media
(c) Determine el máximo y mínimo de los datos.
(d) Determine el recorrido de los datos

12. El profesor de educación física preguntó a sus estudiantes sobre la cantidad de horas semanales que dedican al deporte. La información aparece en el gráfico. Determine:



(a) La moda
(b) La media
(c) Los valores máximo y mínimo.
(d) El recorrido

PROBABILIDAD

Probabilidad

Nuestra vida cotidiana está llena de situaciones para las cuales no podemos predecir los resultados con exactitud. Por ejemplo, cuando el árbitro de un partido lanza al aire una moneda para determinar qué equipo hará el saque, ¿sabemos con seguridad cuál equipo iniciará? Claramente no, la experiencia nos indica que no podemos saber con certeza este resultado, ya que el azar interviene en esta situación.

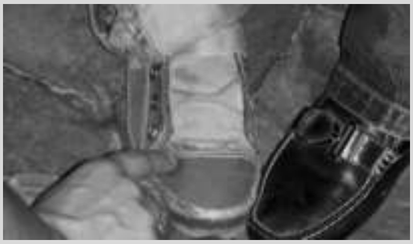
Son más frecuentes las situaciones que podemos atribuir al azar que las que corresponden a aconteceres que pueden ser previsibles con exactitud. ¿Habrá un tornado este año cerca de ni comunidad? ¿Nos resfriaremos este invierno? ¿Crecerá un arbolito que hemos sembrado? Hechos como estos requieren ser interpretados con pensamiento probabilístico, esto es, estimar o predecir eventos mediante un estudio matemático

La probabilidad constituye una herramienta fundamental en la planificación de estrategias sociales, económicas y laborales. También se utiliza en las ciencias físicas y biológicas, así como en el comercio y la industria.

Conocimiento: Probabilidad

Escenario de aprendizaje

¿Quién va de compras?



La mamá de Joaquina y Leandro va a llevar a uno de ellos a hacer las compras. Para evitar conflictos, Joaquina le dice a Leandro que para determinar quién irá, pueden hacer el juego "*tin marín*", de modo que ella empieza y recita la frase:

"tin marín dedo pingüé va us ted"

Joaquina sale ganadora, pero Leandro duda de la validez del juego, por lo que pide que mejor se lance una moneda, y que si sale *escudo* irá él de compras, de lo contrario, irá Joaquina. Lanza la moneda y efectivamente sale *escudo.* Joaquina ahora reclama y dice que él es quien usó un juego inválido.

¿Son ambos juegos, justos para determinar quién va de compras?

El juego de "*tin marín"* en efecto siempre tendrá un mismo resultado, cuando se hace en parejas ganará el que empieza el juego, por tanto, tenía razón Leandro de reclamar.

Por otra parte, el lanzamiento de una moneda, no asegura ninguno de los dos resultados (escudo o corona). Que haya salido escudo al lanzar Leandro la moneda, es producto del azar. Incluso puede suceder que de 100 lanzamientos, todos salgan escudo; sin embargo, puede pasar que en el primer intento el resultado sea corona. Se concluye que el juego más justo es el propuesto por Leandro.

Estas dos situaciones se diferencian por cuanto en una el resultado es siempre predecible y en la otra no.

Definiciones

Situación determinista

Es aquella situación que siempre que se realice con las mismas condiciones, su resultado será el mismo, es decir, se puede predecir con exactitud lo que sucederá.

Ejemplos

- Si inflamos un globo continuamente, sabemos que en algún instante estallará.
- Si el costo de una caja de leche es de ₡550, podremos saber con exactitud cuánto costarán 24 de ellas, con tan solo resolver ₡550 • 24
- El agua se congelará al llegar a una temperatura bajo cero grados Celsius.
- Si dejamos caer una piedra desde una ventana sabemos, sin lugar a dudas, que la piedra bajará.

Situación aleatoria

Es aquella situación de la cual no sabemos de antemano el resultado que vamos a obtener; por tanto, es necesario llevar a cabo la experiencia para conocer ese resultado. Depende del azar.

Ejemplos

- Lanzar un dado y que salga un cinco.
- El viernes caerán granizos.
- Que salga el día de nacimiento en la Lotería Nacional.

De este modo, saber quién ganará en el juego del "*tin marín*", corresponde a una situación determinista y lanzar una moneda de modo que quede escudo, es una situación aleatoria.

Si consideramos el caso de lanzar la moneda, existen dos posibilidades, que salga escudo o que se obtenga corona. A cada uno de esos resultados se les llama **puntos muestrales**, y al conjunto de esos puntos, **espacio muestral.**

Espacio muestral: {escudo, corona}

Definiciones

Puntos muestrales

Un punto muestral es un resultado particular del experimento aleatorio. También se le conoce como *resultados favorables.*

Ejemplos

- Al lanzar un dado, el 5 es un punto muestral.
- El 67 es un punto muestral en el sorteo de lotería.

Espacio muestral

Conjunto formado por todos los puntos muestrales de una situación aleatoria.

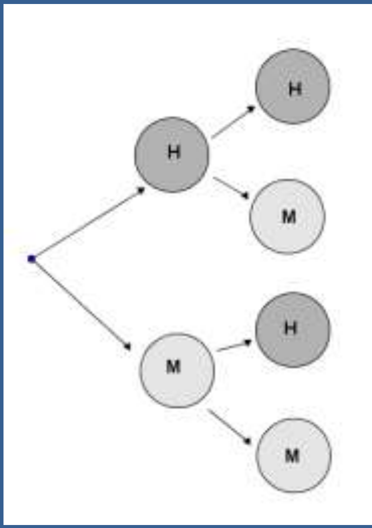
Ejemplo

- Al lanzar un dado, el espacio muestral está formado por todos los posibles resultados: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Ejemplos

- Suponga que una pareja desea tener dos hijos. Describa mediante un espacio muestral las posibilidades de esta situación.

Para dar respuesta, podemos usar un diagrama de árbol, donde H designa a un hijo varón y M a una mujer.



De este modo, hay 4 posibilidades:

Primer hijo	Segundo hijo
Hombre	Hombre
Hombre	Mujer
Mujer	Mujer
Mujer	Hombre

Espacio muestral: {(H, H), (H, M), (M, M), (M, H)}

⌗ Suponga que se tiran juntos dos dados. Determine el espacio muestral.

Podemos usar una tabla para determinar más fácilmente los puntos muestrales.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

El espacio muestral es:

{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),
(2,1),(2,2),(2,3)(2,4),(2,5),(2,6),
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)
(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),
(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5 6,),
(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Ahora consideremos la suma obtenida del lanzamiento de los dos dados.

Dado 1

Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

En este caso, el espacio muestral es {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Si deseamos analizar las posibilidades que hay para que se obtenga un número primo, estamos ante un ***evento***; esto es, una agrupación de puntos muestrales. Este evento en particular contiene varios resultados: 2, 3, 5, 7, 11.

Podemos considerar con este ejemplo otros eventos:

- ☑ Obtener un número par: 2, 4, 6, 8, 10, 12
- ☑ Obtener un número mayor o igual que 10: 10, 11, 12
- ☑ Obtener un número mayor que 15. Este suceso es **imposible**. Puede denotarse como un conjunto vacío: Ø
- ☑ Obtener una suma mayor o igual que 2 y menor o igual que 12. Esto **siempre sucederá**. Coincide con el espacio muestral 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
- ☑ Obtener un 12: Solo tiene **un punto** muestral.

