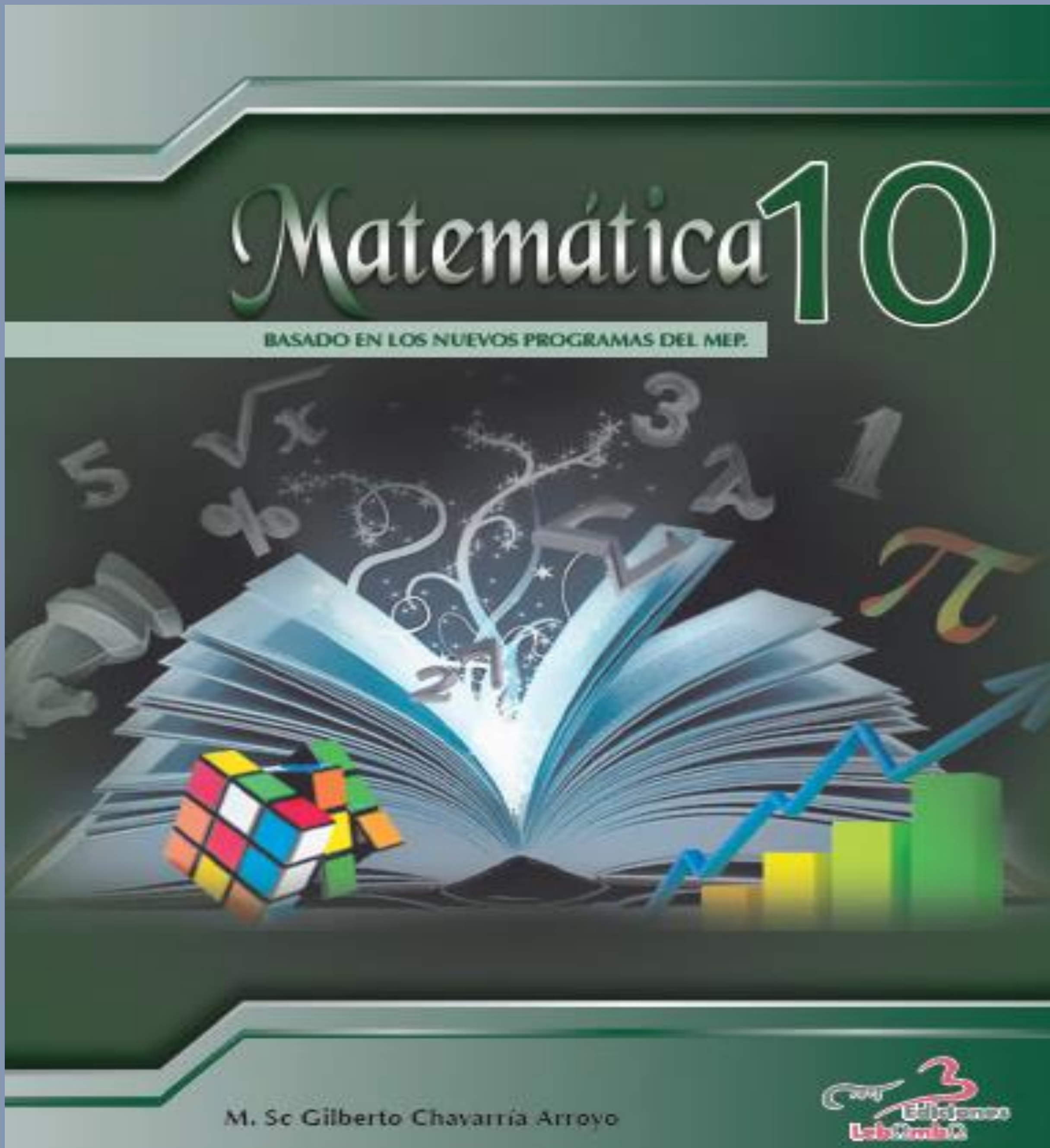


Autor:

M. Sc Gilberto Chavarría Arroyo

ISBN

Edición a cargo de:

Ediciones Lebombo.
Heredia, Costa Rica.
Gilberto Chavarría Arroyo.
Rafael Chavarría Arroyo.

SEGUNDA EDICIÓN, 2017.

Autor y diagramador:

M. Sc Gilberto Chavarría Arroyo.
gilbertochava@yahoo.com
edicioneslebombo@hotmail.com
88 75 1979 / 85 23 7501

Impreso por: E Digital

Ediciones LebΩmbΩ

Tabla de contenidos

GEOMETRÍA

Dibujo realizado por Kevin Jackson. Egresado del CTP Mercedes Norte

Conocimiento:
Circunferencia

Habilidades:

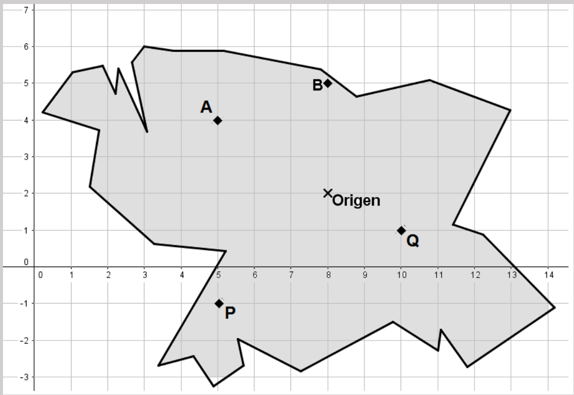
1. Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio.
2. Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.
3. Aplicar traslaciones a una circunferencia.
4. Resolver problemas relacionados con la circunferencia.
5. Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia.

Escenario de aprendizaje

En un sector industrial hubo una fuerte explosión, cuyos gases pueden llegar a ser muy peligrosos para la población cercana. Por tal motivo, la Comisión de Emergencias decide delimitar el área de mayor riesgo, bajo un radio determinado.

En el mapa que se adjunta, correspondiente al municipio donde se dio la emergencia, se ubica el origen de la explosión en la coordenada (8,2).

La Comisión ubica el punto B como uno de los límites del área de evacuación; esto es en la coordenada (8,5).



Suponga que cada unidad del mapa representa 1 km real.

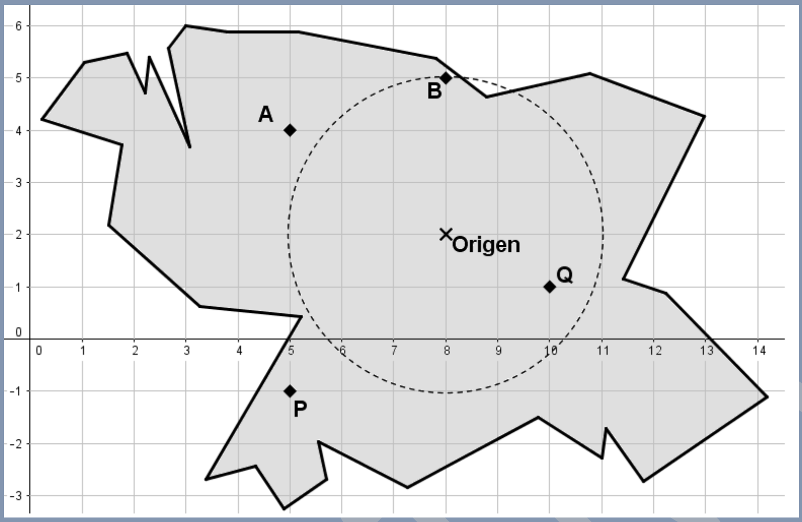
(a) ¿Cuánto mide el radio que usará la Comisión de Emergencias?_____________

(b) Use un compás (o bien el software Geogebra) y trace una circunferencia que tenga por centro el origen (8,2) y que pase por B (8,5) [*Ubica el compás en el centro y lo abre hasta llegar al punto B. Luego traza la circunferencia con esa abertura]*

(c) Según el dibujo, de los poblados A, P y Q, ¿cuáles están en la zona de riesgo?

____

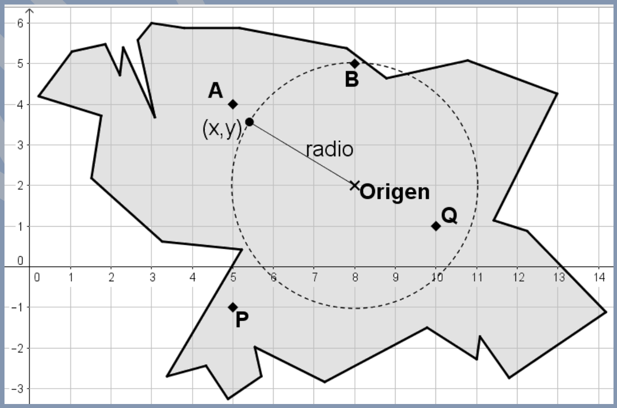
Mediante el uso del plano cartesiano, es fácil dar respuesta a las preguntas anteriores. En la figura se evidencia que el radio es de 3 km, y que los poblados A y P están fuera del área de evacuación, a diferencia del poblado Q



Ahora bien, en ocasiones se puede prescindir del dibujo para poder analizar estas preguntas y esto se consigue determinando algebraicamente la ecuación de la circunferencia, dado su centro de origen y su radio. Para ello recordemos la definición de circunferencia:

Lugar geométrico formado por todos los puntos de un plano que son equidistantes de otro punto coplanar llamado centro.

Usemos esta definición, y tomemos como ejemplo el escenario anterior:



Note que la distancia de cualquier punto (x, y) de la circunferencia a su centro O, es de 3 unidades. Simbólicamente: $d((x,y),(8,2))=3$

De este modo, se procede a usar la fórmula para la distancia entre puntos:

$$\sqrt{(x-8)^2+(y-2)^2}=3$$

Se eleva al cuadrado cada miembro de la ecuación:

$$(x-8)^2+(y-2)^2=3^2$$

Esta expresión que acabamos de obtener, se le conoce como la ecuación de la circunferencia, de centro (8,2) y radio 3.

Definición: Ecuación de una circunferencia

La ecuación de una circunferencia de radio r y de centro (h, k), está dada por

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Para determinar si un punto está en el interior, exterior o en la circunferencia, se procede a analizar la distancia de ese punto al centro y se compara con la medida del radio.

Si esa distancia es mayor que el radio, el punto está en el exterior; si es menor, en el interior; y si es igual a la medida del radio, está en la circunferencia.

- En el escenario, el punto A (5,4) está en el exterior de la circunferencia. Una manera de comprobarlo sería reemplazar los datos en el primer miembro de la ecuación de la circunferencia:

$$x=5,\quad y=4,\quad h=8,\ k=2$$
$$(5-8)^2+(5-2)^2=18>\underbrace{3^2}_{r^2}$$

- Con el punto Q(10,1):

$$x=10,\quad y=1,\quad h=8,\ k=2$$
$$(10-8)^2+(1-2)^2=5<\underbrace{3^2}_{r^2}$$

Se concluye que Q está en el interior de la circunferencia.

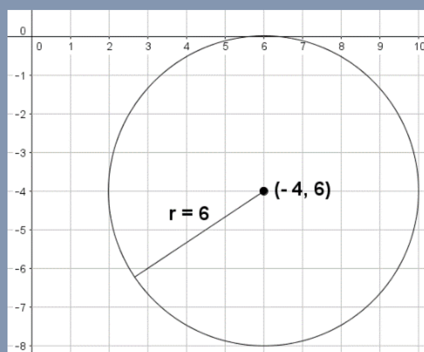
- Con el punto B(8,5)

$$x=8,\quad y=5,\quad h=8,\ k=2$$
$$(8-8)^2+(5-2)^2=3^2=r^2$$

.Ejemplo

- Determine la ecuación que representa a la circunferencia de radio 6 y cuyo centro es el punto (– 4, 6). Grafíquela.

$$(x-{}^{-}4)^2+(y-6)^2=6^2$$
$$\Rightarrow (x+4)^2+(y-6)^2=36$$



SÍNTESIS

Dada una circunferencia de centro (h.k) y radio “r” y un punto P (a,b)

P está en el **interior** de la circunferencia si

$$(a-h)^2+(b-k)^2<r^2$$

P está en el **exterior** de la circunferencia si

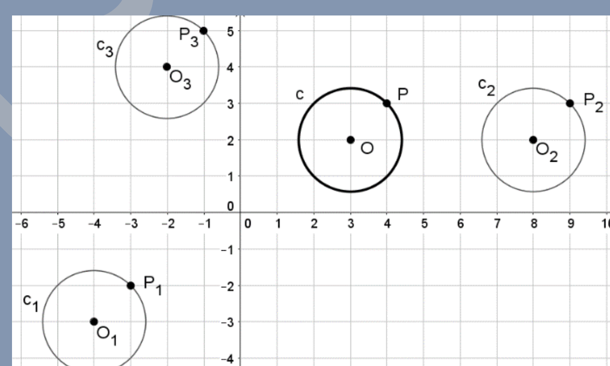
$$(a-h)^2+(b-k)^2>r^2$$

P está **en la** circunferencia si

$$(a-h)^2+(b-k)^2=r^2$$

Traslación de circunferencias

En la siguiente figura se presenta una circunferencia C y tres diferentes traslaciones de esta.

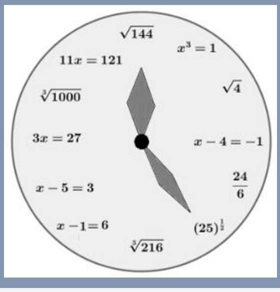


Note que:

- La circunferencia “c_1” es el resultado de trasladar “c” 5 unidades hacia abajo y 7 unidades hacia la izquierda.
- La circunferencia “c_2”es el resultado de trasladar “c” 5 unidades a la derecha.
- La circunferencia “c_3” es el resultado de trasladar “c” 5 unidades a la izquierda y 2 hacia arriba.

Escriba las ecuaciones de cada circunferencia

Tiempo para practicar 1.1



1. Construya en un plano cartesiano cada una de las circunferencias, según los datos proporcionados. [También puede usar software como el Geogebra, el cual se descarga gratuitamente en www.geogebra.org]

(a) Centro (-1,2) y radio 5

(b) Centro en el origen y radio 4

(c) Centro en (-5,0) y radio ½

(d) Centro (0,4) y diámetro 6

(e) Diámetro cuyos extremos son los puntos (4,2) y (8,4)

(f) Centro (0,-2) y pasa por el punto (2,-4)

2. En cada caso, determine el centro de la circunferencia y la medida de su radio.

(a) La ecuación de la circunferencia está dada por $(x-7)^2 + (y+1)^2 = 49$

(b) La ecuación de la circunferencia está dada por $x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = 1$

(c) La ecuación de la circunferencia está dada por $x^2 + y^2 = 8$

(d) Los extremos de un diámetro son (4,2) y (8,4)

(e) La ecuación de la circunferencia está dada por $2(x+7)^2 + 2y^2 = 50$

3. Halle la ecuación de la circunferencia que cumpla las condiciones dadas.

(a) Su centro es (-9,5) y el radio es de 6

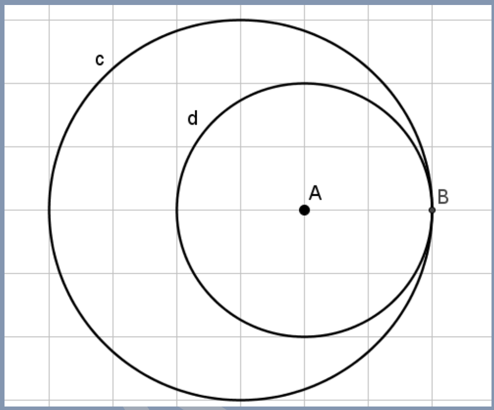
(b) Su centro coincide con el punto 7 del eje "x" y su radio es de 4

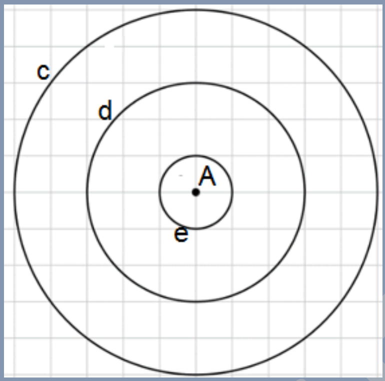
(c) Su centro está en el origen y su radio es de $\frac{1}{3}$

(d) Un diámetro tiene de extremos (2,-5) y (3,-3)

(e) Pasa por (1,3) y su centro es (4,-1)

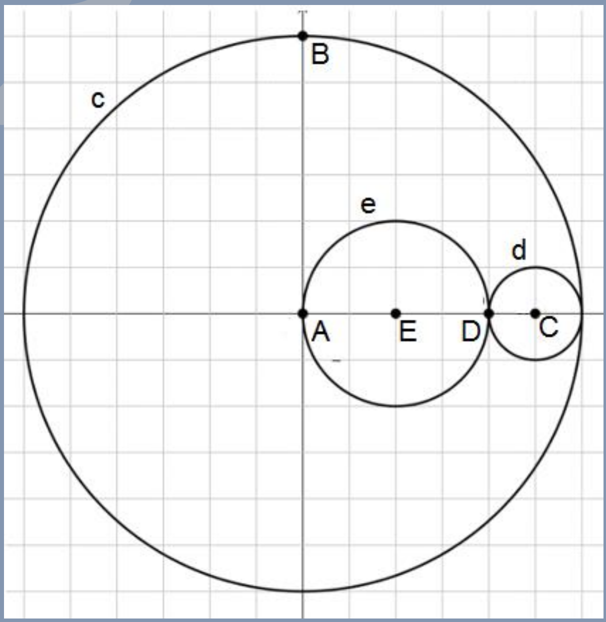
4. En la figura adjunta, la ecuación de la circunferencia "c" está dada por $(x-2)^2+y^2=9$ y en punto B pertenece a ambas circunferencias. Determine la ecuación de la circunferencia "d".