En estos eventos podemos analizar algunos casos importantes: existen **eventos imposibles** (obtener un 15) y **seguros o deterministas** (obtener un número mayor o igual a 2 y menor o igual a 12).

Los eventos también pueden clasificarse si tienen uno o más puntos muestrales. En el caso de obtener un 12, solo hay un punto muestral, por tanto se le llama **evento simple.** El evento de obtener un número par tiene 6 resultados, por lo que es un **evento compuesto.**
Ahora bien, si analizamos las posibilidades, el 7 tiene más probabilidad que los demás, ya que hay 6 maneras diferentes de obtenerse (1,6), (2, 5), (3,4), (4, 3), (5, 2), (6,1). Se puede deducir también, que es **más probable** obtener un 5 que un 3. En cambio los **menos probables** son el 2 y 12, ya que cada uno puede ocurrir solo de una forma. (1, 1), (6, 6,). Hay números con las **mismas posibilidades (probabilidades)**, tales como el 4 y 10.

Definiciones

Eventos Los eventos son agrupaciones de puntos muestrales en un espacio muestral. Son subconjuntos del espacio muestral.

Evento simple Contiene un único punto muestral.

Evento compuesto Es aquel que tiene más de un punto muestral.

Eventos seguros Se da en aquellos casos en los que la ocurrencia está garantizada. Coinciden con el espacio muestral.

Eventos imposibles Son eventos imposibles aquellos que nunca pueden ocurrir. Se denota con el símbolo de conjunto vacío: Ø.

Probabilidad Posibilidad de que un hecho o condición se produzcan. Se simboliza con la letra P

Ya analizamos cuáles eventos eran más probables en la situación de lanzar los dados y realizar la suma. Ahora, vamos a determinar la probabilidad de algunos de ellos; para ello, se realiza el cociente de todos los resultados favorables a la ocurrencia entre el número de elementos de ese espacio muestral. A esto se le llama **definición laplaciana de probabilidad** (en honor del matemático Laplace).

$$P(\text{ocurra un evento}) = \frac{\text{número de resultados favorables al evento}}{\text{número de elementos del espacio muestral}}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7?
  $P(7) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 12?
  $P(12) = \dfrac{1}{36}$

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor menor a 13?
  $P(<13) = \dfrac{36}{36} = 1$ **Evento seguro**

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1?
  $P(1) = \dfrac{0}{36} = 0$ **Evento imposible**

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?
  $P(par) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

- Suponga que dos personas juegan, la primera, gana si la suma da 2, 3, 4, 5, 10, 11 o 12; mientras que la segunda persona, gana si la suma es de 6, 7, 8 o 9. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?
  La probabilidad de que gane la primera persona es
  $$\frac{16}{36} \approx 0,44$$
  La probabilidad de que gane la segunda persona es
  $$\frac{20}{36} \approx 0,55$$
  Por tanto, tiene más posibilidad la segunda persona.

Este análisis nos permite deducir algunas propiedades importantes:

- La probabilidad de cualquier evento es un valor entre 0 y 1: $0 \le P \le 1$
- La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible 0

Ejemplos

⌗ Se lanza una moneda y un dado.

(a) Determine el espacio muestral.

(b) Calcule la probabilidad de que en un lanzamiento, se obtenga un 5 y un escudo

(c) Calcule la probabilidad de que en un lanzamiento, se obtenga una corona.

Los puntos muestrales quedan resumidos en la tabla adjunta, con los cuales se determina que el espacio muestral es: {(1,E), (2,E), (3,E), (4,E), (5,E), (6,E), (1,C), (2,C), (3,C), (4,C), (5,C), (6,C) }

	Escudo	Corona
1	(1, E)	(1,C)
2	(2, E)	(2,C)
3	(3, E)	(3,C)
4	(4, E)	(4,C)
5	(5, E)	(5,C)
6	(6, E)	(6,C)

Solo en un punto muestral se obtiene un 5 y un escudo y hay 12 resultados posibles, por tanto, la probabilidad es de $P(5,E)=\frac{1}{12}$.

También se pudo llegar a la respuesta, resolviendo $P(5,E) = P(5) \bullet P(E) = \frac{1}{6} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Y la probabilidad de obtener una corona es $P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

⌗ Un joven no se preparó para un examen corto de Matemática, que consistía en 10 preguntas de selección única (de cuatro opciones cada una) y decide marcar las respuestas al azar

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien la primera pregunta?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga 100 en la prueba?

(c) Qué es más probable, que obtenga 100 o que gane el premio mayor de la lotería del gordo navideño?

Como de las cuatro opciones de la pregunta, solo una es correcta, la probabilidad de acierto es $\frac{1}{4}=0,25$. Ahora bien, si se espera obtener 100, se debe calcular el producto de las probabilidades de acierto de cada pregunta, es decir: $\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4} = \frac{1}{1\,048\,576}$, esto es menos probable que ganar el premio mayor de la lotería, cuya probabilidad es de 1 entre 100 000: $\frac{1}{100\,000}$. ¡Así que mejor estudiar!

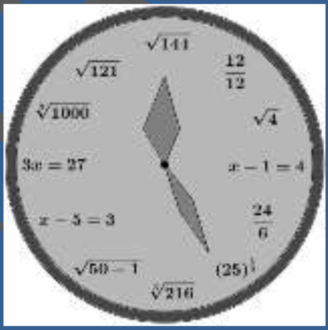
Situación curiosa

Para comentar con los compañeros y el docente

Bombas en un avión: Un hombre que viajaba mucho, estaba preocupado por la posibilidad de que hubiera una bomba en su avión. Calculó la probabilidad de que fuera así y, aunque esta era baja, no lo era lo suficientemente para dejarlo tranquilo. Desde entonces lleva siempre una bomba en su maletera. Según él, la probabilidad de que haya dos bombas a bordo es casi nula.

Tomado de: El hombre anumérico, John Allen Paulos. 1990

Tiempo para practicar 4.2



Habilidades:
Identificar la presencia del azar en situaciones aleatorias.
Identificar diferencias entre situaciones aleatorias y deterministas.
Identificar el espacio muestral y sus puntos muestrales como resultados simples en una situación o experimento aleatorio y representarlos por medio de la enumeración de sus elementos o de diagramas.
Determinar eventos y sus resultados a favor dentro de una situación aleatoria.
Clasificar eventos en simples o compuestos.
Identificar eventos seguros, probables e imposibles en una situación aleatoria determinada.
Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor de cada evento.
Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resultados.
Deducir las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con valores que puede tomar la probabilidad para evento seguro, probable e imposible.
Plantear y resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidades.
Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

1. En cada caso determine si la situación es aleatoria (A) o determinista (D).

   (a) Sacar un AS de corazones de una baraja.
   (b) Mes en que cumple años el director del colegio.
   (c) La mamá de Fausto tiene un mes de embarazo. Fausto tendrá una nueva hermana.
   (d) Ganar la lotería del gordo navideño.
   (e) Obtener un número primo al lanzar un dado
   (f) Ver una lapa en Puntarenas
   (g) La próxima vez que viaje en autobús tendré que ir de pie, porque no habrá asientos vacíos.
   (h) Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí.

(i) Agosto tiene 31días.
(j) Cuando encienda el televisor veré un anuncio de detergente.
(k) Costa Rica será el próximo campeón mundial de fútbol.
(l) Un kilo de algodón tiene la misma masa que un kilo de piedras.

2. Clasifique los siguientes eventos en probables (P), imposibles (I) o seguros (S). Cualquier información que no conozca puede buscarla en diversas fuentes, como en libros o la Web.

(a) Una hormiga no reina vivió 20 años.
(b) La próxima semana no tendrá día martes.
(c) En el mes de octubre lloverá en el Limón.
(d) Podré ver al tigre de Tasmania (Tilacino) en su hábitat natural.
(e) El próximo automóvil que vea será rojo.
(f) Si lanzo una moneda, obtendré escudo.
(g) Obtendré un 100 en Matemática.
(h) Al lanzar un dado convencional obtendré un número menor a 7
(i) Un turista que visita Costa Rica podrá ver nuestro ejército.
(j) Una molécula de agua está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno.

3. Determine el espacio muestral en la situación aleatoria: Extraer dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.

4. Describa el espacio muestral asociado al tiempo, con relación a la lluvia, que hará durante tres días consecutivos. Llame L a día con lluvia y N a día sin lluvia. Además, si los eventos de lluvia y no lluvia son equiprobables (con la misma posibilidad), determine la probabilidad de que llueva los tres días.

5. Se lanzan tres monedas al aire.

(a) Describa el espacio muestral
(b) Determine la probabilidad de obtener al menos una corona.
(c) Calcule la probabilidad de obtener tres escudos.

6. En una urna hay diez bolas numeradas del 1 al 10. Se extrae aleatoriamente una de ellas.
(a) Describa el espacio muestral.
(b) ¿Cuál es un evento seguro?
(c) ¿Cuál es un evento imposible?
(d) ¿Cuál es un evento simple?

(e) Considere el evento de extraer una bola cuyo número es múltiplo de 5. ¿Es este un evento simple o compuesto?
(f) ¿Qué es más probable, obtener una bola cuyo número es divisible entre 2, o una bola cuyo número es primo?

7. Se lanzan dos dados con seis caras marcadas con los números del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que los valores obtenidos difieran en una cantidad mayor de dos?

8. Si se escoge al azar dos números de teléfono y se observa la última cifra de cada uno. Determine la probabilidad de que las dos cifras sean iguales.

9. Se desea hacer un Festival Ecológico Nacional, para lo cual sacarán al azar el nombre de una de las siete provincias del país.

(a) Describa el espacio muestral.
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que se escoja una provincia que no limite con San José?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que se escoja una provincia que tenga playas?

10. Se escribe en un papel cada una de las letras que forman la palabra SUERTE y se deposita en una bolsa. Luego se extrae una de las letras.

(a) Describa el espacio muestral.
(b) Determine un evento imposible.
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que salga una E?
(d) ¿Qué es más probable, que se obtenga una vocal o una consonante?

11. En un consultorio odontológico, en promedio por día se atienden los siguientes casos

	Extracción	Calza	Limpieza
Niño	3	1	1
Joven	1	3	6
Adulto	1	5	3

Determine:
(a) La probabilidad de que se le aplique una extracción a un niño.
(b) La probabilidad de que llegue al consultorio un adulto
(c) La probabilidad de que llegue un joven a que le hagan limpieza.
(d) La probabilidad de que en un día se realicen calzas.

12. La Junta de Protección Social ha incorporado los chances de los números bajos, esto es, los números del 00 al 49. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número múltiplo de 7?
13. Se lanzan dos dados y se anota la puntuación del mayor. Si coinciden se anota la de uno de ellos.

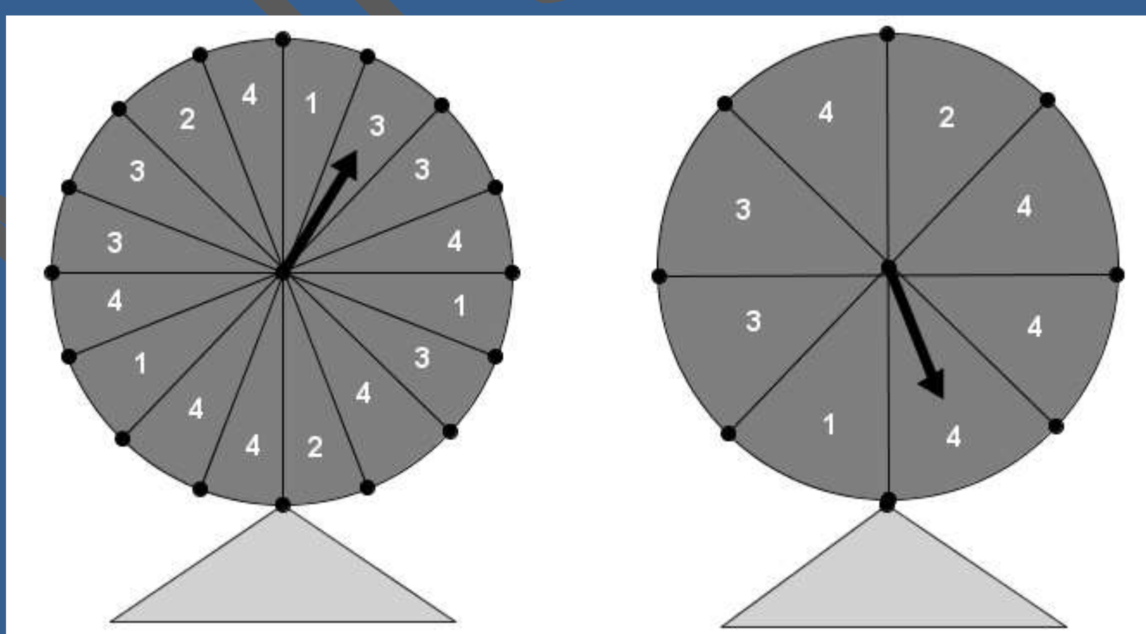
    (a) Complete la tabla adjunta.
    (b) Determine el espacio muestral.
    (c) Calcule las probabilidades P(1), P(2), P(3), P(4), P(5) y P(6) e indique cuál es la más y la menos probable.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀		2				
⚁					5	
⚂						
⚃						
⚄						
⚅		6				

14. En el experimento aleatorio de tirar dos dados, calcule la probabilidad de obtener en un dado un número par y en el otro un número impar.

15. En un sobre hay 20 papeletas, ocho dicen premio, las restantes son blancas. Hallar la probabilidad de que al extraer una papeleta no diga premio.

16. Considere las ruletas.



Suponiendo que las ruletas están bien equilibradas y se hacen girar con fuerza, conteste:

(a) ¿En cuál ruleta es más probable obtener un uno?
(b) ¿En cuál ruleta es más probable obtener un dos?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cuatro en la segunda ruleta?
(d) ¿Cuál es la probabilidad de NO obtener un tres en la primera ruleta?

Las apuestas no son tan buenas

Dos amigos deciden jugar unas apuestas. Etelberto le dice a Gregorio – Voy a lanzar tres monedas al aire, si todas caen escudo o todas caen corona, le daré a usted 100 colones. Pero si caen de alguna otra manera, usted me dará 50 colones a mí.