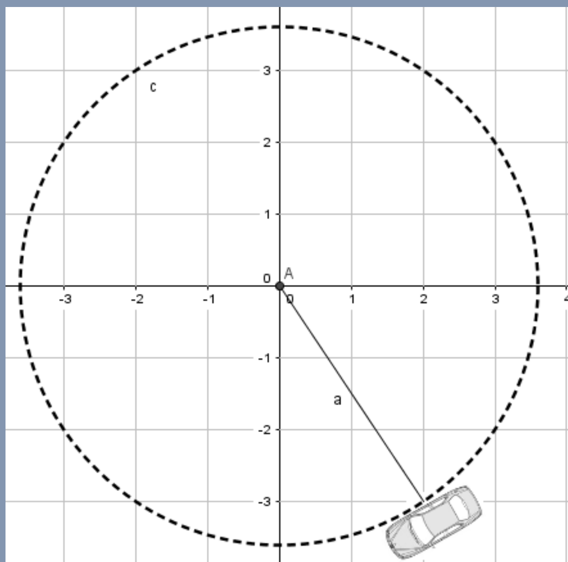




5. En la figura adjunta, A es el centro de las circunferencias "c", "d" y "e". La ecuación de "d" está dada por $(x-6)^2+(y-4)^2=9$. Determine la ecuación de "c" y de "e"

6. En la figura adjunta, A – E –D –C, donde D es el único punto común entre las circunferencias "e" y "d". El radio de la circunferencia "c" es de 12 unidades y está centrada en el origen. Determine la ecuación de las circunferencias "c", "e" y "d"





7. Un carro de juguete que funciona con baterías, es atado con una cuerda, la cual a su vez está sostenida a un palo. De este modo el carro gira formando una circunferencia alrededor del palo. Si cada unidad de la figura adjunta representa 10 cm, ¿cuánto mide el radio de esa trayectoria?

8. Un móvil se desplaza con movimiento circular uniforme. La ecuación de su órbita está dada por $(y-5)^2+(x-6)^2=16$. Determine las coordenadas de la órbita y su radio.

9. En cada caso, determine si el punto P pertenece a la circunferencia, o bien si está en el interior o exterior de esta. Justifique su respuesta.

(a) Ecuación de la circunferencia: $x^2+y^2=8$. P (2,3)
(b) Ecuación de la circunferencia: $x^2+y^2=8$. P (-2,-2)
(c) Ecuación de la circunferencia: $x^2+(y+2)^2=12$. P (1,-2)
(d) Ecuación de la circunferencia: $x^2+(y+2)^2=12$. P (4,0)
(e) Circunferencia de centro (-3,5) y radio 3. P(-6,5)
(f) Circunferencia de centro (-3,5) y radio 3. P(-5,2)
(g) Los extremos de un diámetro son los puntos (-3,3), (3,7). P (-2,8)
(h) Los extremos de un diámetro son los puntos (-3,3), (3,7). P (1,8)

10. Grafique la circunferencia que se obtiene de la traslación de “c”, según cada caso. Además determine la ecuación de esa circunferencia

(a) “c”: $(x+1)^2+(y-2)^2=4$. Trasladar 2 unidades a la derecha y 1 hacia abajo.
(b) “c”: $x^2+y^2=36$. Trasladar 3 unidades a la izquierda y 2 hacia arriba.
(c) “c”: $x^2+(y+5)^2=1$. Trasladar 5 unidades hacia arriba.

Conocimiento: Rectas exterior, secante y tangente

Habilidades:
6. Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia.
7. Representar gráfica y algebraicamente rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia.

Repaso: Trazo de una recta

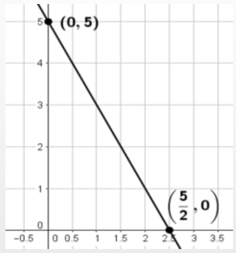
Recuerde que para trazar una recta, dada su ecuación, basta con ubicar dos puntos que pertenezcan a la misma y se traza una línea que pase por ellos.
Estos puntos pueden ser las intersecciones con el "x" y "y".
Dada la ecuación de la forma y = mx +b, la intersección con el eje "y" está dada por (0,b), mientras que el eje "x" mediante $\left(\frac{-b}{m},0\right)$

Ejemplo:
Graficar la recta y = - 2x + 5

Intersecciones:

Eje "x" $\rightarrow \left(\frac{-5}{-2},0\right)=\left(\frac{5}{2},0\right)$

Eje "y" $\rightarrow (0,5)$



También se puede escoger cualquier valor para "x" y reemplazarlo en la ecuación y así se obtiene su respectiva coordenada en "y"

Recordemos algunas definiciones referentes a rectas y circunferencias en un mismo plano:

- Recta secante: Es aquella recta que contiene dos puntos de una circunferencia.
- Recta tangente: Es una recta que contiene solo un punto de la circunferencia.
- Recta exterior: Es una recta que no contiene puntos de la circunferencia.

Dadas las ecuaciones de una circunferencia y de una recta, para determinar si la recta es tangente, exterior o secante, basta con determinar la cantidad de puntos que comparten ambas. Esto se puede conocer mediante dos métodos:

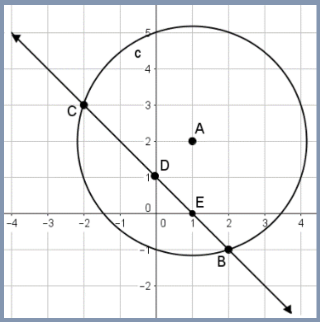
- Graficar la recta y la circunferencia.
- Realizar un estudio algebraico con las ecuaciones dadas.

Ejemplos

En cada caso determine si la circunferencia y la recta dadas, son secantes, exteriores o tangentes.

1) C: $(x-1)^2+(y-2)^2=10$, recta $y=1-x$

El método gráfico consiste en trazar la circunferencia y la recta en un mismo plano. Recuerde que para graficar la recta, basta con ubicar dos puntos que pertenezcan a la misma y se traza una línea que pase por ellos. En este caso los puntos que usaremos son las intersecciones con los ejes cartesianos, pero se podría usar cualquier otro.



Datos de la circunferencia.

Centro (1,2) Radio $\sqrt{10} \approx 3{,}16$

Datos de la recta.

Pasa por los puntos (0,1),(1,0)

Al graficar, se evidencia que la recta es secante a la circunferencia. Además los puntos en común son (-2,3) y (2,-1)

El método algebraico consiste en resolver un sistema de ecuaciones. Es decir, buscar los puntos que satisfacen al mismo tiempo ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=10 \\ y=1-x \end{cases}$$

Hay diversas maneras de abordar este ejercicio. En este caso, reemplazaremos la expresión $y=1-x$ en la ecuación de la circunferencia:

$$(x-1)^2+(\underbrace{1-x}_{\text{se hizo reemplazo}}-2)^2=10$$

Luego se resuelve la ecuación cuadrática:

$$(x-1)^2+(1-x-2)^2=10$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2+(-1-x)^2=10$$
$$\Rightarrow\ x^2-2x+1+1+2x+x^2=10$$
$$\Rightarrow\ 2x^2+2-10=0 \Rightarrow\ 2x^2-8=0$$
$$\Rightarrow\ x^2=\frac{8}{2} \Rightarrow x=\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

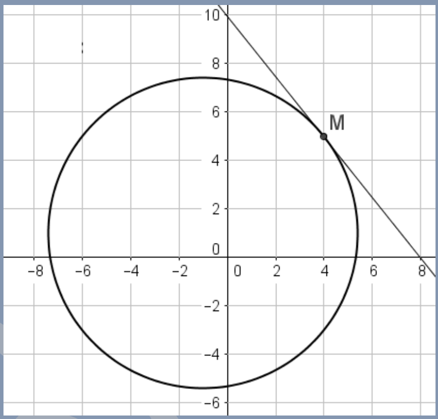
Ahora, estos valores se reemplazan en la ecuación de la recta, para encontrar su coordenada "y":

$$\begin{cases} \text{Cuando } x=2, \text{ entonces } y=1-2=-1 \\ \text{Cuando } x=-2, \text{ entonces } y=1-{}^{-}2=3 \end{cases}$$

De esta forma hemos determinado que los puntos (2, -1), (-2, 3) son intersecciones de la circunferencia con la recta dada, por tanto la recta es secante.

2) C: $(x+1)^2+(y-1)^2=41$, recta $y=\dfrac{-5x}{4}+10$

$$(x+1)^2+\left(\frac{-5x}{4}+10-1\right)^2=41$$
$$\Rightarrow\left(x^2+2x+1\right)+\left(\frac{25}{16}x^2-\frac{45}{2}x+81\right)=41$$
$$\Rightarrow\frac{41}{16}x^2-\frac{41}{2}x+82-41=0$$
$$\Rightarrow\frac{41}{16}x^2-\frac{41}{2}x+41=0$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(\frac{41}{2}\right)^2-4\bullet\frac{41}{16}\bullet 41}=0 \text{ Hay una única solución}$$
$$x=\frac{\frac{41}{2}+0}{2\bullet\frac{41}{16}}=4$$



El valor de "y" cuando x = 4 se obtiene: $y=\dfrac{-5\bullet 4}{4}+10=5$

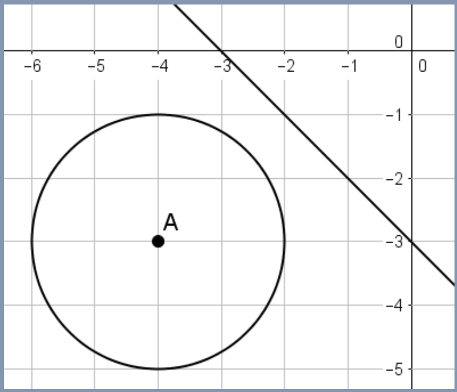
La recta es tangente a la circunferencia en el punto (4,5)

3) C: Con centro (-4,-3) y radio 2, recta $x+y=-3$

Expresamos las ecuaciones de manera como lo hemos trabajado anteriormente:

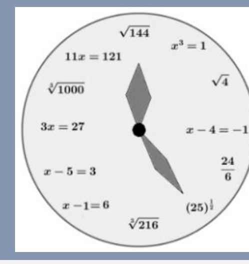
C: $(x+4)^2+(y+3)^2=4$ Recta: $y=-x-3$

$$(x+4)^2+(-x-3+3)^2=4$$
$$\Rightarrow x^2+8x+16+x^2=4$$
$$\Rightarrow 2x^2+8x+16-4=0$$
$$\Rightarrow 2x^2+8x+12=0$$
$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{8^2-4\bullet 2\bullet 12}=\sqrt{-32}$$



Al no haber solución, significa que no existen puntos en común entre la circunferencia y la recta, por lo cual, la recta es exterior a dicha circunferencia.

Tiempo para practicar 1.2



1. En cada caso, se le da información sobre una circunferencia y una recta. Determine si la recta es secante, tangente o exterior a la circunferencia dada. En los dos primeros casos, determine también los puntos de intersección

(a) C: $(x-2)^2+(y+1)^2=5$ Recta $y=2x-10$

(b) C: $x^2+y^2=4$ Recta $-2x+2y=0$

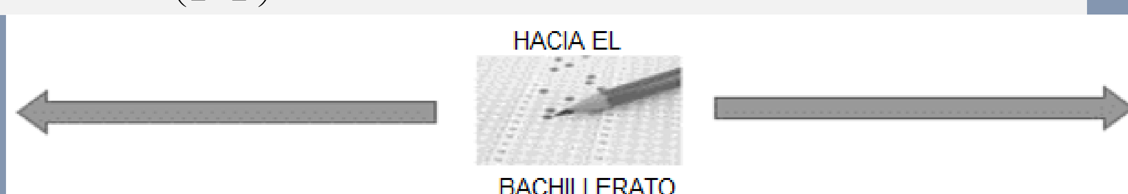
(c) C: Centro (-3,2) y radio: $\sqrt{13}$ Recta $3y=2x$

(d) C: $(x-1)^2+(y-4)^2=5$ Recta $x+y=1$

(e) C: $(x+2)^2+(y+3)^2=20$ Recta $y=\frac{x}{2}+3$

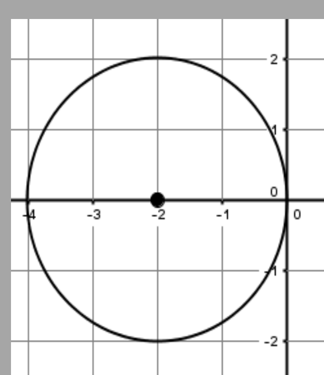
(f) C: $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ Recta $y=0$ (eje x)

(g) C: Centro $\left(\frac{5}{2},\frac{-3}{2}\right)$ y radio: $\sqrt{2}$ Recta $y=1$



Analice el siguiente escenario

Considere la siguiente figura que representa una circunferencia.



De acuerdo con la información proporcionada, conteste las preguntas 1 a 3.

1) Un punto que pertenece a la circunferencia corresponde a

(A) $\left(-1,-1\right)$	(B) $\left(-3,\sqrt{3}\right)$
(C) $\left(-2,-3\right)$	(D) $\left(2,-2\right)$

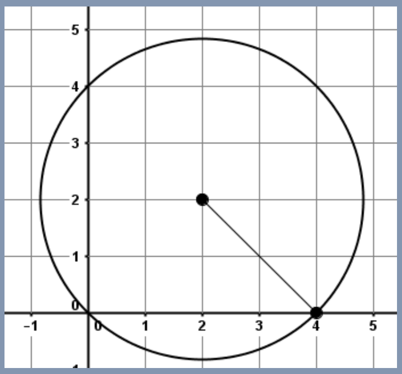
2) La ecuación de la circunferencia corresponde a

(A) $(x+2)^2+y^2=4$	(B) $(x-2)^2+y^2=2$
(C) $x^2+\left(y+2\right)^2=4$	(D) $x^2+\left(y+2\right)^2=2$

3) El punto de tangencia de la recta $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-x+2\right)$ con la circunferencia es el siguiente

(A) $\left(-\frac{4}{3},1\right)$	(B) $\left(-1,\frac{4}{3}\right)$
(C) $\left(-2,-2\right)$	(D) $\left(-2,2\right)$

4) La figura adjunta representa una circunferencia. De acuerdo con los datos proporcionados, el radio de la circunferencia mide



(A) $2\sqrt{2}$	(B) 2
(C) 8	(D) 16

5) Considere las siguientes proposiciones referidas a una circunferencia “C” cuya ecuación es $(y+1)^2+\left(x-7\right)^2=9$

I. El centro de “C” es el punto (-1,7)

II. El punto (9,-3) está en el interior de C

De ellas, son verdaderas

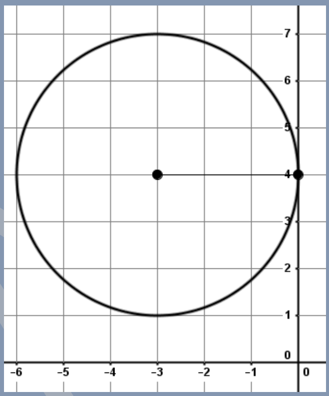
(A) solo la I	(B) ambas
(C) ninguna	(D) solo la II

6) El centro de una circunferencia "C" de radio $\sqrt{2}$ es $(2,7)$. Una recta tangente a "C" corresponde a

(A) $y=6x+1$ (B) $y=-x+11$

(C) $y=-3x+4$ (D) $y=7$

7) La figura adjunta representa una circunferencia. De acuerdo con los datos proporcionados, la ecuación de la circunferencia corresponde a



(A) $(x-3)^2+(y+4)^2=3$	(B) $(x+3)^2+(y-4)^2=3$
(C) $(x+3)^2+(y-4)^2=9$	(D) $(x-3)^2+(y+4)^2=9$

Analice el siguiente escenario

La ecuación de una circunferencia está dada por $3(x+8)^2+3y^2=15$.

De acuerdo con la información anterior, conteste las preguntas 8 y 9.

8) La ecuación de una circunferencia está dada por $3(x+8)^2+3y^2=15$. El centro de esa circunferencia está dada por

(A) $(-8,0)$	(B) $(8,0)$
(C) $(-8,3)$	(D) $(0,-8)$

9) La medida del radio de la circunferencia corresponde a

(A) 5	(B) $\sqrt{5}$
(C) 15	(D) $\sqrt{15}$

10) La ecuación de una circunferencia está dada por $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+(y-1)^2=3$. El radio de esa circunferencia mide

(A) $\sqrt{3}$	(B) $\frac{4}{3}$
(C) 3	(D) 9

11) Los extremos de un diámetro de una circunferencia son $(6,1)$ y $(6,6)$y. El radio de esa circunferencia mide

(A) 2,5	(B) 6,25
(C) 5	(D) 1,5

12) La ecuación de una circunferencia cuyo centro coincide con el punto -5 del eje de las ordenadas y su radio es de 12, corresponde a

(A) $(x+5)^2+y^2=12$	(B) $x^2+(y-5)^2=12$
(C) $(x-5)^2+y^2=\sqrt{12}$	(D) $x^2+(y+5)^2=144$

Analice el siguiente escenario

La ecuación de una circunferencia está dada por $6x^2+6(y-7)^2=150$.

De acuerdo con la información anterior, conteste las preguntas 13, 14 y 15

13) La medida del radio de la circunferencia es la siguiente

14) Considere las siguientes proposiciones referidas a la circunferencia

I. El punto $(5,2)$ es exterior a la circunferencia

II. La recta $y=\frac{3}{2}x+3$ es secante a la circunferencia

De ellas, son verdaderas

(A) solo la I	(B) ambas
(C) ninguna	(D) solo la II

15) Si la circunferencia es trasladada 3 unidades a la derecha y dos hacia abajo, la ecuación resultante corresponde a

(A) $(x-3)^2+(y-2)^2=25$	(B) $(x-3)^2+(y-5)^2=5^2$
(C) $(x+3)^2+(y-10)^2=25$	(D) $(x+3)^2+(y+2)^2=5^2$

16) Considere la circunferencia cuya ecuación es C: $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.
Analice las siguientes proposiciones

I. La recta $y=1-x$ es secante a C en los puntos (-2,3) y (2,-1)

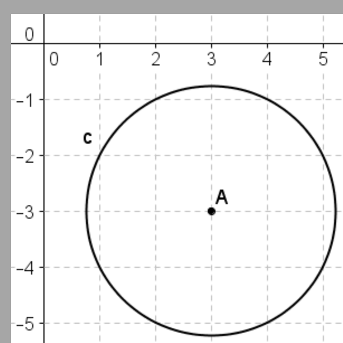
II. El centro de C es (-1,-2)

De ellas, son verdaderas

(A) solo la I	(B) ambas
(C) ninguna	(D) solo la II

Analice el siguiente escenario:

A la circunferencia “c” de la figura, se le aplica una traslación de vector (– 2, 3), obteniendo una circunferencia “d”.



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 17 y 18

17) Según esa información, analice las siguientes proposiciones.

I. La ecuación de “d” está dada por $(x-1)^2+y^2=5$

II. En la circunferencia “c” se cumple que $r<2$

De ellas, con certeza son verdaderas

(A) Ambas	(B) Solo la II
(C) Ninguna	(D) Solo la I

18) Un punto que es interior tanto de “c” como de “d” corresponde a

(A) $(1,-1)$	(B) $\left(2,\frac{-3}{2}\right)$
(C) $(3,-1)$	(D) $(2,-3)$

19) En dos establecimientos de un Mall tienen modem inalámbricos cuya señal tiene una cobertura de alcance circular. Si se consideran los dos locales en un mismo plano, las ecuaciones de alcance, están dadas por:

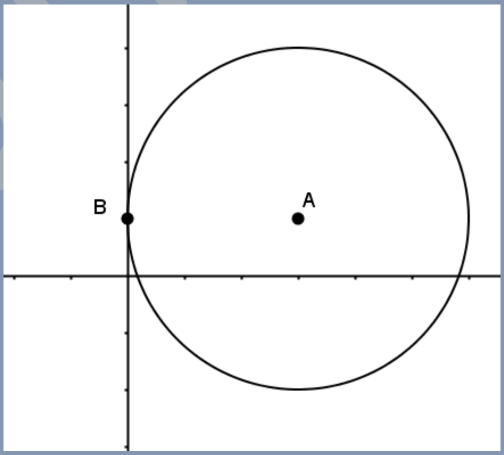
Local A $(x-3)^2+(y-3)^2=4$

Local B $(x-7)^2+(y-7)^2=37$

Si una persona está ubicada en las coordenadas (4,2), entonces, ¿cuál o cuáles señales pueden percibir su celular?

(A) Ninguna	(B) Solo del local B
(C) Solo del local A	(D) Del local A y B

20) En la figura adjunta, la circunferencia de centro A (3,1) es tangente al eje “y” en el punto (0,1).



Según la información, considere las proposiciones:

I. La recta $y=4$ es tangente a la circunferencia
II. La recta $y=-x+7$ es secante a la circunferencia.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

(A) Ambas	(B) Solo la I
(C) Ninguna	(D) Solo la II

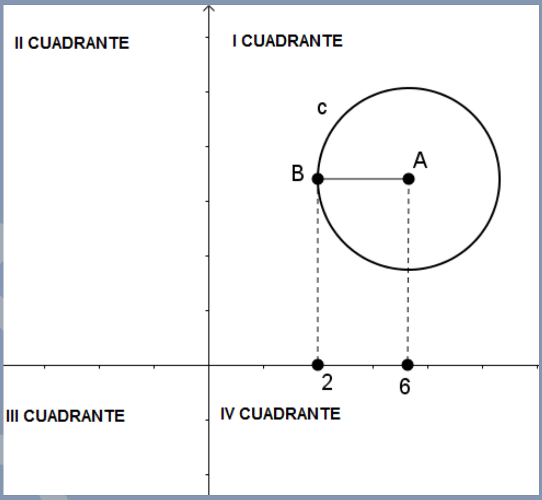
21) Los extremos de un radio de una circunferencia son los puntos M (1,3) N (3,2), donde N es el centro de la circunferencia. Entonces la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto M corresponde a

(A) $y=\frac{1}{2}x+1$	(B) $y=2x+1$
(C) $y=\frac{-1}{2}x+1$	(D) $y=-2x+1$

22) A la circunferencia dada por $x^2+y^2=9$ se le aplica una traslación, de modo que su centro se ubique en el III cuadrante y ambos ejes sean tangentes a esa circunferencia. ¿cuál es la ecuación de esa circunferencia?

(A) $(x+3)^2+(y+3)^2=9$ (B) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$
(C) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ (D) $(x-3)^2+(y+3)^2=9$

23) Si c' es una traslación de c, de modo que ambos ejes coordenados sean tangentes a c' y su centro se ubique en el IV cuadrante, entonces la ecuación de c' corresponde a



(A) $(x-4)^2+(y+4)^2=16$
(B) $(x+4)^2+(y-4)^2=16$
(C) $(x-4)^2+(y+4)^2=4$
(D) $(x+4)^2+(y-4)^2=4$

Conocimiento: Rectas paralelas y perpendiculares

Habilidades: 8. Analizar geométrica y algebraicamente la posición relativa entre rectas en el plano desde el punto de vista del paralelismo y la perpendicularidad.

Escenario de aprendizaje

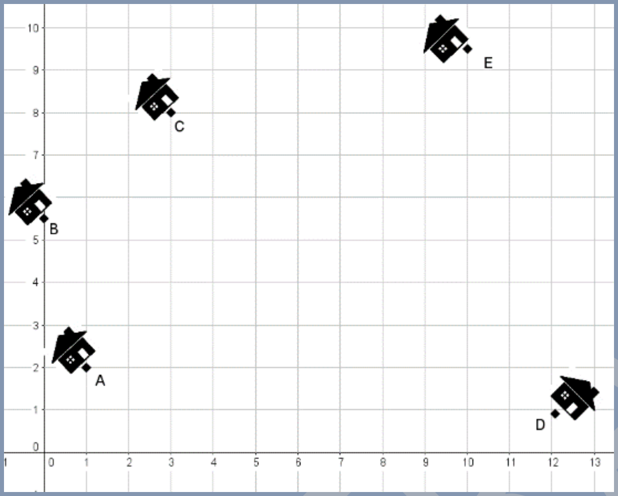
Una ciudad está ordenada mediante calles y avenidas, de tal modo que las calles son perpendiculares a las avenidas. Cinco amigos viven en esa ciudad a distancias cercanas. El de la casa B vive en la calle 1 al igual que el de la casa C.

Las coordenadas en la que están ubicadas las casas son:

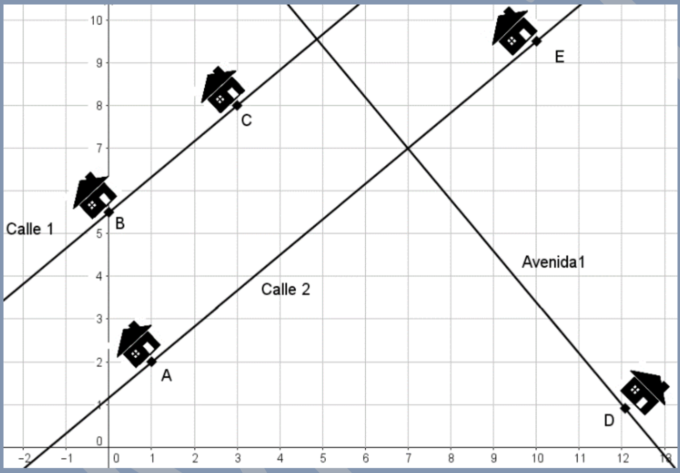
$$A\ (1,2) \quad B\left(0,\frac{11}{2}\right) \quad C(3,8) \quad D(12,1) \quad E\left(10,\frac{19}{2}\right)$$

(a) El amigo de la casa A, ¿vive en una calle o avenida?
(b) El amigo de la casa D, ¿vive en una calle o avenida?
(c) ¿Qué relación cumplen las rectas que representan dos calles diferentes?
(d) ¿Qué relación cumple las rectas que representa una calle, respecto a la que representa una avenida?

Abordaremos este escenario de manera gráfica. Esto es ubicar las casas, según las coordenadas dadas, tomando en cuenta que B y C pertenecen a una misma recta.



Si unimos los puntos dados, mediante rectas, se obtiene:



Se aprecia fácilmente que las casas A y E están en una calle, mientras que la D, en una avenida.

Las calles 1 y 2 son paralelas entre sí, mientras que la avenida 1 es perpendicular a dichas calles.

Si realizamos estas gráficas en un *software* como el *Geogebra*, obtendremos las ecuaciones de cada recta. En este caso, las ecuaciones están dadas por:

Calle 1: $y = \dfrac{5x+33}{6}$

Calle 2: $y = \dfrac{5x+7}{6}$

Avenida 1: $y = \dfrac{-6x+77}{5}$

¿Qué se puede concluir sobre las ecuaciones de las calles 1 y 2? ________________

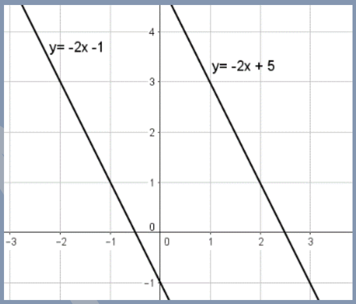
¿Qué se puede concluir sobre las ecuaciones de la Calle 1 y Avenida 1? ___________

Definición: Rectas paralelas y perpendiculares

Rectas paralelas Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 y ℓ_2, cuyos criterios están dados por

$\ell_1 : y = m_1 x + b_1$ y $\ell_2 : y = m_2 x + b_2$ son paralelas, si $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$

Se simboliza $\ell_1 \parallel \ell_2$



Ejemplo:

Justifique por qué la recta dada por $y = -2x + 5$ es paralela a la recta determinada por la ecuación $y = -2x - 1$

Basta con analizar que $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$.

Rectas perpendiculares Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2, cuyos criterios están dados por

$\ell_1 : y = m_1 x + b_1$ y $\ell_2 : y = m_2 x + b_2$ son perpendiculares, si $m_1 = \dfrac{-1}{m_2}$. Es decir,

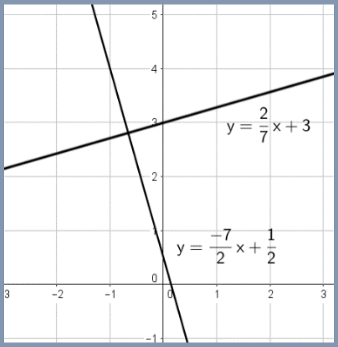
$m_1 \bullet m_2 = -1$

Se simboliza $\ell_1 \perp \ell_2$

Ejemplo:

Analice la relación que cumplen las rectas ℓ_1 y ℓ_2, dadas por

$\ell_1 : \quad y = \dfrac{-7x + 1}{2} \qquad \ell_2 : \; 7y - 21 = 2x$

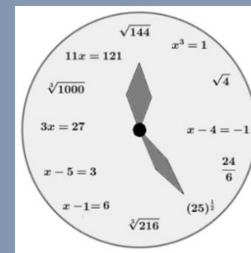


Para ello, acomodamos las ecuaciones de la forma $y = mx + b$ y luego graficamos

$\ell_1 : \quad y = \dfrac{-7x}{2} + \dfrac{1}{2}$, pasa por $\left(0, \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{7}, 0\right)$

$\ell_2 : \; y = \dfrac{2x}{7} + \dfrac{21}{7}$ [despejando “y”], pasa por $(0,3), \left(\dfrac{-21}{2}, 0\right)$

O bien, se analiza los valores m_1 y m_2: $\dfrac{-7}{2} \bullet \dfrac{2}{7} = -1$. Por tanto $\ell_1 \perp \ell_2$



Tiempo para practicar 1.3

1. Mediante el método gráfico, determine si las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas o perpendiculares. [También puede usar software como el Geogebra, el cual se descarga gratuitamente en www.geogebra.org]

(a) $\ell_1:\ y = 2x - 1$ $\qquad$ $\ell_2:\ y = 4 + 2x$

(b) $\ell_1:\ y = \dfrac{3x-5}{2}$ $\qquad$ $\ell_2:\ y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{-2}{3}x$

(c) $\ell_1:\ 4y = 2x + 1$ $\qquad$ $\ell_2:\ y = \dfrac{x}{2}$

(d) $\ell_1:\ 3x - 5y + 2 = 0$ $\qquad$ $\ell_2:\ 6y = -10x + 1$

(e) $\ell_1:\ 7x - 3 = -y$ $\qquad$ $\ell_2:\ 2x + 1 = 14y$

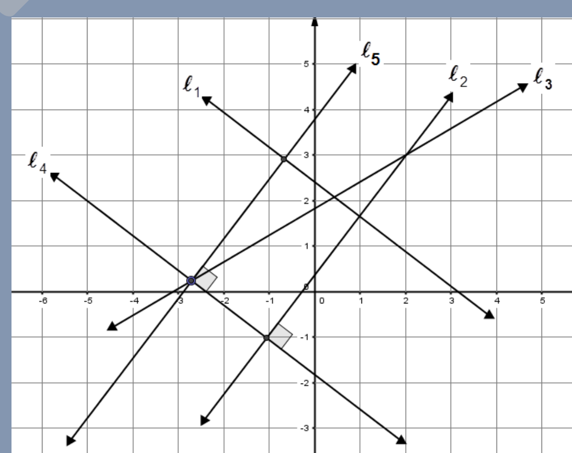
(f) $\ell_1:\ y = \dfrac{-x-3}{4}$ $\qquad$ $\ell_2:\ y = \dfrac{3+8x}{2}$

(g) $\ell_1:\ y = 0$ $\qquad$ $\ell_2:\ y = -9$

HACIA EL

BACHILLERATO

1) De acuerdo con los datos de la figura adjunta, una recta paralela a ℓ_1 corresponde a



(A) ℓ_2	(B) ℓ_3
(C) ℓ_4	(D) ℓ_5

2) Considere las ecuaciones de las rectas ℓ_1 y ℓ_2:

$$\ell_1: \quad y = m_1 x + b_1$$
$$\ell_2: \quad y = m_2 x + b_2$$

Si $\ell_1 \perp \ell_2$, entonces con certeza se cumple que

(A) $m_1 \bullet m_2 = -1$	(B) $m_1 = \dfrac{1}{m_2}$
(C) $m_1 = m_2$	(D) $b_2 = b_1$

3) La ecuación de la recta ℓ_1 está dada por $y = 5x - 3$, entonces la ecuación de una recta paralela a ℓ_1 corresponde a

(A) $y = 9 + 5x$	(B) $y = \dfrac{x}{5} - 3$
(C) $y = \dfrac{x-8}{5}$	(D) $y = 5$

4) La ecuación de la recta ℓ_1 está dada por $8y = 6x + 4$, entonces la ecuación de una recta perpendicular a ℓ_1 corresponde a

(A) $y = \dfrac{3x+1}{4}$	(B) $y = \dfrac{-4x}{3} + 1$
(C) $y = \dfrac{-11+4x}{3}$	(D) $y = \dfrac{-x-5}{6}$

5) Considere las ecuaciones de las rectas ℓ_1 y ℓ_2:

$$\ell_1: \quad y = \frac{2x-1}{3}$$
$$\ell_2: \quad 6y = 4x + 7$$

Según la información proporcionada, se cumple que

(A) ℓ_1 se interseca con ℓ_2	(B) $\ell_1 \perp \ell_2$
(C) $\ell_1 \parallel \ell_2$	(D) la pendiente de ℓ_2 es 4

6) Considere las ecuaciones de las rectas ℓ_1 y ℓ_2:

$$\ell_1: \quad 5y - 1 = 0$$
$$\ell_2: \quad y = -5$$

Según la información proporcionada, se cumple que

(A) $\ell_1 \perp \ell_2$	(B) ℓ_1 se interseca con ℓ_2
(C) $\ell_1 \parallel \ell_2$	(D) la pendiente de ℓ_1 es $\frac{1}{5}$

Abordaje adicional

Determinar la ecuación de una recta dados dos puntos

En la ecuación de la recta ℓ dada por $y = mx + b$, al valor de "m" se le conoce como **pendiente.**

Dados los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que pertenecen a la recta ℓ, se puede determinar el valor de la pendiente, con la siguiente fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

El valor de "b" se puede calcular despejando la ecuación de ℓ, así: $b = y - mx$, donde (x, y) es cualquier punto de la recta.