Gregorio se toma un momento para analizar la propuesta y reflexiona así: “Al menos dos monedas tendrán que caer igual, puesto que son tres. Si hay dos iguales, entonces la tercera tendrá que ser igual o diferente de las otras dos. Hay igual probabilidad respecto a que esa tercer moneda sea igual o diferente, por lo cual, la probabilidad de que las monedas caigan todas del mismo lado es una de dos (1/2). Ahora bien, Etelberto apuesta 100 colones contra 50 que no serán todas iguales, de modo que las probabilidades están a mi favor“

Luego de hacer el análisis, Gregorio acepta la propuesta.

¿Tomó Gregorio la mejor decisión?

Respuestas Números

1.1 Números racionales

(1)

$\frac{-9}{27}$	5,35	16,0	$\frac{18}{6}$
$12,\overline{4}$	$\frac{22}{0}$	−0,44...	$\frac{0}{9}$

(3)
(a) 2,125 (b) -40,4 (c) 0,6

(4)
$(a)\ 7,\overline{3}$ *i.p.* $(b)\ -0,16$ *e.* $(c)\ 0,2\overline{3}$ *i.p.*

$(d)\ -5,\overline{7}$ *i.p.* $(e)\ 0,125$ *e.* $(f)\ 1,\overline{12}$ *i.p*

$(g)\ -0,\overline{461538}$ *i.p.* $(h)\ 1,3\overline{5}$ *i.p.* $(i)\ 4,\overline{3}$ *i.p*

(5)
$(a)\frac{131}{50}\ (b)\frac{-401}{50}\ (c)\ \frac{23}{99}\ (d)\frac{-38}{9}$

$(e)\ \frac{16}{45}\ (f)\frac{-167}{165}\ (g)\frac{-4681}{90}\ (h)\ \frac{119}{900}$

$(i)\frac{109}{9}\ (j)\frac{-623}{90}\ (k)\frac{-2}{45}\ (l)\frac{34}{333}$

(6) (a) el B (b) 208 y 220

(7)
$(a) = \ (b) > \ (c) > \ (d) < \ (e) < \ (g) < \ (h) <$

(8) $(a)\ 1,\overline{6}$ inf period (b) Ruth

(9) B – A – C – D

(10) (a) Eladio (b) ₡6 975 y ₡5 175 (c) 60

(11) (a) 8-2 (b) 30 (c) $\frac{7}{10}$

(14) $\frac{67}{16} = 4,1875$ **(15)** 3 paquetes de ½ kg . ₡4 800

(16) 80, 60, 40, 2/9 **(17)** 50 ml **(18)** 27 715

(19) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}$ **(20)** $(a)\frac{7}{15}\ (b)\frac{1}{6}\ (c)\ \frac{1}{48}$

1.2 Suma y resta de números racionales

(1)
$(a)\frac{-7}{2}\ (b)\ \frac{23}{5}\ (c)\frac{1}{5}\ (d)\frac{-1}{3}\ (e)\ \frac{-6}{7}\ (f)\frac{-19}{4}\ (g)1\ (h)0$

(2)
$(a)\frac{-8}{21}\ (b)\frac{17}{10}\ (c)\ \frac{-59}{9}\ (d)\frac{5}{8}\ (e)\ \frac{-33}{16}\ (f)\frac{-65}{6}$

$(g)\frac{1}{2}\ (h)\ \frac{-23}{30}\ (i)\frac{67}{22}\ (j)\frac{17}{10}\ (k)\frac{-4}{3}\ (l)\frac{-7}{10}$

(3) $\frac{17}{4}$ **(4)** $\frac{2}{7}$ **(5)** 0,5 segundos **(6)** 18, 125 m que equivale a $18\frac{1}{8} = \frac{145}{8}$ m **(7)** $2\frac{3}{8} = \frac{19}{8}$ litros

(8) $\frac{3}{5}$: De 5 personas en el mundo, 3 son asiáticas.

(9) $\frac{1}{24}$ **(10)** $\frac{1}{2}kg$

1.3 Multiplicación y división de números racionales

(1)
$(a)\frac{-1}{21}\ (b)\frac{81}{25}\ (c)\ \frac{205}{81}\ (d)\frac{49}{8}\ (e)\ -1\ (f)\frac{-110}{21}$

$(g)0,77 = \frac{77}{100}\ (h)\ \frac{-12}{5}\ (i) -7\ \ (j)3$

(2)
$(a)\frac{-35}{3}\ (b)1\ (c)\frac{18}{5}\ (d)\frac{-33}{40}\ (e)\frac{-16}{63}\ (f)\frac{-7}{15}$

$(g)\frac{22}{15}\ (h)\ \frac{-20}{9}\ (i)\frac{1}{3}\ (j)\frac{-1}{4}\ (k)\frac{-18}{25}\ (l)\frac{7}{12}$

(3) 42 **(4)** $\frac{25}{9}$ **(5)** 105cm^2 **(6)** $\frac{9}{25}$

(7) $(a)\frac{1}{4}\ (b)\frac{1}{6}\ (c)\ \frac{1}{6}$ **(8)** $\frac{1}{4}$ **(9)** 90 **(10)** $\frac{1}{3}$

(11) $\frac{1}{16}$ **(12)** 6,6 litros **(13)** ₡1500

1.4 Potencia y radicación de números racionales

(1) $(a)\frac{125}{64}\ (b)\frac{16}{81}\ (c)\ \frac{1}{32}\ (d)1\ (e)\ \frac{8}{7}\ (f)\frac{125}{4}\ (g)\frac{625}{256}\ (h)\ \frac{-1}{6561}\ (i) -243\ (j)\frac{2401}{256}$

(2) $(a)10\ (b)10\ (c)\ 2\ (d)5\ (e)\ -2\ (f)-6\ (g)8\ (h)\ 3\ (i)24\ (j)\ 15\ (k)\ 40\ (l)\ -21\ (m) -32\ (n)84$

(3) $(a)\frac{10}{11}\ (b)\frac{6}{5}\ (c)\ \frac{-1}{2}\ (d)\ \frac{1}{2}\ (e)\ \frac{1}{2}\ (f)\frac{13}{7}\ (g)\ \frac{-3}{2}\ (h)\ \frac{11}{14}\ (i)\frac{3}{2}\ (j)\frac{1}{2}$

(4) $\frac{24}{7}$ **(5)** $(a)\frac{3}{14}\ (b)\frac{121}{75}\ (c)\ \frac{7}{15}\ (d)\frac{4}{9}\ (e)\ \frac{257}{9}\ (f)\frac{5}{3}\ (g)\frac{12}{5}$ **(6)** $5\frac{7}{12}$