Ejemplos:

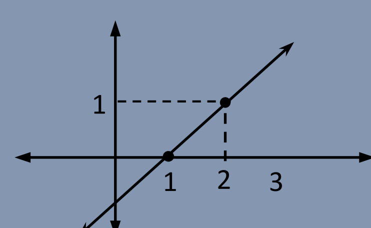
1. Si ℓ es una recta que contiene a (-5, 3) y (-3, -2). Determine la ecuación de ℓ

Solución:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{-3-{}^{-}5} \Rightarrow m = -\frac{5}{2}, \qquad b = 3 - \frac{-5}{2} \bullet -5 = \frac{-19}{2}$$

$$\ell: \quad y = \frac{-5}{2}x - \frac{19}{2} = \frac{-5x - 19}{2}$$

2. De acuerdo con la gráfica adjunta, hallar la ecuación de la recta



Del análisis de la gráfica se concluye que la recta contiene a (1,0) y (2,1). Por tanto se puede determinar primero la pendiente y luego calcular el valor de b y así obtener la ecuación de la recta.

- Cálculo de la pendiente

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-0}{2-1}\Rightarrow m=1$$

- Cálculo de b

$$b=y-mx=1-1\cdot 2=-1\Rightarrow b=-1$$

La ecuación de la recta está definida por $y=x-1$

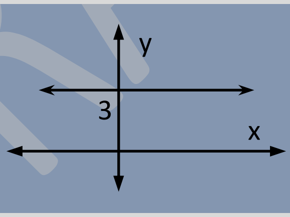
Rectas horizontales y verticales

Una recta de la forma y = k, es horizontal y si está dada por x = k es vertical, con k constante.

Ejemplos:

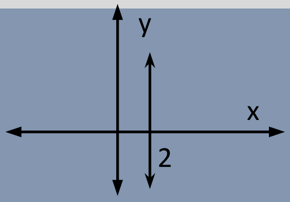
1. Graficar 2y = 6.

Esta ecuación equivale a y = 3, por lo cual es horizontal.



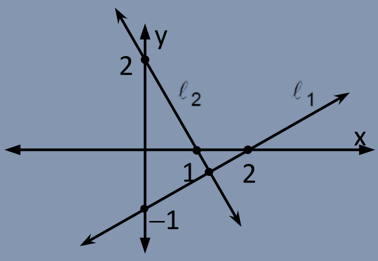
2. Graficar 3x = 6.

Esta ecuación equivale a x = 2, por tanto es vertical.



Problema sobre rectas perpendiculares

1. De acuerdo con la gráfica ajunta, si $\ell_1 \perp \ell_2$ obtener la ecuación de ambas rectas.



- Ecuación de ℓ_1:

Los puntos (0, -1) y (2,0) pertenecen a ℓ_1 por tanto:

$$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-{}^{-}1}{2-0}\Rightarrow m_1=\frac{1}{2}\text{, además } b=-1$$

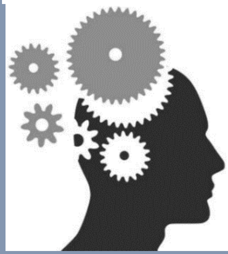
La ecuación de ℓ_1 es $y=\frac{1}{2}x-1$.

- Ecuación de ℓ_2 :

El punto (0,2) pertenece a ℓ_2, entonces b=2, además $m_1=\frac{1}{2}\Rightarrow m_2=-\frac{2}{1}=-2$.

La ecuación de ℓ_2 es $y=-2x+2$.

Teorema sobre Recta tangente a una circunferencia

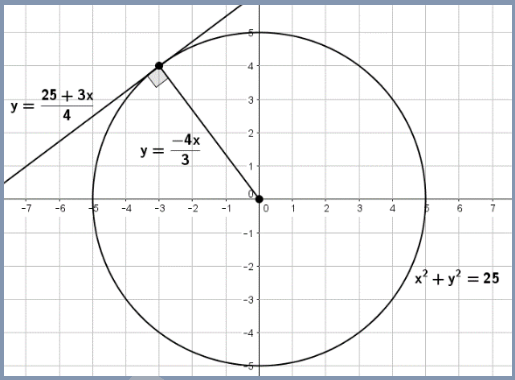


Problema para resolver en clase

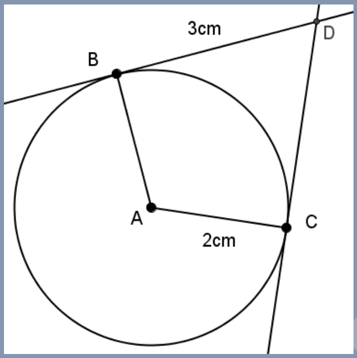
Realicemos la siguiente construcción geométrica. [Puede usarse el software Geogebra]

1. Una circunferencia de centro (0,0) y radio 5.
2. Grafique la recta $y=\dfrac{25+3x}{4}$
3. Compruebe que la recta graficada es tangente a la circunferencia. Determine el punto de tangencia.
4. Trace el radio que va del origen hasta ese punto de tangencia. Determine la ecuación de la recta que contiene a ese radio.
5. Establezca una relación entre la recta tangente y la recta que contiene el radio.

Teorema: Una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la circunferencia, en su punto de tangencia



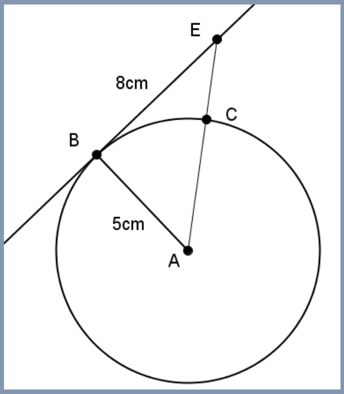
Ejercicio para trabajar en clase.



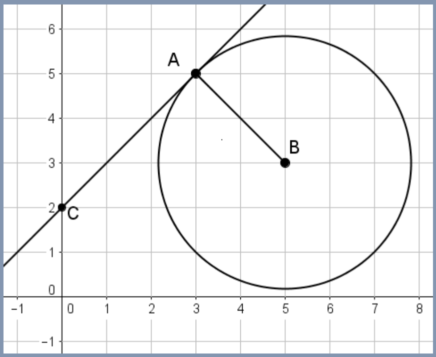
La figura muestra una circunferencia de centro A y dos rectas tangentes a esta en los puntos B y C. Determine la distancia entre el centro de la circunferencia y el punto de tangencia.

Práctica

1. En la figura adjunta, A es el centro de la circunferencia y $\overleftrightarrow{BE}$ es tangente a ella en B.
   (a) Determine la medida del $\measuredangle EBA$
   (b) Determine la medida aproximada de CE



2. Considere la figura adjunta, donde B es el centro de la circunferencia

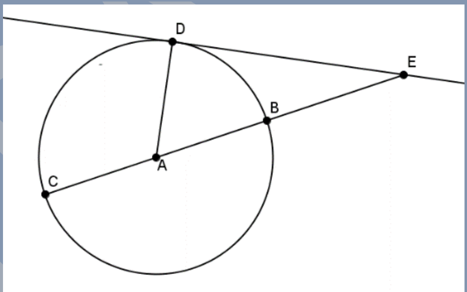


(a) Determine la ecuación de la recta AC

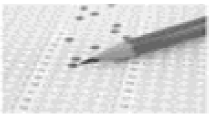
(b) Determine la ecuación de la recta que contiene al radio $\overline{AB}$

(c) Demuestre algebraicamente, que $\overleftrightarrow{AC}$ es tangente a la circunferencia en el punto A

3. La figura adjunta muestra una circunferencia de centro A. $\overleftrightarrow{ED}$ es tangente a la circunferencia en D. AE = 15 cm, ED = 12cm
Determine la medida del diámetro de esa circunferencia.



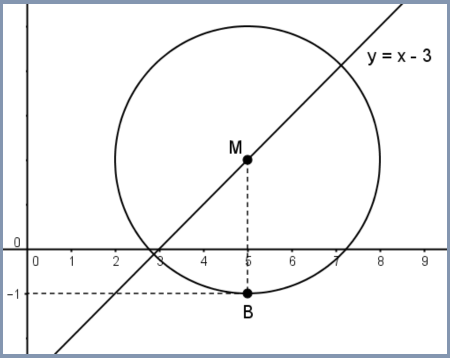
HACIA EL



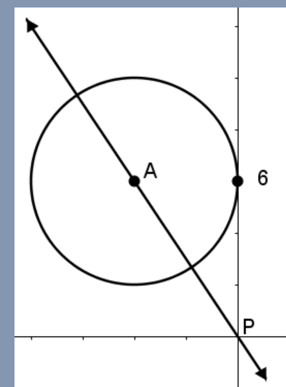
BACHILLERATO

1) En la figura adjunta, M pertenece a la recta $y = x - 3$ y es el centro de la circunferencia.

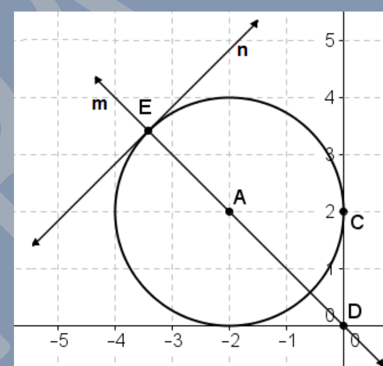
De acuerdo con la información proporcionada, la medida del radio es la siguiente



2) Considere la representación gráfica adjunta, en la cual el eje “y” es tangente a la circunferencia de centro A. Si AP = 10, ¿cuál es la medida del radio de la circunferencia?



3) En la figura, A es el centro de la circunferencia y “n” una recta tangente a dicha circunferencia en el punto E $\left(-\frac{41}{12},\frac{41}{12}\right)$. La ecuación de la recta “n” corresponde a



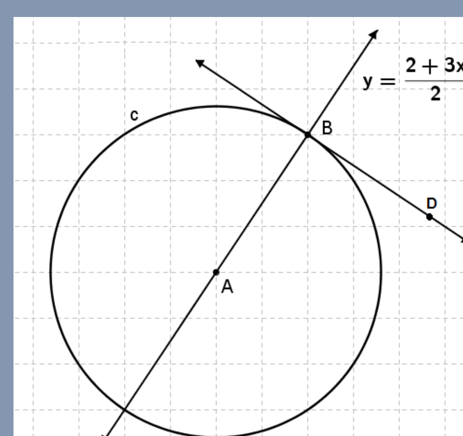
(A) $y=-x$

(B) $y=x+\frac{41}{12}$

(C) $y=x+\frac{41}{6}$

(D) $y=\frac{41}{12}x$

4) En la figura adjunta $\overleftrightarrow{DB}$ es tangente en B a la circunferencia “c” con centro A. Una posible ecuación para la $\overleftrightarrow{DB}$ corresponde a



(A) $y=\frac{3x+5}{2}$

(B) $y=\frac{2x+1}{3}$

(C) $y=\frac{-2x+7}{3}$

(D) $y=\frac{-3x+11}{2}$

Ecuación de la circunferencia completando cuadrados

1. Determine el centro y el radio de una circunferencia, cuya ecuación está dada por $x^2+y^2+6y-10x+25=0$.

Como la ecuación no está de la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, primero agrupamos los términos con "x" y con "y" para factorizar completando cuadrados. Los términos constantes, los colocamos en el miembro derecho de la ecuación:

$$x^2+y^2+6y-10x+25=0$$
$$\Rightarrow \left(x^2-10x\right)+\left(y^2+6y\right)=-25$$

Se busca el término "c" que permite completar cuadrados perfectos en cada paréntesis. En el primero sería $\left(\frac{-10}{2}\right)^2=25$ y para el segundo $\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$. Se colocan estos números en el miembro izquierdo de la ecuación, y se equilibra esta, colocando las mismas cantidades en la parte derecha:

$$\left(x^2-10x+\boxed{25}\right)+\left(y^2+6y+\boxed{9}\right)=-25+\boxed{25}+\boxed{9}$$

Se factorizan los trinomios y se operan los valores de la parte derecha:

$$(x-5)^2+(y+3)^2=9$$

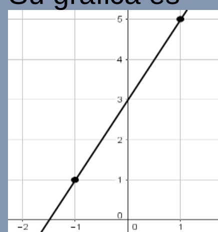
De este modo, se determina que el centro de la circunferencia está en (5, -3) y el radio es de 3.

Ejercicios adicionales.

Rectas

4. Complete el siguiente cuadro con la información que se le solicita.

Datos de la función lineal	Valor de la pendiente	Valor b	Punto de Intersección con el eje y	Punto de Intersección con el eje x
a) $y=15-7x$				
b) $y=\frac{18x-10}{10}$				
c) $y=\sqrt{2}$				
d) Tiene por ecuación $9y-5x=4$				
e) Tiene por ecuación $-4y+3x-5=0$				

Datos de la función lineal	Valor de la pendiente	Valor b	Punto de Intersección con el eje y	Punto de Intersección con el eje x
f) Contiene los puntos (-3,1) , (7, -9)				
g) Su gráfica es 				

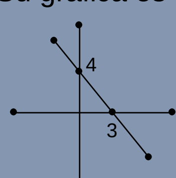
5. Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen y por $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

6. Halle la ecuación de la recta que contiene los puntos (-2, -1) y (3, 7)

7. Halle la ecuación de la recta cuya pendiente es $\frac{-5}{3}$ e interseca al eje x en 3

8. Si (2, -5) y (7,k) pertenecen a la recta ℓ y la pendiente de esa recta es $\frac{1}{3}$, determine el valor de “k”.

9. Complete el siguiente cuadro con la información que se le solicita.

Datos de la función	Pendiente de la recta dada	Pendiente de una recta paralela	Pendiente de una recta perpendicular
a) $y = \frac{-8-9x}{2}$			
b) Tiene por ecuación y = 4 + x			
c) Tiene por ecuación 6x – 5y = 4			
d) Contiene los puntos (-3, 1) y (6, 2)			
e) Su gráfica es 			

10. Los puntos (3,5) y (5,4) pertenecen a la recta l_1. El punto (2,3) pertenece a la recta l_2. Sabiendo que $l_1 \perp l_2$, determine la ecuación de l_2

11. Halle la pendiente de una recta paralela a $3x - 5y = \dfrac{3}{2}$

12. Halle la ecuación de una recta que interseca al eje "x" en -5 y que es perpendicular a la recta dada por $2x - 3y = 5$.

13. Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas. Las ecuaciones están dadas por $y = \dfrac{-8-9x}{2}$

    $\ell_1 : y = \left(k + \dfrac{5}{2}\right)x - 3$, $\ell_2 : y = 2kx + 3x - 5$. Determine el valor de k

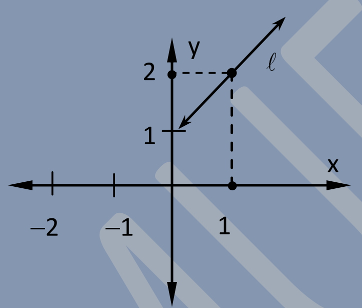
14. Considere las ecuaciones de las rectas ℓ_1 y ℓ_2

    $\ell_1: \; y = 3 + 2kx + x$ $\qquad$ $\ell_2: \; y = 6x - 2$

    Halle el valor de k de modo que $\ell_1 \perp \ell_2$

15. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (-8, 2) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $3y = -4x - 9$.

16. Considere la siguiente gráfica.



Sea ℓ_1 una recta tal que $\ell_1 \parallel \ell$ donde $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$ y $\left(2, \dfrac{7}{4}\right)$ pertenecen a ℓ_1. Determine el punto de intersección de ℓ con el eje "x"

Circunferencia (mediante completación de cuadrados)

17. Determine el centro y el radio de cada circunferencia, dada su ecuación.

    (a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y = -4$

    (b) $x^2 + y^2 - y + 14x + 65 = 1$

    (c) $y^2 + x^2 - 12y - 2x + 21 = 0$

    (d) $x^2 - 16y + 55 + y^2 = 0$

    (e) $x^2 + y^2 + x + \dfrac{2}{3}y - 4 = \dfrac{-13}{36}$

Polígonos

Habilidades: 11. Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.
12. Determinar las medidas de los ángulos internos y externos de polígonos en diversos contextos.
13. Determinar la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos.
14. Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.
15. Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos.