Respuestas Geometría

2.1 Homotecias

(1) (I) (a) $\overline{MT}$ (b) N (c) $\measuredangle MTQ$ (d) $k<-1$

(II) (a) $\overline{HP}$ (b) K (c) $\measuredangle PHK$ (d) $k>1$

(III) (a) $\overline{MT}$ (b) M (c) $\measuredangle MRT$ (d) $0<k<1$

(IV) (a) $\overline{HV}$ (b) V (c) $\measuredangle VHJ$ (d) $k=-1$

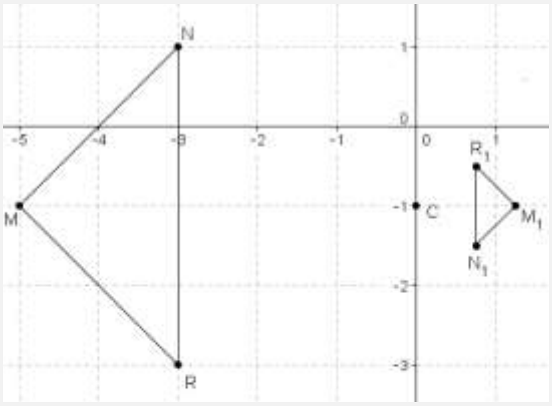
(2) (a) $\overline{UF}$ (b) $\measuredangle A$ (c) U (d) $\overline{AR}$

(3) (i) C (ii) D (iii) A (iv) A

(4) $\left(\frac{-7}{2},\frac{15}{2}\right)$ **(5)** $\left(\frac{-6}{5},\frac{-6}{5}\right)$

(6) (a) – 1 (b) congruentes

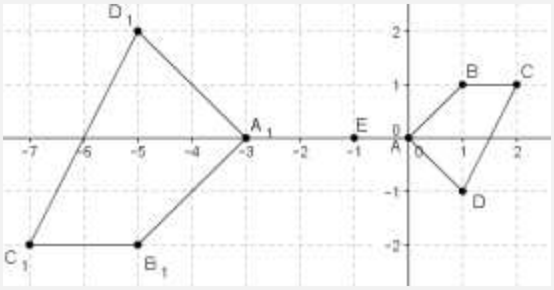
(7) $\Delta M_1N_1R_1$: $M_1\left(\frac{5}{4},-1\right), N_1\left(\frac{3}{4},\frac{-3}{2}\right), R_1\left(\frac{3}{4},\frac{-1}{2}\right)$



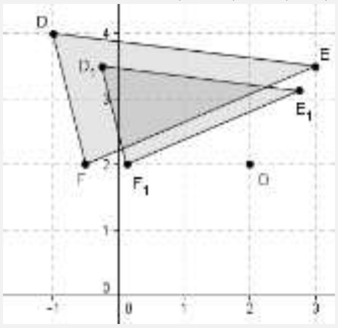
(8)

□ $A_1B_1C_1D_1$:

$A_1(-3,0), B_1(-5,-2), C_1(-7,-2), D_1(-5,2)$



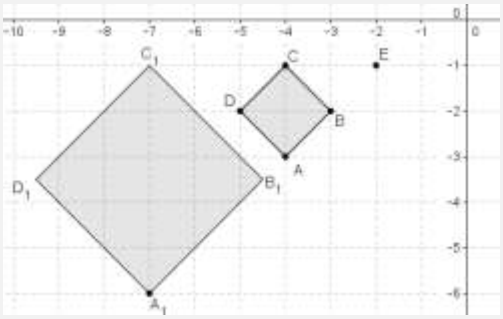
(9) $\Delta D_1F_1E_1$: $D_1\left(\frac{-1}{4},\frac{7}{2}\right), F_1\left(\frac{1}{8},2\right), E_1\left(\frac{11}{4},\frac{25}{8}\right)$



(10)

□ $A_1B_1C_1D_1: A_1(-7,-6), B_1\left(\frac{-9}{2},-\frac{7}{2}\right), C_1(-7,-1),$

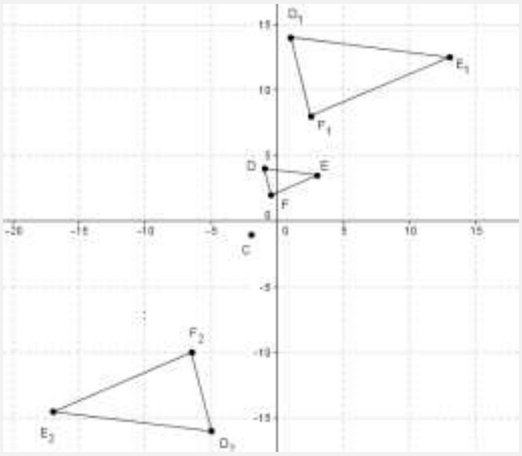
$D_1\left(-\frac{19}{2},\frac{-7}{2}\right)$



(11)

$\Delta D_1E_1F_1$: $D_1(1,14), E_1\left(13,\frac{25}{2}\right), F_1\left(\frac{5}{2},8\right)$

$\Delta D_2E_2F_2$: $D_2(-5,-16), E_2\left(-17,\frac{-29}{2}\right), F_2\left(\frac{-13}{2},-10\right)$



(16) 2,16 **(17)** (a) 2,25 (b) 34°
(18) C y D **(19)** C

2.2 Semejanza y congruencia de triángulos. Teorema de Thales

(4) C **(5)** A, B y D. C y E

(6) (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\measuredangle D$ (d) AB

(7) (a) l-l-l, RTW (b)l-a-l, FEH (c) l-l-l, TRS

(d) a-a, BCA **(8)** A **(9)** (a) PR (b) $\measuredangle Q$

(10) (a) l-l-l (b) CAB (c) $\measuredangle F$ (d) 5 (e) 175 (f) $\measuredangle M$ (g)

$\measuredangle N$ **(11)** C **(12)** B **(13)** 15/4 **(14)** 90°

(15) 64/21 **(16)** 20 **(17)** (a) 1/3 (b) 6 **(18)** 12

(19) A **(20)** $\frac{40}{9}$

(21) (a) 40/3 (b) 32/3 (c) 8/3 (d) 6 (e) 95° (f) 30°

(g) 24 (h) 12 (i) 81/8 (j) 5 (k) 16/3 (l) 20

(22) 15,14m **(23)** 12m

(25) (a) $\measuredangle N$ (b) $\measuredangle F$ (c) $\measuredangle M$

(26) $x = 7$, $y = 10$

(27) (a) l-a-l, TPM (b) l-l-l, FDN (c) a-l -a, KTH

(28) (a) $\measuredangle W$ (b) $\measuredangle D$ (c) $\measuredangle Q$
(d) $\overline{RQ}$ (e) $\overline{WD}$ (f) $\overline{WA}$

(29) (a) 21°(b) 46° (c) 113°

(d) 46° (e) 8cm (f) 10cm (g) 24cm (h) 10cm **(30)** b

(31) $\Delta TPH \cong \Delta TPN \cong \Delta JPH \cong \Delta JPN$
$\Delta NTH \cong \Delta NJH$, $\Delta THJ \cong \Delta TNJ$

(32) (a) 56/5 (b) 35/4 (c) 25 (d) 21/20 (e)1/3 (f) 6 (g)