Escenario de aprendizaje

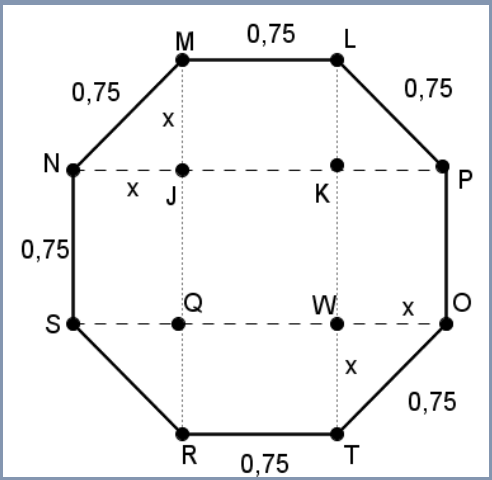
Alto al vandalismo

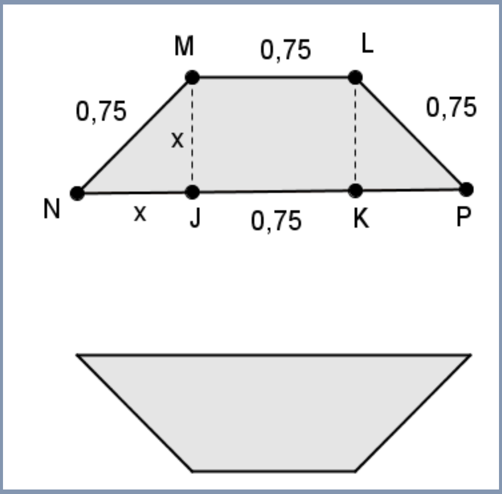
Segismundo está preocupado por el vandalismo que se está dando en su barrio, ya que se han robado varias señales de tránsito. Por eso, en un proyecto del colegio desea denunciar este hecho y averiguar la cantidad de metal que se está perdiendo por cada señal de ALTO robada. Se percata que la señal de alto tiene forma de octógono regular (todos sus lados y ángulos de igual medida). Además sabe que cada lado mide 0,75m

¿Cuál es el área de ese octógono?

Hay diversas maneras de abordar este problema. Es conveniente al determinar el área de una figura, descomponerla en otras más sencillas.

En este caso, partiremos la figura en 2 trapecios congruentes y un rectángulo.





Note que para determinar el área de los trapecios, es necesario conocer el valor la altura de estos, a la que llamaremos con "x". Obteniendo este valor, también podremos hallar la medida de su base.

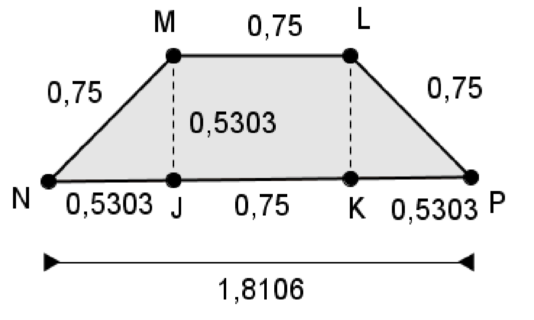
Para ello usamos el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = 0,75^2$$

$$2x^2 = 0,5625$$

$$x = \sqrt{\frac{0,5625}{2}} \approx 0,5303$$

De este modo las medidas quedan así:

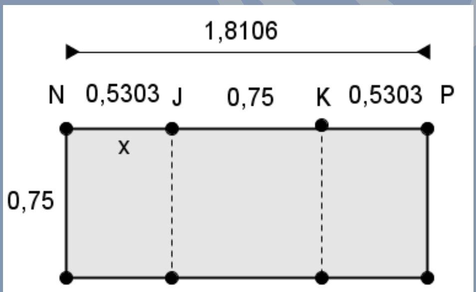


Por lo que el área de un trapecio se calcula:

$$A = \frac{(B+b) \bullet h}{2} = \frac{(1,8106 + 0,75) \bullet 0,5303}{2}$$

$$= 0,6789\, m^2$$

Las áreas de los dos trapecios suman 1,3579 m^2



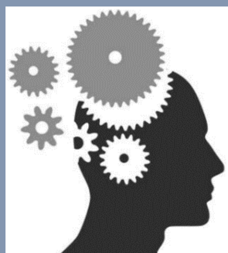
Para determinar el área del rectángulo, nos guiamos con la figura adjunta

Se calcula el área:

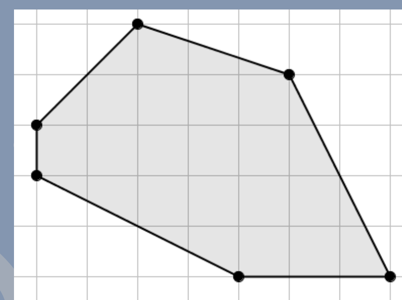
$$A = 1,8106 \bullet 0,75$$

$$= 1,3579\, m^2$$

Por último, el área total del octógono correspondiente a la señal de ALTO es de: 1,3579 + 1,3579 = 2, 7158 m^2 aproximadamente.

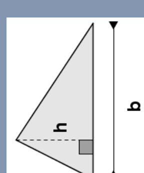
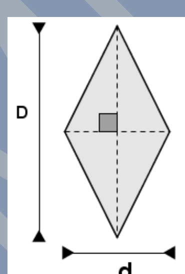
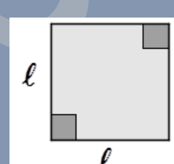
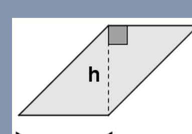
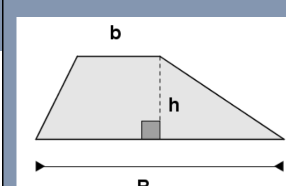


Problema para resolver en clase



Determine **el área y el perímetro** del siguiente polígono irregular. Considere que cada cuadrícula es de 1 cm. Al terminar, compare el análisis con sus compañeros.

Fórmulas para el cálculo de áreas

Triángulo	Rombo	Cuadrado	Romboide	Rectángulo	Trapecio
					
$\frac{b \bullet h}{2}$	$\frac{D \bullet d}{2}$	ℓ^2	$b \bullet h$	$\ell \bullet a$	$\frac{(B+b) \bullet h}{2}$

Partes de un polígono regular

Considere en cada fórmula a “*n*” como el número de lados del polígono regular

CONCEPTO	ILUSTRACIÓN

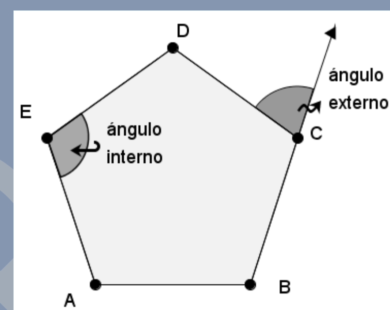
Ángulo Interno: Ángulo formado por dos lados consecutivos.

La suma de los ángulos internos está dada por $180°(n-2)$

La medida de un ángulo interno se calcula: $\dfrac{180°(n-2)}{n}$

Ángulo Externo: Ángulo formado por un lado y la prolongación de otro lado consecutivo.

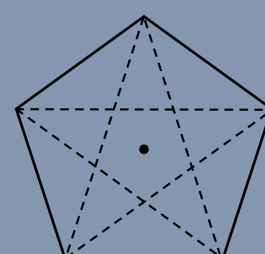
La medida de un ángulo externo se calcula: $\dfrac{360°}{n}$



Diagonal Es el segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

El número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono está dado por $\dfrac{n(n-3)}{2}$

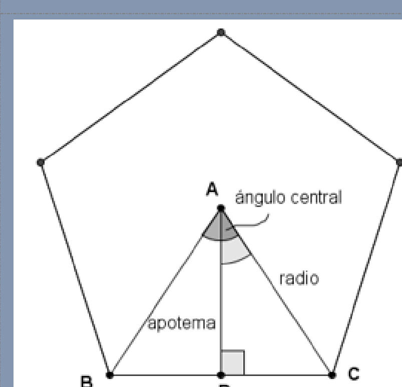
Diagonales desde un vértice $n-3$



Apotema es el segmento perpendicular trazado desde el centro al lado del polígono.

Radio Se definirá como el segmento que une el centro del polígono, con uno de sus vértices.

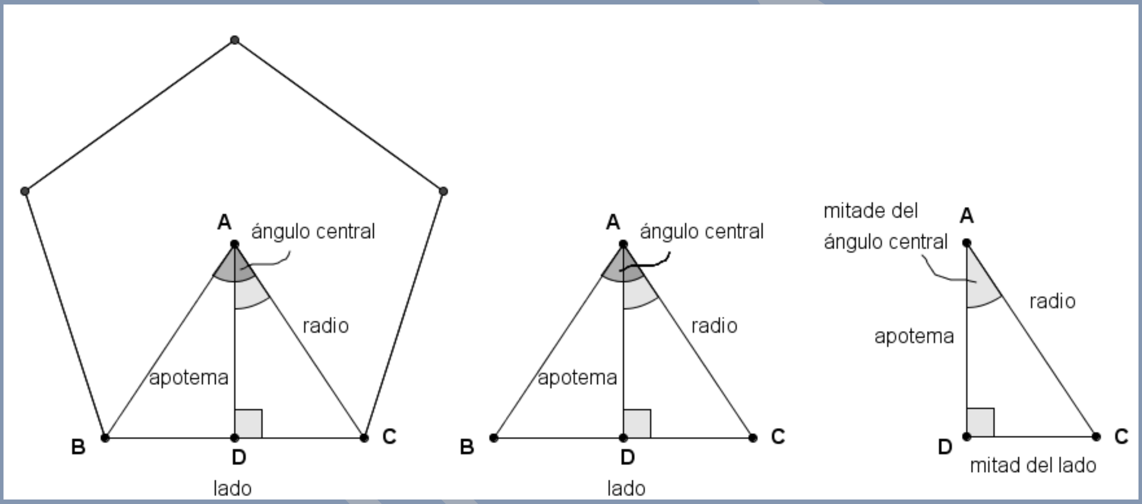
Ángulo central es el ángulo formado por dos radios consecutivos. Su medida se determina mediante la fórmula $\dfrac{360°}{n}$



Perímetro Suma de la medida de los lados del polígono. Se calcula $n\cdot\ell$ donde ℓ es la medida de un de los lados.

Área Para determinar el área de un polígono regular, se puede descomponer la figura, tal como se hizo en el escenario de aprendizaje introductorio. O bien, se puede trabajar con la fórmula: $A=\dfrac{n\bullet\ell\bullet a}{2}$ donde a es la medida de la apotema.

Para determinar la medida del radio, apotema o lado de un polígono regular, conviene extraer el triángulo que se forma entre dos radios consecutivos, así:



En la mayoría de ocasiones, será necesario usar razones trigonométricas o ley de senos para determinar alguna medida.

Ejercicios para resolver en clase

1. Determine el perímetro de un polígono regular donde cada ángulo interno mide 135° y la medida de uno de sus lados es de 10cm

Igualamos el dato que se nos da, con la respectiva fórmula

$$\frac{180°(n-2)}{n}=135°$$
$$\Rightarrow 180n-360=135n$$
$$\Rightarrow 180n-135n=360$$
$$\Rightarrow n=\frac{360}{45}=8$$

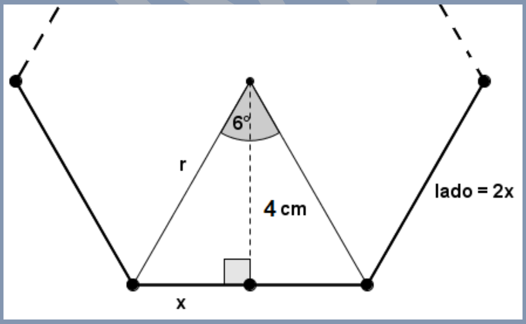
Luego se calcula el perímetro: $n\cdot\ell=8\bullet 10cm=80cm$

2. Determine la cantidad de diagonales totales que tiene un dodecágono.

3. Determine la medida del ángulo central de un polígono regular que tiene 54 diagonales totales.

4. La apotema de un polígono regular mide 4cm, y el ángulo central 12°. Determine
   (a) El radio del polígono
   (b) El perímetro del polígono
   (c) El área del polígono

Para determinar el número de lados, se resuelve $\frac{360^\circ}{12^\circ} = 30$ lados



$$\frac{r}{sen(90^\circ)} = \frac{4}{sen(\underbrace{84^\circ}_{90^\circ-6^\circ})} \Rightarrow r \approx 4{,}022$$

Para determinar el perímetro es necesario primero obtener la longitud del lado. Se puede calcular mediante el Teorema de Pitágoras o Trigonometría

$$x = \sqrt{4{,}022^2 - 4^2} \approx 0{,}42$$
$$\text{lado} = 0{,}42 \bullet 2 = 0{,}84cm$$

De este modo, el perímetro es $n \cdot \ell = 30 \bullet 0{,}84cm = 25{,}2cm$

Por último, el área se obtiene reemplazando en la fórmula $A = \frac{n \bullet \ell \bullet a}{2} = \frac{25{,}2 \bullet 4}{2} = 50{,}4cm^2$

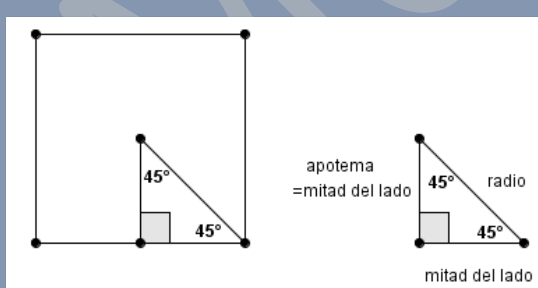
5. Determine el área de un octógono regular cuyo radio mide 6cm.

6. En un triángulo equilátero, la medida del radio es de $6\sqrt{3}$ dm.
(a) Determine la medida de la apotema de dicho triángulo.
(b) Determine la medida del lado del polígono
(c) Determine el área del triángulo

Polígonos especiales

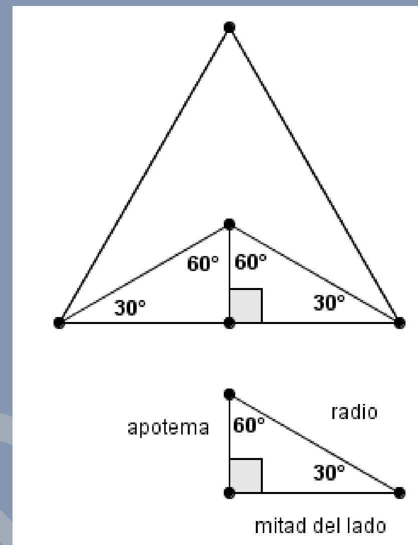
Hay fórmulas más directas para determinar el área del cuadrado, triángulo equilátero y hexágono regular. Seguidamente se sintetizan estas.