15 (h) 50 (i) 12 (j) 27

(33) 12m **(34)** (a) sí (b) 12/5

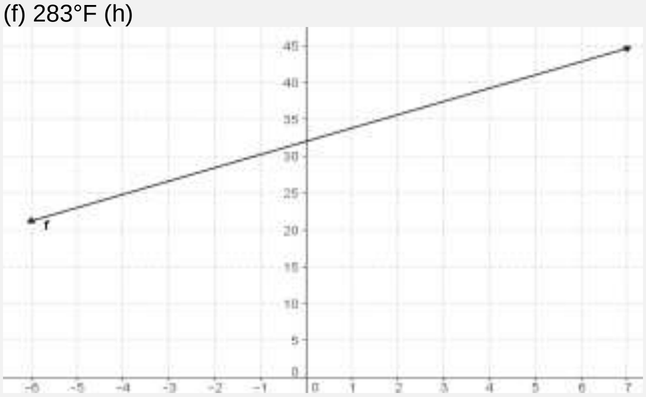
2.4 Prismas y pirámides

(4) (a) cuadrado (b) rectángulo
(5) (a) Cuadrado **(8)** 16 cm

Respuestas Relaciones y Álgebra

3.1 Función Lineal

(1) (a) 32 (b) F(C) (c) C (d) 50° F (e) 40°C
(f) 283°F (h)



(2) (a) 30 (b) T (c) h (d) 5°C
(3) (a) -42,8 (b) m (c) L (d) 8,2 toneladas (e) 42 pies
(4) (a) C(p) = 200 000 + 1000p (b) ₡400 000 (c) 180
(5) (a) 1245 (b) 11
(6) (a)V(x) = 25 000000 + 500 000x (b) V (c)28 000000
(d) x
(7) (a) A: C(x) = 75 000 + 2000x
B: C(x) = 5000x
C: C(x) = 40 000 + 3000x
(b) B (c) C (d) 25h (e) 36
(8) (a) C(x) = 500x + 20 000 (b) ₡45 000 (c) 75
(9) (a) C(x) = 15 300x + 25 650 (b) 23
(10)

C	1	2	3	4	5	6
m	7	9	11	13	15	17

(11)

m	2	4	6	8
D	8	14	20	26

(12) (a) I(g) = 625 + 100g I: ingreso g: goles
(b)

g	0	1	2	3	4	5
I	625	725	825	925	1025	1125

(13) S(h) = 425 000 + 15000h

3.2 Introducción al álgebra

(1) (a) 6 (b) -3 (c) -60 (d) 625 (e) -25/3 (f) 104 (g) -1/2
(2) 100 **(3)** -3/2 **(4)** 10 **(5)** -7/6 **(6)** 4/5 **(7)** 8
(8) 25/16 **(9)** 49/6 **(10)** 15/2 **(11)** 12 **(12)** ₡31 250

3.2 Introducción al álgebra

(13)

Expresión algebraica	Factor (coeficiente) numérico	Factor literal
$-5x^3y$	-5	x^3y
$\frac{5x^3y^8}{7}$	$\frac{-5}{7}$	x^3y^8
8ab	8	ab
y^5	1	y^5
$\frac{8}{9}m$	$\frac{8}{9}$	m
m^3n	1	m^3n
$-x^8z$	-1	x^8z
$3^3d^5m^6$	27	d^5m^6

(14)

Expresión algebraica	Es monomio		No es monomio
	Grado monomio	Grado global	Justificación
$5x^7m^2$	7	9	
$\frac{8x^2}{y}$			Tiene factores literales en el denominador
$-10a^3n^7$	7	10	
$\frac{8x^3y}{5}$	3	4	
-ab	1	2	
$6x^{-5}y$			Exponente negativo
$23m^{\frac{1}{2}}g$			Exponente fraccionario
8mn	1	2	
$\frac{1}{x}$			Literales en el denominador
$5a^7bc^5d^7e^5$	7	25	

(15)

Expresión algebraica	Monomio	Binomio	Trinomio
$-5x^3-y$		X	
$417a^3b^5h^{15}m$	X		
$x-1$		X	
2a– 5m + k			X
$\frac{8m^3n^5}{15}$	X		
$4f^2-5a+y^3$			X
$1+x-2x$		X	

(16)

Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 4
$5mk^2$	6km	$-9k^2m$	$-2km^2$
$\frac{2}{3}x^5y^3$	y^3x	$-5x^5y^3$	$\frac{x^5y^3}{9}$
ab	-ba	5ab	8a
x^2	2x	$5x^2$	x^3

3.3 Suma y resta

(1)
(a) $-3x$ (b) $-a$ (c) $12xy$ (d) $-7/6ab$ (e) $-d$ (f) 0 (g) $10zy$
(h) $3x$ (i) $-2x^2 + x$ (j) $\frac{5}{6}ay - \frac{by}{4}$ (k) $-6a + 3ax + x$
(l) $9 - 24y$ (m) $24ab^2 + 8a^2b$
(2) (a) $3a - b + 15$ (b) $13 + x$ (c) $\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}$ (d) $5y^3 + 5x$
(e) $-5a^2 + 21a - 2$ (f) $\frac{-3x}{4}+\frac{3}{4}$ **(3)** $\frac{9}{2}a+2b+c$

3.4 Leyes de potencias

(a) $-30x^5y$ (b) $\frac{55}{6}a^4$ (c) m^5 (d) $-24x^{\frac{7}{3}}$ (e) $3g^6k$ (f) $6k^2f^{13}$
(g) $\frac{-15a^6b}{28}$ (h) $\frac{-5p^3}{a^2}$ (i) $\frac{-1}{2wz}$ (j) $-3x^6y$ (k) a^{35}
(l) $32a^{25}b^{35}c^{10}$ (m) $\frac{8m^9}{27n^6}$ (n) $\frac{4n^4}{m^3}$ (o) $\frac{h^6}{2p^6}$ (p) $-6a^{34}$
(q) $\frac{x^2}{9}$ (r) $12h^6$ (s) $-70m^4n^8$ (t) $\frac{35}{8}x^6ym^8$ (u) $-9h^3$
(v) $\frac{1}{81k^4j^{48}}$ (w) $\frac{64d^3}{27m^{18}}$
(2) (a) $40h^{13u}d^{10}$ (b) $25x^8y^2$ (c) $24w^{11}$ (d) $\frac{9}{2}a^2b^3$
(3) $7m^5$ **(4)** (a) $x^{6m+4}y^7$ (b) $x^{2m+1}y^{-3n+8}$

3.5 Operaciones con polinomios

(1) (a) $-24m^3+3m^3n$ (b) $\frac{x^4}{2}-x$ (c) $a^3b^3-a^6b$
(d) $3d^3-6d$ (e) $\frac{xw^4}{5}-\frac{w^5}{15}-\frac{xw^3}{5}$ (f) $-p^7-p^3+p^6+5p^2$
(g) $\frac{2r^6}{5}-\frac{4r^4}{35}-\frac{2r^3}{35}$ (h) $a^2h^2-ah^4$
(2) (a) $-12m^3+21m^2$ (b) $3x^{3n+1}-15x^{n+1}+3x^{n+4}$
(c) $3a - a^2 + 6h - h^2$ (d) $y^{4m}-y^{n-4m}$ (e) $3x^2-4y^2$
(f) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}-xy$
(3) (a) $10x^4y^4$ (b) $0{,}03a^9b^6$
(4) (a) $-11m^2n+10m^4+3n^2$ (b) $\frac{10}{3}x^3-x^4-x^2$
(c) $\frac{-2}{5}a^2b^2+b^3-\frac{3}{5}a^3+\frac{3ab}{2}$ (d) $6d^2+43d+7$
(e) $w^8-5h^3w^7-3hw^7-hw+5h^4+3h^2$
(f) $p^3-12p^2+33p+10$ (g) r^3-1 (h) $4h^4+8h^2a-5a^2$
(i) $\frac{8x^2}{9}+\frac{2x}{3}-\frac{x^3}{6}$ (j) $-34a^6+12a^4+10a^8$

(5) $\frac{9a^2+2a^4-5}{2}$ **(6)** $y^2+6y+2xy+12x$
(7) (a) $9x^2+42x+49$ (b) $64m^2+80m+25$
(c) $16h^{14}+72h^7+81$ (d) $y^2+22y+121$
(e) x^2+2x+1 (f) $\frac{x^2}{16}+\frac{9}{2}x+81$
(g) $36k^2+120k+100$ (h) $\frac{9x^2+42x+49}{16}$
(i) $49+\frac{42}{5}m+\frac{9}{25}m^2$
(8) (a) $25y^2-10yw+w^2$ (b) $81-18k+k^2$
(c) $36y^{16}-12y^9+y^2$ (d) $x^2-16x+64$
(e) $9p^4-6p^2+1$ (f) $\frac{w^2}{49}-\frac{18}{7}w+81$
(g) x^3-10x^2+25x (h) $\frac{81-18y+y^2}{49}$
(i) $\frac{4}{25}+\frac{y^7}{5}+\frac{y^{14}}{16}$
(9) (a) $9x^2-1$ (b) $36h^2-h^6$ (c) $25y^6-16$
(d) $\frac{49}{9}-k^2$ (e) $64m^2-m^{14}$ (f) $121-k^2$
(g) a^3-16a (h) $\frac{36-y^2}{9}$ (i) $\frac{49-b^2}{10}$

(10) (a) $h^2+2hn^3+n^6$ (b) $121x^2-y^8$
(c) $4b^4-28b^2a+49a^2$ (d) $\frac{d^4+14d^2+49}{9}$
(e) $w^{14}-h^2$ (f) $4p^4+12p^3+9p^2$ (g) r^2-1
(h) $4h^4-10h^2a+\frac{25a^2}{4}$ (i) $\frac{4}{25}+\frac{4}{15}x+\frac{1}{9}x^2$
(j) a^6-9a^2 (k) $25x^{10}-30x^8+9x^6$
(l) $\frac{h^{18}}{9}+\frac{2}{3}h^{10}+h^2$ (m) $\frac{k^6}{64}-4k^2$
(n) $25c^2+70c+49$ (o) $49p^2-28p+4$
(p) $a^2b^2-10ab+25$ (q) $-x^2+x^2y^6$
(r) $1296-72m^6+m^{12}$ (s) $75x^4+180x^3+108x^2$
(t) $-32y+50y^3$

(11) (a) $-12a^2-26b^2+8ab$ (b) $3m^2+2nm-2n^2$
(c) $9h^2-14hk$ (d) $7ab+5a^2-17b^2$ (e) $4x^2-13x+9$

(k) $15x - 23x^3 - 7$ (l) $-16a^4 + 14a^2 + 3a^6 + 2a^3$

(m) $2y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 6y - 4$ (n) $24x^3h^2 + 10x^6$

3.6 Ecuaciones

(1) (a) 15 (b) 12 (c) -14 (d) -30 (e) -4 (f) -3 (g) -1 (h) -17/3 (i) - 66 (j) 17/7 (k) -3/2 (l) 13/6
(2) (a) – 7 (b) 4/7 (c) 12/11 (d) 0 (e) 16 (f) 7 (g) 5/2 (h) -7/3 (i) - 4 (j) 17/25 (k) 63 (l) ϕ (m) 13/6 (n) 7/6 (ñ) -26/27 (o) 4/3 (p) -32/13 (q) 6,8
(3) (a) -4 (b) -4/5 (c) -1/2 (d) 2/13 (e) 11/17 (f) -9/2 (g) -48 (h) ϕ (i) 12 (j) -6 (k) 15 (l) 16/69 (m) 14/5 (n) $\mathbb{Q}$
(4) a) 35/76 (b) 3/5 (c) 25/9 (d) 3/7 (e) 19/11 (f) -1 (g) -8/21 (h) -7 (i) 49/5 (j) -21/2
(5) (a) 3/2 (b) 25/31 (c) -19/14 (d) 4/13 (e) 30 (f) ϕ (g) 3/7 (h) ϕ (i) -16 (j) -10/3
(6) (a) 0 (b) 6 (c) 7 (d) 11/6 (e) 1/10 (f) 1/7 (g) -7/2 (h) 2/3 **(7)** (a) 1 (b) -2 (c) -1 (d) 9
(8)) (a) b = y – mx (b) $h = \frac{2A}{b}$ (c) $B = \frac{2A}{h} - b$ (d) $b = \frac{P - 2h}{2}$ **(9)** 11/6 **(10)** 6cm **(11)** 105, 8218858
(12) 3h **(13)** 160 kwh **(14)** 19/3
(15) D **(16)** A **(17)** B **(18)** A **(19)** C

(20) (a) Sí, 36/7 (b) Largo 66/5 cm y ancho 9/5 cm (c) Jacobo 10 y Modesto 50 (d) 12 hombres (e) 75º y 105º (f) 15 años (g) 192 (h) 13m (i) 43 años (j) 15/19 (k) 35 (l) 10 (m) 6 (n) 62º (o) 9/5 (p) Adultos ₡1750 Niños ₡1312, 5 (q) 25m (r) 100, 50 y 25

(21) (a) 227 (b) 90 y 60 (c) ₡120 000 (d) Valentín 7,5 h y Jacinta 15 h (e) 8/5 (f) 17 gallinas y 20 ovejas (g) 35 años (h) Fútbol 9 y básquetbol 18 (i) 1 800m (j) 10 (k) 19 (l) 10 (m) 50 años (n) 6 libros
(22) 36 palomas

Cuadro mágico

-4	11/2	3/2	8
9	1/2	9/2	-3
17/2	1	5	-7/2
-5/2	4	0	19/2

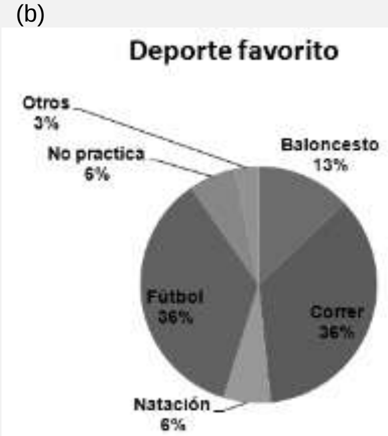
Rompecabezas algebraico

$x(x-5)+5(-x+5)$ $5x(5x+2)$ $y^2+2y-15$ $x(5x-y)-y(x-3)$	$4(x^2-5)+x$ $(y-3)(y+5)$ $25x^2+10x$ x^2-25	$(5x-y)^2$ $(5x+1)^2-1$ y^2-15 $x^2-10x+25$
$5x^2-2xy+3y$ y^2-6y-8 $(x-3y)(x+3y)$ $(-2x^2+x)+(x-x^2)$	$(x-5)(x+5)$ x^2-9y^2 $(x-y-1)(x+y)$ $(2x+1)^2-3(x+1)-18$	$(x-5)^2$ x^2-y^2-y-x $(x-3y)^2$ $-x(3x-2)$
$(x-3)^2-x(4x-8)-9$ $3x^2-(2x^2-9y^2)$ x^2-y^2+yx-x $(2x+1)^2-(3x+20)$	$4x^2+x-20$ $(x^2-y^2)-x(1-y)$ $(-x-3y)^2$ $25x^2-y^2$	$-3x^2+2x$ $x^2+6xy+9y^2$ $(y-3)^2-1$ $(2x-5y)^2$