Cuadrado



$$\text{Área} = \ell^2 \quad apotema = \frac{\ell}{2}$$

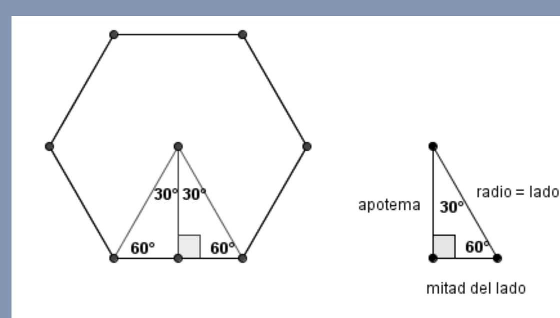
Triángulo equilátero



Polígono regular de tres lados. Cada ángulo mide 60° y el ángulo central mide $360 \div 3 = 120°$

$$\text{Área} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

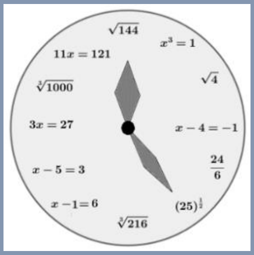
Hexágono regular



$$\text{Área} = 6\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

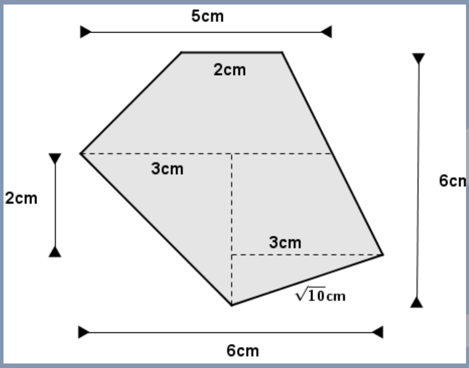
$$radio = \ell ado$$

Tiempo para practicar 1.4

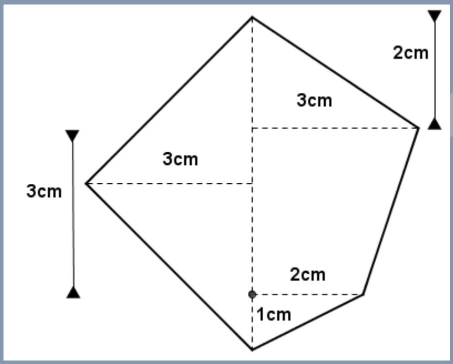


1. Determine el área total de cada figura.

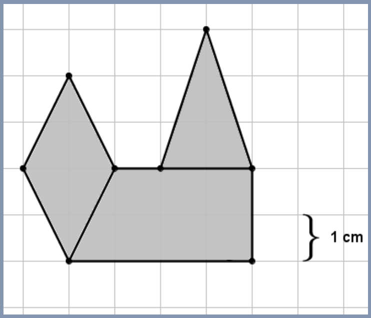
(a)



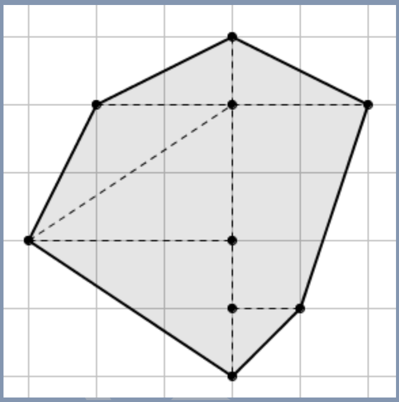
(b)



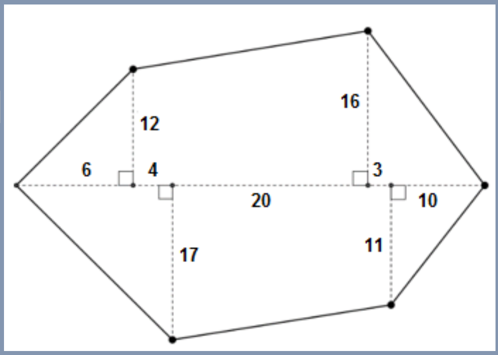
(c) Considere cada cuadrícula de 1 cm de lado



(d) Considere cada cuadrícula de 1 cm de lado



(e)



2. Determine el perímetro de las figuras (c), (d) y (e) del ejercicio anterior

3. Determine el área y perímetro de un pentágono convexo ABCDE cuyos vértices son A(4,4), B(6,2), C(7,-3), D(-1,-3), E(-1,2)

4. Considere el hexágono convexo ABCDEF cuyos vértices son A(4,-2), B(2,0), C(3,4), D(5,5), E(8,2), F(7,-1). Determine:

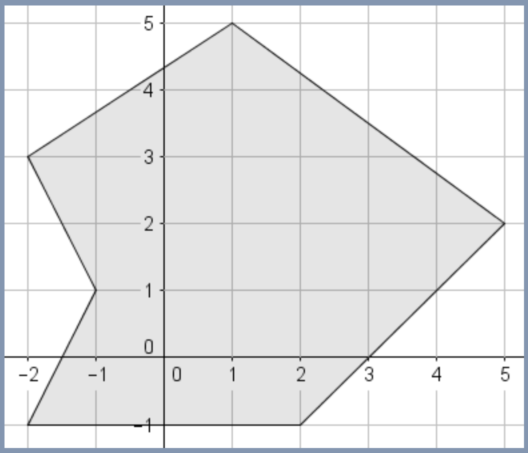
(a) el área del polígono

(b) el perímetro del hexágono

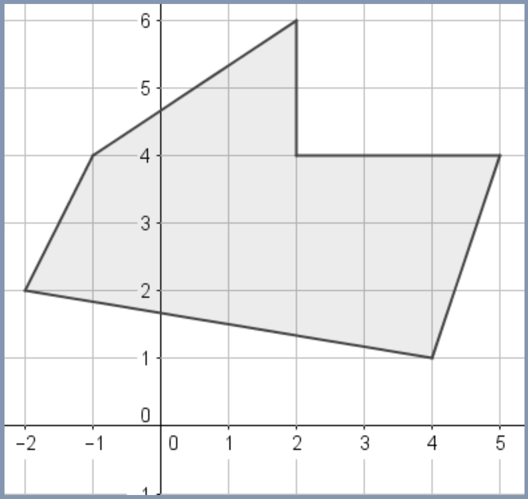
(c) la medida de la diagonal $\overline{CF}$

5. En cada figura, determine el área y el perímetro.

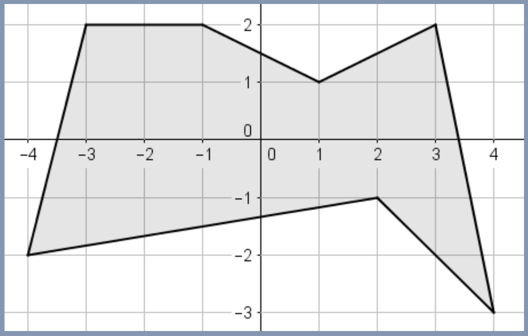
(a)



(b)



(c)

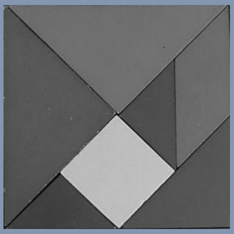


6. La señal de tránsito de "Ceda el paso" tiene forma de triángulo equilátero, cuyo lado mide 75cm. Determine la medida aproximada de su apotema?

7. En una escuela usan mesas cuya superficie tiene forma de triángulo equilátero de perímetro 225cm cada una. Al unir seis de esas mesas, se forma un hexágono regular. Calcule el perímetro de ese hexágono?

8. Algunas especies de abejas, forman sus panales con celdas en forma hexagonal regular. El área de una celda de las abejas *Apis mellifera* es de aproximadamente $9\sqrt{3}mm^2$. ¿Cuál es la longitud aproximada del lado de una de esas celdas?

9. El tangram es un reconocido juego de agilidad mental, formado por 7 piezas, que unidas forman un cuadrado. Si la apotema del cuadrado mide 12 cm, el área de ese tangram corresponde a



10. Una medalla tiene forma de heptágono regular. Determine la cantidad de diagonales que se pueden trazar en total en esa medalla.

11. Determine la cantidad de diagonales totales que tiene un polígono regular cuyo ángulo externo mide 24°

12. *Grace Herrera Amiguetti,* una artista costarricense hace sus pinturas sobre triángulos equiláteros. Si la longitud del lado de uno de esos triángulos es de 1 metro, entonces, ¿cuánto mide aproximadamente el área de ese triángulo?

13. Complete cada espacio en blanco, de modo que la oración sea verdadera.

(a) La suma de los ángulos internos de un pentadecágono regular es la siguiente _______________

(b) La cantidad de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un decágono es la siguiente _______________

(c) El perímetro de un hexágono regular de radio 10cm es el siguiente _______________

(d) El polígono regular que tiene 20 diagonales, recibe el siguiente nombre _______________

(e) El número de lados de un polígono, cuyo ángulo central mide 18° es el siguiente _______________

(f) En un polígono regular, donde el radio mide 10cm y la apotema 5cm, la medida de su lado es la siguiente _______________

(g) Si el área de un cuadrado es de 49 cm^2 , entonces la medida de su apotema es la siguiente _______________

14. En un polígono regular, la medida de cada ángulo interno es de 135°. Si el perímetro es de 48dm, determine la medida de un lado de ese polígono.

15. Halle el área de un pentágono regular cuyo lado mide 8 cm.

16. El radio de un hexágono regular mide 18dm. (a) ¿Cuánto mide su perímetro? (b) Determine el área

17. El área de un hexágono regular es $28\sqrt{3}\,m^2$. Halle la longitud del lado y de la apotema de dicho hexágono.

18. De acuerdo con la información de cada inciso, halle el área de cada polígono regular:

a) Un octógono cuyo radio mide 12 mm
b) Un heptágono cuya apotema mide 4 cm
c) Un nonágono cuyo perímetro es de 90 cm

19. Halle la longitud del lado de un endecágono cuya apotema mide 5cm

20. Si un cuadrado y un hexágono regular tienen la misma área, y la diagonal del cuadrado mide $10\sqrt{2}$cm, determine el lado del hexágono regular.

21. Calcule el área de un triángulo equilátero cuya altura mide $5\sqrt{3}$ cm

22. Determine la medida de un ángulo interno de un octógono regular.

23. En un polígono regular la medida de cada uno de los ángulos internos es 162°. Determine la medida de un ángulo central del polígono?

24. La medida de un ángulo externo de un polígono regular mide 30°. Calcule la medida de un ángulo central de ese polígono.

25. Determine la suma de los ángulos internos de un polígono regular cuyo número total de diagonales es de 77

26. En un polígono regular la suma de los ángulos internos es de 1980°. Si
27. la longitud de un lado del polígono es de 5cm, halle el valor del perímetro.

28. La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono regular es 540°. Si la apotema del polígono mide 3,24cm, calcule el área aproximada de ese polígono.

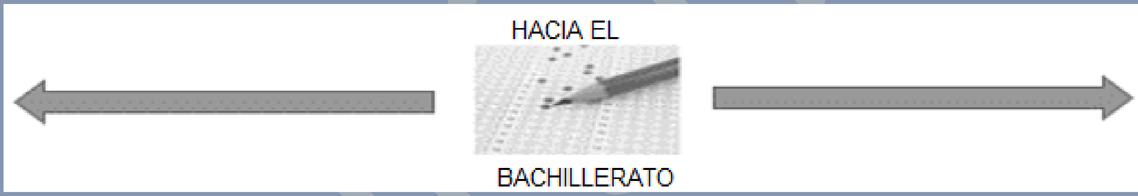
29. Un polígono regular posee 44 diagonales en total y cada uno de sus lados mide 10cm. ¿Cuál es el perímetro de ese polígono?

30. Caralampio construye una mesa cuyo sobre o parte superior tiene forma de hexágono regular. Calcule la medida del ángulo interior que se forma en la intersección de dos lados consecutivos del sobre de la mesa.

31. Determine en cada caso el área del polígono regular.
    a) Un pentágono regular cuyo lado mide 10cm
    b) Un octógono regular, cuya apotema mide 12cm
    c) Un decágono regular, cuyo radio mide 18cm
    d) Un heptágono regular cuyo perímetro es de 70cm
    e) Un hexágono regular, cuyo radio mide 12cm
    f) Un triángulo equilátero, cuya apotema mide 8cm
    g) Un cuadrado cuya apotema mide 7cm

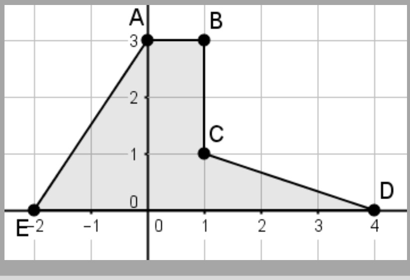
32) Complete el cuadro con la información que se le solicita, referida a polígonos regulares

Polígono regular	Medida de Ángulo Central	Medida de Ángulo interno	Suma de ángulos internos	Ángulo Externo	Diagonales totales	Diagonales de un vértice
Pentágono						
				24°		
		144°				
					20	
						20
Triángulo equilátero						
			720°			
Endecágono						



Analice el siguiente escenario:

Considere el pentágono ABCDE



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 1 y 2

1) El perímetro aproximado del pentágono corresponde a

(A) 9,76 (B) 15,76

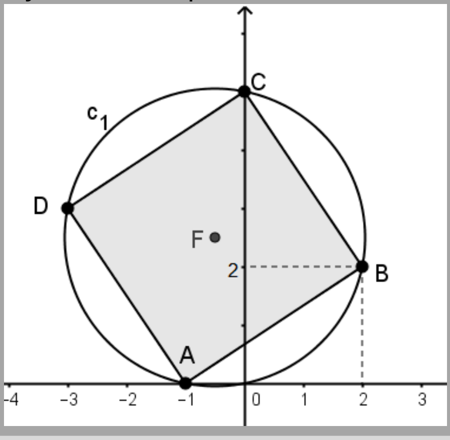
(C) 13, 23 (D) 14,76

2) El área del pentágono ABCDE es la siguiente

□□□□,□□

Analice el siguiente escenario:

Considere el cuadrado, cuyos vértices pertenecen la circunferencia c_1



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 3, 4 y 5

3) La medida de la apotema del cuadrado ABCD corresponde a

(A) 3
(B) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
(C) 1,5
(D) $\sqrt{13}$

4) El área del □ ABCD corresponde a

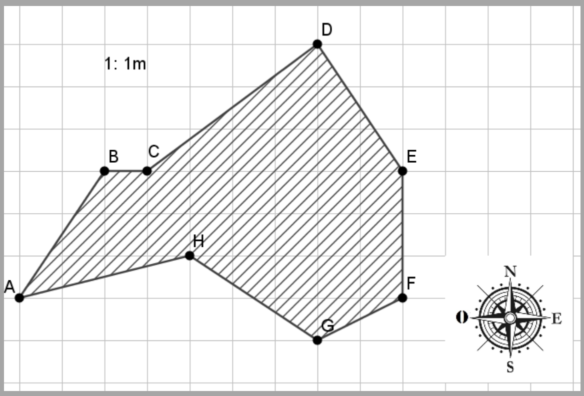
(A) $4\sqrt{13}$
(B) 52
(C) $\sqrt{13}$
(D) 13

5) ¿Cuánto mide el radio de c_1?

(A) $\sqrt{26}$
(B) $2\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{13}$
(D) $\sqrt{52}$

Analice el siguiente escenario:

Al dueño de una propiedad desea sembrar zacate a todo el terreno y cercar su lote. El metro cuadrado de zacate, ya sembrado, tiene un valor de ₡1 250, mientras que el metro lineal de cable para cercar, tiene un costo de ₡2 200



Cada cuadrícula corresponde a un metro.

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 6 y 7

6) El costo, en colones, para colocar zacate en todo el terreno, corresponde a

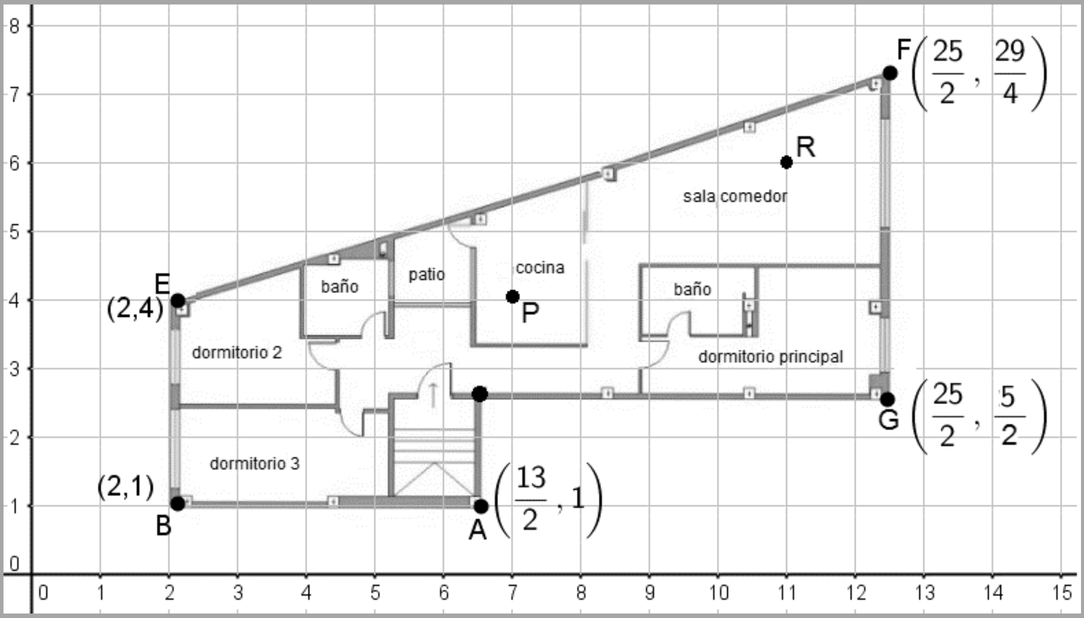
(A) 70 400	(B) 40 0000
(C) 32 000	(D) 20 000

7) El costo aproximado, en colones, para cercar todo el terreno, corresponde a

(A) 26 190	(B) 57 618
(C) 32 737, 5	(D) 52 380

Analice el siguiente escenario:

En el dibujo se presenta el plano de una casa. Cada espacio del plano cartesiano representa **4 metros** reales.



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 8 y 9

8) ¿Cuál es el área de la casa? [Cada unidad representa 4 metros]

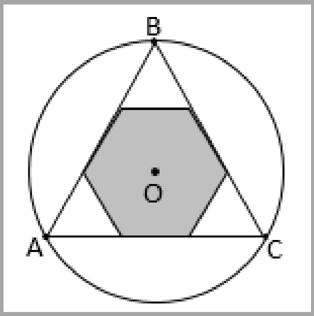
☐☐☐☐,☐☐

9) Se desea colocar un cableado eléctrico del punto P al R. ¿Cuánto mide aproximadamente, en metros, esa distancia? [Cada unidad representa 4 metros]

(A) 20, 59	(B) 13, 85
(C) 17,88	(D) 10,20

Analice el siguiente escenario:

En la figura, el lado del triángulo equilátero ABC es 6 cm y el hexágono regular está inscrito en $\triangle ABC$.



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 10 ,11 y 12

10) La medida del radio de la circunferencia corresponde a

(A) $2\sqrt{3}$ cm	(B) 6 cm
(C) $3\sqrt{3}$ cm	(D) 3cm

11) La medida de la apotema del hexágono corresponde a

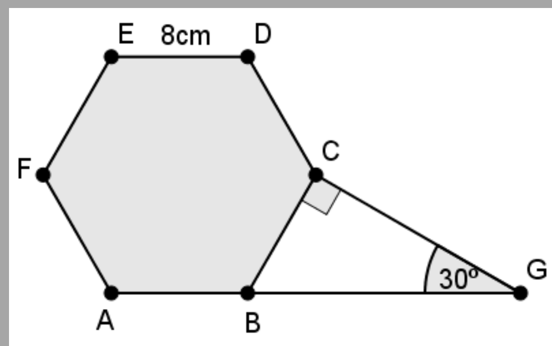
(A) $2\sqrt{3}$ cm	(B) $3\sqrt{3}$ cm
(C) $\sqrt{3}$ cm	(D) 3cm

12) ¿Cuál es el área, en cm^2, de la parte sombreada?

(A) $2\sqrt{3}$	(B) $3\sqrt{3}$
(C) $\sqrt{3}$	(D) $6\sqrt{3}$

Analice el siguiente escenario:

En la figura adjunta, ABCDEF es un hexágono regular



Con base en la información anterior, conteste las preguntas 13 y 14

13) El perímetro del polígono ABGCDEF corresponde a

(A) $56+8\sqrt{3}\,\text{cm}$	(B) $64+8\sqrt{3}\,\text{cm}$
(C) 56 cm	(D) 64 cm

14) El área del polígono ABGCDEF corresponde a

(A) $64+96\sqrt{3}\,\text{cm}^2$	(B) $128\sqrt{3}\,\text{cm}^2$
(C) 128 cm^2	(D) $256\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

15) La medida, en grados, del $\measuredangle EDA$ es la siguiente

Analice el siguiente escenario:

Con una lámina de metal se construyen 3 medallas con forma hexagonal regular, tal como lo muestra la figura. El largo de la lámina es de 18cm

Con base en la información anterior, conteste las preguntas 16, 17 y 18

16) La medida de la apotema una de las medallas es la siguiente

$\square\square\square\square,\square\square$

17) La medida aproximada del ancho de la lámina corresponde a

(A) 3,46cm	(B) 6 cm
(C) 3 cm	(D) 6,92 cm

18) La cantidad aproximada de material que sobra de la lámina al hacer las 3 medallas, corresponde a

(A) 31,18 cm^2	(B) 14,47 cm^2
(C) 114,31cm^2	(D) 75, 53 cm^2

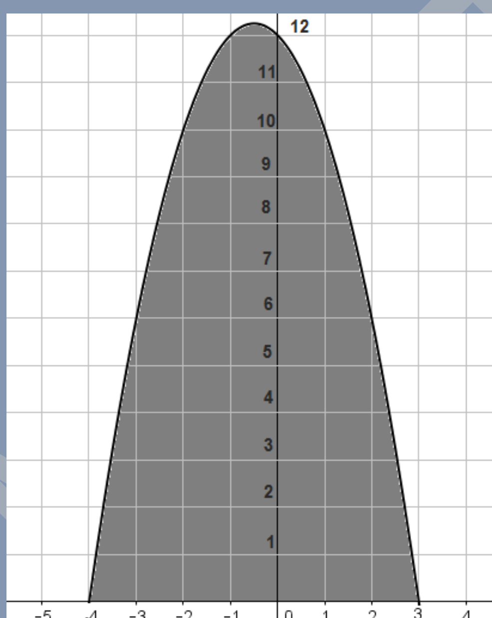
Figuras planas no poligonales

Habilidades:
16. Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.

En nuestro entorno, existen muchas formas curvas, cuyas áreas no pueden ser calculadas con una fórmula geométrica específica.
Uno de los métodos usados desde hace varios siglos, para determinar el área de una figura curva representada en el plano cartesiano, es dividirla en varios rectángulos u otras figuras cuya área puede ser calculada más fácilmente.

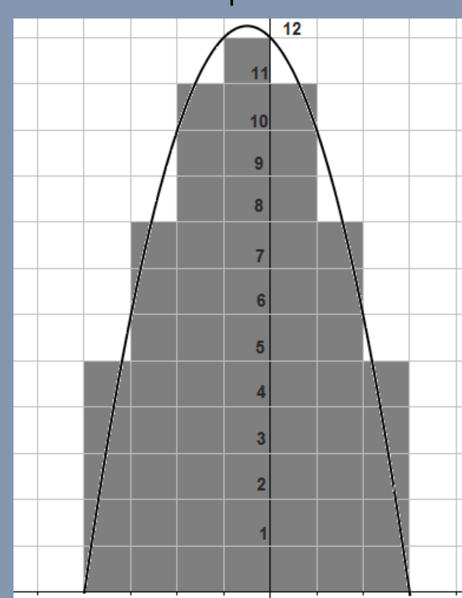
Analicemos los siguientes ejemplos.

1. Calcule el área aproximada de la parábola dada por $y = -x^2 - x + 12$



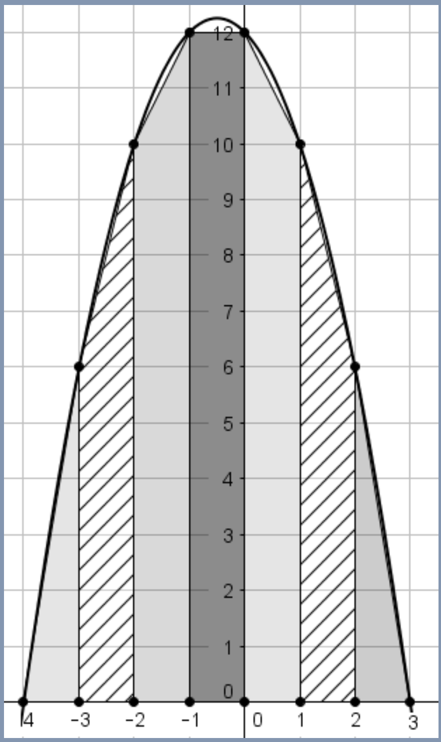
Una manera de aproximar el área de esta figura, es construyendo rectángulos.

Algunas partes de esos rectángulos sobrepasarán la figura y en otros casos, no logran cubrirla. Esas diferencias "compensan" en cierta forma de modo que entre más rectángulos se realicen, más buena será la aproximación.



En la figura hay 60 cuadrados de 1 unidad de lado, por lo que el área aproximada es de 60 $(u\ell)^2$.

Realmente el área de esa figura es de $57{,}16(u\ell)^2$



Ahora realicemos una aproximación con otras figuras.

El área un triángulo es: $\frac{1 \bullet 6}{2} = 3(u\ell)^2$

El área del rectángulo: $12(u\ell)^2$

El área de un trapecio "rayado": $\frac{(10+6)\bullet 1}{2} = 8(u\ell)^2$

El área de uno de los trapecios grandes es de $\frac{(12+10)\bullet 1}{2} = 11(u\ell)^2$

El área total: 3 + 3 + 8 + 8+ 12 + 11 + 11 = 56 $(u\ell)^2$

Esta aproximación es mejor que la obtenida con sólo rectángulos.

En el caso de necesitar el **perímetro de la figura**, podemos trabajar con el teorema de Pitágoras.

Los triángulos: $\sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}(u\ell)$ cada uno.

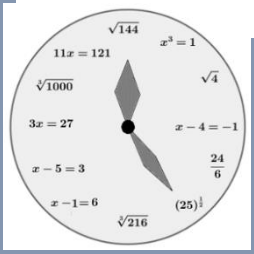
Los trapecios rayados: $\sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}(u\ell)$ cada uno.

Los trapecios grandes $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}(u\ell)$ cada uno.

El rectángulo: $1(u\ell)$

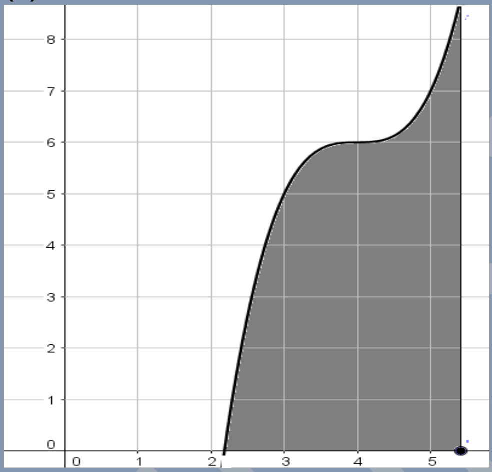
El perímetro total es: $2\sqrt{26}+2\sqrt{17}+2\sqrt{5}+1=23{,}91\ (u\ell)$

Tiempo para practicar 1.5

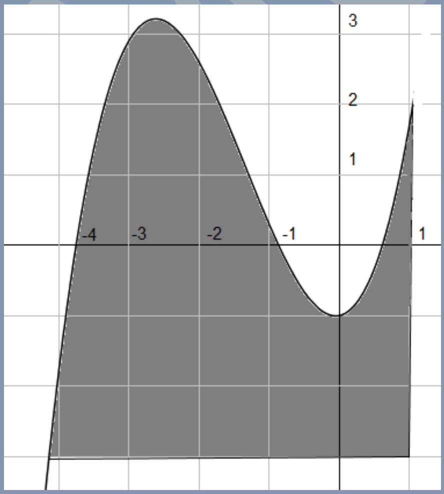


1. Determine el área y el perímetro aproximados de cada figura.

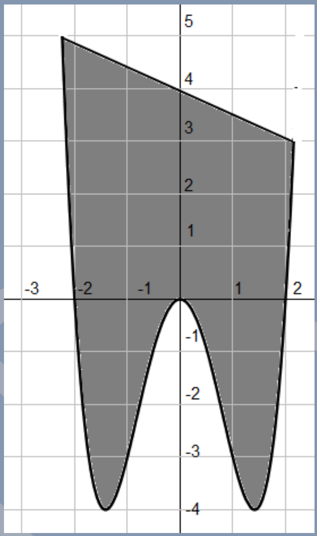
(a)



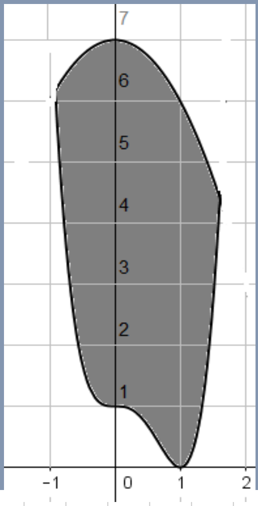
(b)



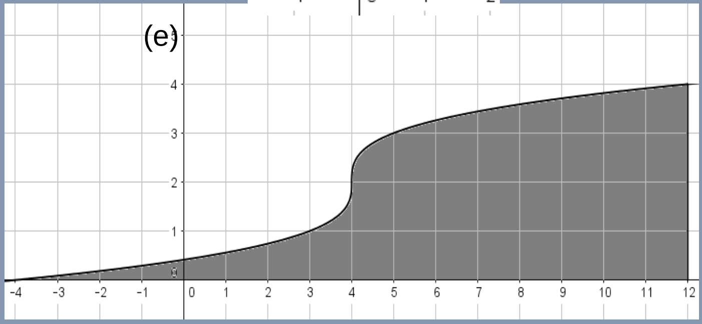
(c)



(d)

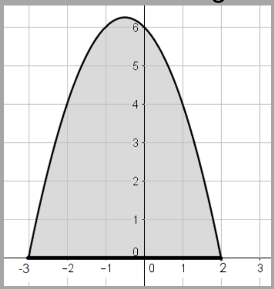


(e)

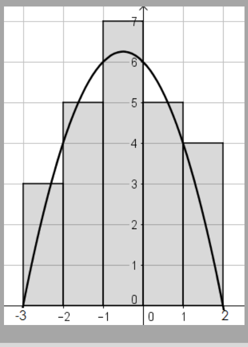


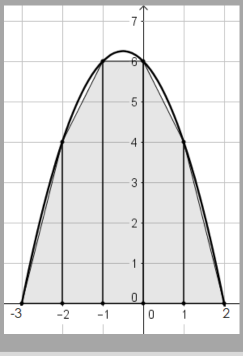
Analice el siguiente escenario:

Se desea aproximar el área sombreada de la siguiente figura:



Para tal fin, se utilizan dos procedimientos: en el primero se trabaja solo con rectángulos y en segundo con triángulos, rectángulos y trapecios, así:





Con base en la información anterior, conteste las preguntas 1 y 2

1) El cálculo aproximado del área, al utilizar el segundo procedimiento fue de

(A) $36\ u\ell^2$	(B) $20\ u\ell^2$
(C) $24u\ell^2$	(D) $16\ u\ell^2$

2) Analice las siguientes proposiciones

I. El cálculo aproximado del área al utilizar el primer procedimiento, fue de $24u\ell^2$

II. Si el área de la región sombreada es de $\frac{125}{6}u\ell^2$, entonces la mejor aproximación se obtiene con el primer procedimiento.

De ellas, son verdaderas

(A) Solo la I	(B) Solo la II
(C) Ambas	(D) Ninguna

Visualización espacial

Habilidades:
17. Identificar el radio y el diámetro de una esfera.
18. Identificar la superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto.
19. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas.
20. Reconocer elipses en diferentes contextos.

Escenario de aprendizaje

El ser humano, siempre ha tenido especial interés por las figuras tridimensionales nuestros ancestros por ejemplo, fueron cautivados por las esferas, al punto que en Costa Rica se cuenta con más de quinientas esferas de piedra, que son consideran únicas en el mundo por su número, tamaño y perfección.

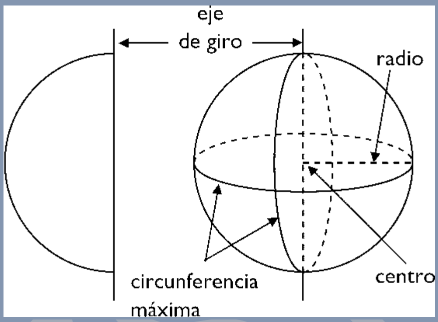
Aunque actualmente se sigue estudiando las esferas y su significado, algunos arqueólogos ubican sus orígenes entre el 300 a. C y el 300 d. C.
Existen desde pequeñas esferas de 10 cm de diámetro, hasta enormes ejemplares de 2,7 metros.

Autoridades costarricenses tomaron acciones para recuperar algunas de esas esferas que estaban en propiedades privadas. Una de ellas tiene un radio de 0,9 metro y el contenedor para transportarla es de 1,6m de altura ¿Cabe esa esfera en el contenedor?

La esfera

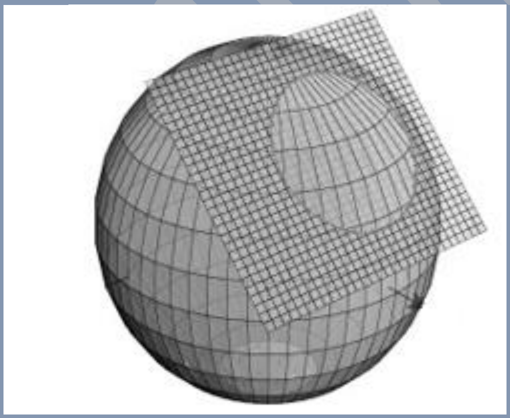
Una esfera es un cuerpo geométrico limitado por una superficie curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro punto interior llamado centro de la esfera.
En la naturaleza podemos encontrar frutos, semillas y flores que se asemejan a esferas. La Tierra aunque no es totalmente esférica, si tiene gran similitud.

La esfera se genera haciendo girar una superficie semicircular alrededor de su diámetro



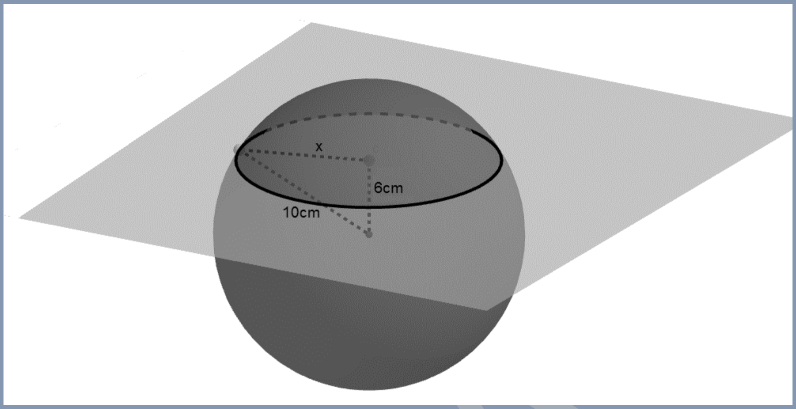
- La intersección entre un plano y una esfera siempre será un círculo.

- Si un plano pasa por el centro de la esfera, su intersección con la esfera se llama círculo máximo de la esfera. En este caso el radio de ese círculo coincide con el radio de la esfera.



Ejemplo

Una esfera es cortada por un plano que dista 6cm de su centro. Si el diámetro de la esfera es de 20cm, determine la medida del radio de la circunferencia formada por la intersección del plano y la esfera.



El radio de la esfera es de 10cm.