Respuestas Estadística

(a) El 45, 16% corresponde a hombres y el 54,84% a mujeres

(b)

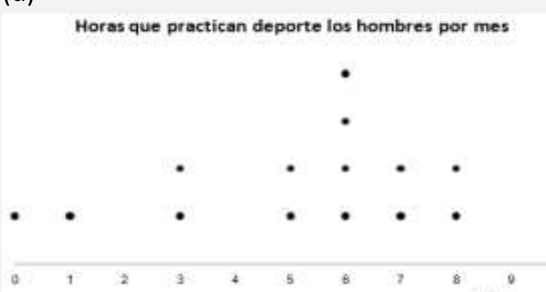


(c)

Deporte favorito según sexo

Deporte	Frecuencias absolutas			Porcentajes		
	Hombres	Mujeres	Totales	Hombres	Mujeres	Totales
Baloncesto	2	2	4	14,3	11,8	12,9
Correr	3	8	11	21,4	47,1	35,5
Natación	0	2	2	0,0	11,8	6,5
Fútbol	8	3	11	57,1	17,6	35,5
No practica	1	1	2	7,1	5,9	6,5
Otros	0	1	1	0,0	5,9	3,2
Totales	14	17	31	100,0	100,0	100

(d)



(e) Moda: 3, 5 y 6 horas. Media: 3,1 horas. Mínimo: 0 Máximo: 9 horas. Recorrido: 9

(f)

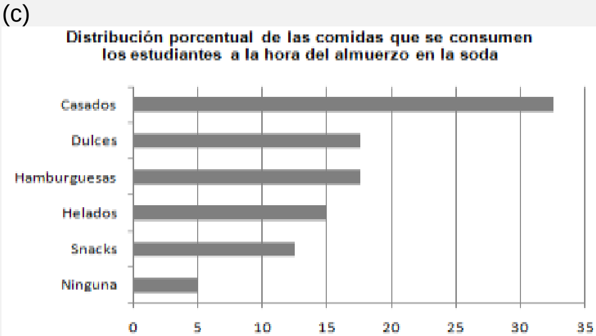
2(a)

Distribución absoluta y porcentual de la cantidad de veces que los estudiantes almuerzan en la soda, según el nivel que cursan.

Días que almuerzan en la soda	Frecuencias absolutas						Porcentajes					
	Sétimo	Octavo	Noveno	Décimo	Undécimo	Totales	Sétimo	Octavo	Noveno	Décimo	Undécimo	Totales
0	2	0	0	1	0	3	25	0	0	10	0	7,5
1	1	1	0	1	0	3	12,5	12,5	0	10	0	7,5
2	3	2	2	2	2	11	37,5	25	33,3	20	25	27,5
3	1	3	1	1	0	6	12,5	37,5	16,7	10	0	15
4	1	2	2	3	2	10	12,5	25	33,3	30	25	25
5	0	0	1	2	4	7	0	0	16,7	20	50	17,5
Totales	8	8	6	10	8	40	100	100	100	100	100	100

(b) Moda: 2 Media: 2,95. Mínimo: 0 Máximo: 5 Recorrido: 5 (d) Undécimo

(c)



3. (a)

(b) 1990 (c) 2006: es cuando se da menor diferencia entre hombres y mujeres nacidos.
(d) Media: 77065. Mínimo: 71 144 Máximo: 81939 Recorrido: 10 795

(4) a)

Estilo de película	Frecuencias absolutas
Acción	3960
Comedia	2904
Terror	2640
Suspenso	1584
Documentales	1056
Drama	1056
Total	13200

5)

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Moda	1	35	8	0,25	14
Media	8,27	28,18	7,18	0,86	17,44
Recorrido	24	47	2	1,55	23
Máximo	25	53	8	1,8	35
Mínimo	1	6	6	0,25	12

(4) (b) Acción **(7)** (a) 24 (b) 6 ausencias (c) 3,87 **(8)** (b) 68 (c) 66,6 (d) 76 y 56 (e) 20 **(9)** (a) 1 (b) 2,25 (c) máx 7 min 1 **(10)** (a) 85 (b) 87,72 (c) máx 100 min 80 **(11)** (a) 21 (b) 43,3 (c) máx 88 min 18 (d) 70 **(12)** (a) 2 (b) 2,51 (c) máx 8 min 0 (d) 8

Respuestas Probabilidad

(1) a) A b) D c) A d) A e) A f) A g) A h) D i) D j) A k) A l) D
(2) a) I b) I c) P d) I e) P f) P g) P h) S i) I j) S **(3)** {(N,N), (B,B),(N,B),(B,N)}
(4) {(L,L,L), (L,L,N),(L,N,N),(L,N,L),(N,N,N),(N,L,N),(N,L,L),(N,N,L)} 1/8
(5) a) {(E,E,E), (E,E,C),(E,C,C),(E,C,E),(C,C,C),(C,E,C),(C,E,E),(C,C,E)} b) 6/8 = 3/4 c) 1/8
(6) a) {1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} d) Obtener una bola con número par y primo e) compuesto f) que sea divisible entre 2 **(7)** 12/36 = 1/3 **(8)** 10/100 = 1/10
(9) a) {Puntarenas, Heredia, San José, Guanacaste, Limón, Alajuela, Cartago} b) 1/7 c) 3/7 **(10)** a) {S,U,E, R,T} c) 2/6 = 1/3 d) son igualmente probables.
(11) a) 3/5 b) 9/24 = 3/8 c) 6/10 = 3/5 d) 9 /24 = 3/8 **(12)** 7/50
(13) b) {1, 2, 3, 4, 5, 6} c) P(1) = 1/36 P(2) =3/36 P(3) =5/36 P(4) = 7/36 P(5) =9/36 P(6)= 11/36. El más probable es el 6 y el menos el 1. **(14)** 1/2 **(15)** 12/20 = 3/5

$(5x-y)^2$ $(5x+1)^2-1$ y^2-15 $x^2-10x+25$	$(x-5)(x+5)$ x^2-9y^2 $(x-y-1)(x+y)$ $(2x+1)^2-3(x+1)-18$	$(x-5)^2$ x^2-y^2-y-x $(x-3y)^2$ $-x(3x-2)$
$(x-3)^2-x(4x-8)-9$ $3x^2-(2x^2-9y^2)$ x^2-y^2+yx-x $(2x+1)^2-(3x+20)$	$5x^2-2xy+3y$ y^2-6y-8 $(x-3y)(x+3y)$ $(-2x^2+x)+(x-x^2)$	$x(x-5)+5(-x+5)$ $5x(5x+2)$ $y^2+2y-15$ $x(5x-y)-y(x-3)$
$-3x^2+2x$ $x^2+6xy+9y^2$ $(y-3)^2-1$ $(2x-5y)^2$	$4x^2+x-20$ $(x^2-y^2)-x(1-y)$ $(-x-3y)^2$ $25x^2-y^2$	$4(x^2-5)+x$ $(y-3)(y+5)$ $25x^2+10x$ x^2-25