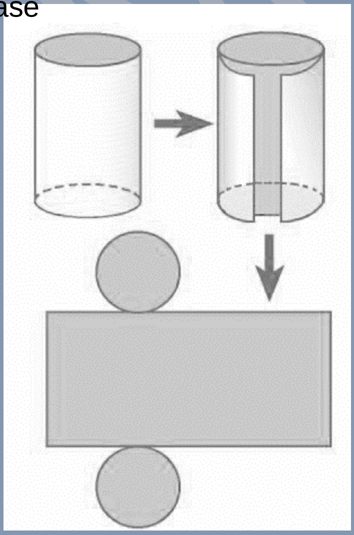
Como se aprecia en la figura, se puede confeccionar un triángulo rectángulo, para así aplicar el teorema de Pitágoras:

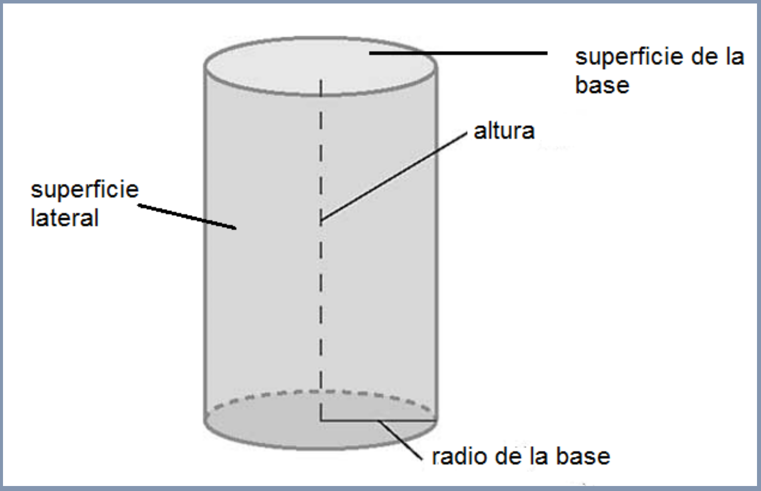
$$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

El radio de la circunferencia es de 8cm

El cilindro circular recto es un cuerpo redondo formado por dos bases circulares congruentes entre sí y una superficie lateral que al desarrollarse forma un rectángulo cuya altura es la altura del cilindro y la base es la longitud de la circunferencia de la base

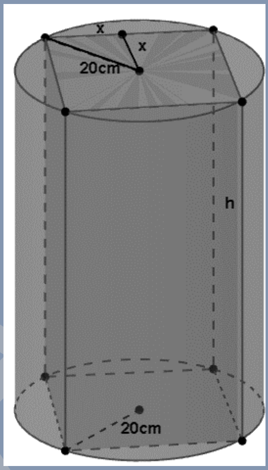
.





Ejemplo

Una tuca de 85 cm tiene forma cilíndrica, con un radio de 20cm. Se necesita obtener una viga, en forma de prisma cuadrangular, de modo que se logre aprovechar el máximo la madera.



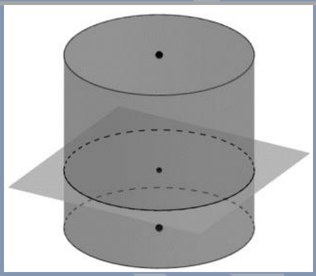
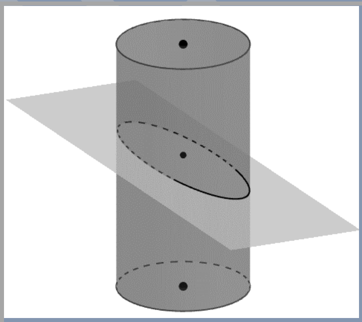
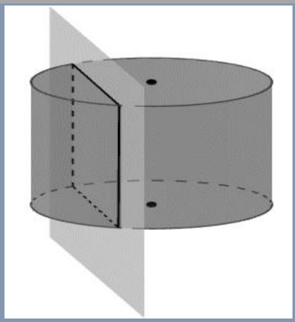
(a) Determine las dimensiones del prisma
(b) ¿Cómo debe estar ubicado un plano con respecto al cilindro para que resulte una sección rectangular?

En la figura adjunta, se puede visualizar un triángulo rectángulo formado entre el radio del cilindro (que coincide con el radio de la base del prisma) la apotema del cuadrado y la mitad de su lado. Mediante el Teorema de Pitágoras se tiene: $x^2 + x^2 = 20^2 \Rightarrow x = 10\sqrt{2}cm$

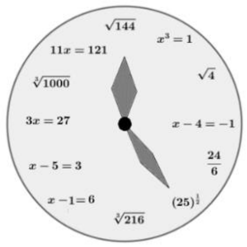
De esta forma, se concluye que las dimensiones de la viga son: $20\sqrt{2}cm$ de lado de la base y 85 cm de altura.

Secciones planas en un cilindro

En las siguientes figuras se muestran secciones planas, según la posición del plano con respecto al cilindro.

		
Plano paralelo a la base	Plano oblicuo* con respecto a la base [Llamaremos plano oblicuo a la base, a aquel plano que no es paralelo ni perpendicular a esta y no atraviesa la base]	Plano perpendicular a la base
Sección formada: Circunferencia	Sección formada: Elipse	Sección formada: Rectángulo

Tiempo para practicar 1.6



1. Analice cada una de las proposiciones e indique si son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   (a) Al cortarse una esfera con un plano paralelo a la circunferencia máxima, se obtienen dos semiesferas idénticas.
   (b) Es posible realizar un corte a una esfera con un plano, de modo que la sección obtenida sea una elipse.
   (c) Las secciones que se obtienen al trazar un plano perpendicular a la base de un cilindro y que pasa por el diámetro del mismo, son congruentes.
   (d) Dos planos paralelos entre sí cortan una esfera. Si el plano A dista a 6 cm del centro de la esfera, y el B a 8cm; entonces la circunferencia que forma el plano A es menor que la de B.
   (e) Al cortar un cilindro con un plano perpendicular a su base, se obtiene un rectángulo cuya altura es de igual medida que la altura del cilindro.

2. ¿Qué condiciones debe cumplir un cilindro de modo que al ser cortado por un plano, formen un cuadrado?

3. Un artesano usa cilindros de madera, a los cuales les hace un corte que le permite obtener una superficie plana para realizar sus pinturas, tal como lo muestra la imagen adjunta.

   (a) ¿Qué figura se forma al hacer ese corte?
   (b) Si con el mismo tamaño de los cilindros de madera, desea obtener mayor espacio para pintar, ¿cómo debe hacer el corte?

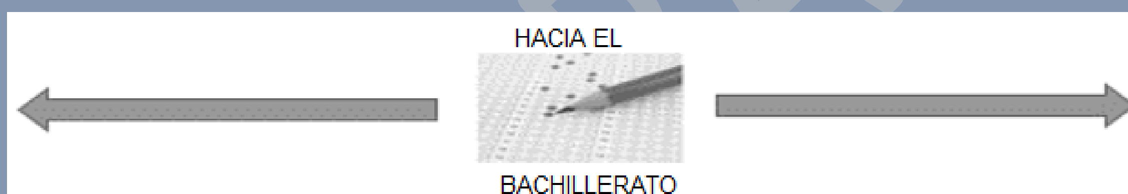
4. Medardo necesita hacer un corte a una esfera de estereof ón, para un trabajo de ciencias del colegio. El diámetro de esa esfera es de 10cm. Necesita hacer un corte de modo que el radio de la circunferencia resultante sea de 4cm. ¿Con respecto al centro de la esfera, a qué distancia debe hacer ese corte?

5. Un queque en forma cilíndrica debe ser cortado, de modo que se obtengan 8 pedazos de igual tamaño y con solo 3 cortes rectos. ¿De qué manera se deben hacer los cortes?

6. Un cilindro tiene un radio de 15 cm y una altura de 10cm. A 9 cm del centro de la base, y perpendicular a esta, atraviesa un plano.
   (a) ¿Qué figura forma la sección cilíndrica?
   (b) Determine el perímetro de esa sección.

7. Determine el radio de la sección obtenida al cortar una esfera de 15cm de diámetro con un plano que dista 4cm del centro de dicha esfera.

8. Para una decoración, una joven necesita unas candelas en forma de prisma cuadrangular. Sin embargo solo pudo conseguir candelas cilíndricas de diámetro 8cm. ¿Qué cortes puede hacer la joven para obtener la candela deseada, de modo que aproveche la mayor cantidad de material? ¿Cuánto mide aproximadamente la arista basal de la nueva candela?



1) Una esfera es cortada por un plano que dista 4cm de su centro. Si el diámetro de la esfera es de 16 cm, entonces el radio de la circunferencia formada por la intersección entre el plano y la esfera corresponde a

(A) $2\sqrt{3}\,\text{cm}$	(B) $4\sqrt{3}\,\text{cm}$
(C) $8\sqrt{3}\,\text{cm}$	(D) $4\sqrt{5}\,\text{cm}$

2) Considere las siguientes afirmaciones sobre una esfera y un plano que la interseca.

I. La sección que resulta de la esfera con el plano es una circunferencia.
II. Entre más alejado se interseque el plano del centro de la esfera, de mayor longitud será la sección obtenida

De estas proposiciones son verdaderas

(A) ambas	(B) solo la I
(C) ninguna	(D) solo la II

3) Considere las siguientes afirmaciones sobre un cilindro y un plano que lo interseca.

I. Si el plano es perpendicular a la base del cilindro, la sección que resulta de la intersección del plano con el cilindro, es un rectángulo.

II. Si el plano es oblicuo a la base del cilindro, cortará a dicho cilindro en dos partes iguales.

De ellas, ¿cuáles son siempre verdaderas?

(A) ambas	(B) solo la I
(C) ninguna	(D) solo la II

4) Sabiendo que el radio de una esfera es de 20cm, ¿a qué distancia del centro de esa esfera, debe hacerse un corte de modo que el radio de la circunferencia resultante sea de 15 cm?

(A) 25 cm	(B) 5 cm
(C) $5\sqrt{7}$ cm	(D) 35 cm

5) Un cilindro es intersecado por dos planos, ambos paralelos a su base. Según esta información, analice las siguientes proposiciones:

I. Las secciones formadas por la intersección de cada plano con el cilindro, son congruentes entre sí.

II. La sección que se forma al intersecar uno de esos planos con el cilindro es una circunferencia.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

(A) ambas	(B) solo la I
(C) ninguna	(D) solo la II

6) Considere las siguientes afirmaciones sobre una esfera y un plano que la interseca.

I. Si el plano no pasa por el centro de la esfera, la sección que resulta es una elipse.

II. Si "r" es la medida del radio de la esfera y "r_1" la medida del radio de la circunferencia formada por la intersección del plano con la esfera, entonces "r" siempre será mayor o igual que "r_1"

De ellas, son verdaderas

(A) ambas	(B) solo la I
(C) ninguna	(D) solo la II

7) Considere las siguientes afirmaciones sobre un cilindro y un plano que lo interseca.

I. Si el plano es perpendicular a la base, la sección que resulta de la intersección de este con el cilindro, es un rectángulo, cuya altura mide igual que el radio del cilindro.

II. Si el plano es oblicuo a la base del cilindro, formará una circunferencia

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

(A) solo la II	(B) ninguna
(C) solo la I	(D) ambas

8) Analice las siguientes proposiciones:

I. Al cortar una esfera con un plano que pasa por su diámetro, el radio de la esfera medirá igual que el radio de la circunferencia resultante.

II. Al cortar un cilindro con un plano que pasa por el diámetro su base, la sección resultante es un rectángulo.

De ellas, con certeza ¿cuáles son verdaderas?

(A) solo la II	(B) ninguna
(C) solo la I	(D) ambas

9) Sabiendo que el radio de una esfera es de 10cm, ¿a qué distancia del centro de esa esfera, debe hacerse un corte de modo que el radio de la circunferencia resultante sea de 7 cm?

(A) $\frac{51}{2}$cm	(B) $\sqrt{149}$ cm
(C) $\sqrt{51}$cm	(D) $\frac{149}{2}$ cm

10) Los planos A y B intersecan una esfera. El plano A dista a 12 cm del centro, mientras que el B está a 9 cm del centro de la esfera.

Según esta información, analice las siguientes proposiciones:

I. La circunferencia formada por el plano A es mayor que la formada por el plano B.

II. Con certeza, la distancia que separa a los planos A y B es de 3cm

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

(A) solo la II	(B) ninguna
(C) solo la I	(D) ambas

RELACIONES Y ÁLGEBRA

Conjuntos numéricos

Habilidades:
1. Analizar subconjuntos de los números reales.
2. Utilizar correctamente los símbolos de pertenencia y de subconjunto.

Definiciones

- Un **conjunto** es una colección de **elementos**. Si el conjunto no tiene elementos, se dice que es un **conjunto vacío**, y se simboliza con ϕ o bien { }.

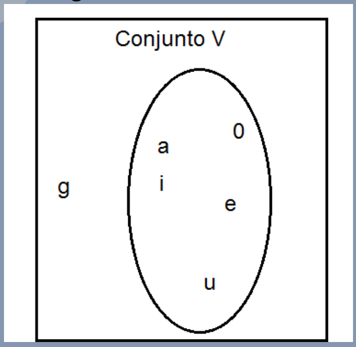
- Para expresar que un elemento pertenece a un conjunto, se usa el símbolo $\in$, en caso contrario, se escribe $\notin$.

- De esta forma la proposición $a \in M$ se lee: el elemento "*a*" pertenece al conjunto "*M*" y $b \notin N$ como "b" no pertenece al conjunto "*N*"

  Por ejemplo, si V es el conjunto de todas las vocales, entonces se cumple que:

  $$i \in V, \quad g \notin V$$

  Una manera de representar los conjuntos es mediante figuras como la siguiente, a las que se les conoce como Diagramas de Venn



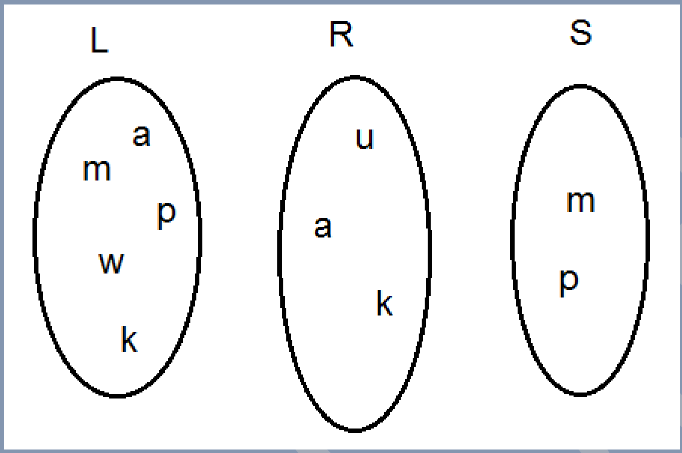
- R es subconjunto (o está contenido en) de P, si todo elemento de R es también elemento de P. Se simboliza: $R \subset P$.

- Si existe un elemento en R que no pertenece a T, se dice que R no es subconjunto de T y se escribe: $R \not\subset T$.

Por ejemplo, el conjunto V formado por las vocales, está contenido en el conjunto A, formado por las letras del abecedario. $V \subset A$

Ejemplos

Observe los diagramas de Venn y analice las relaciones de pertenencia e inclusión que se detallan.



1) $a \in R$
2) $p \notin R$
3) $m \in S$
4) $f \notin L$
5) $S \subset L$
6) $R \not\subset L$
7) $R \subset R$

Hay conjuntos que puede denotarse con los elementos que contiene mediante "llaves". A esta forma de expresar el conjunto, se le llama **notación por extensión**. Por ejemplo, el conjunto V formado por las vocales, puede denotarse V = {a, e, i, o, u}.

Con los diagramas de Venn anteriores, se tiene que:

1) $\{a, k\} \subset L$
2) $\{m, p, k\} \not\subset S$
3) $\{u\} \subset R$

Subconjuntos de números reales

Conforme el ser humano iba avanzando en el conocimiento matemático, también fue surgiendo la necesidad de estudiar diversos conjuntos numéricos.

Inicialmente, bastaba trabajar con los números que servían **para contar**, que incluyendo el cero, ahora los llamamos **números naturales.**

Luego con el intercambio comercial, las deudas y ganancias, permitieron el estudio de los números opuestos a los naturales, los **negativos**, con los que surgen los **números enteros.**

Sin embargo, al hacer las reparticiones, se fueron percatando que no todas las situaciones de la vida podían "encajar" en unidades enteras, por lo que se desarrolló el estudio de los **números racionales.**

Y aún con ese avance, no era posible describir numéricamente ciertas propiedades matemáticas. Por ejemplo, al formar un triángulo rectángulo con catetos de una unidad, resultaba inquietante que la medida de la hipotenusa no podía ser clasificada con ninguno de los números antes detallados, y así nacen los números **irracionales.**

Todos estos números se agrupan en un conjunto al que conocemos, el **conjunto de números reales.**

En síntesis:

Conjunto de números naturales

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,...\}$$

Conjunto de números enteros

$$\mathbb{Z} = \{... -3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$$

La letra $\mathbb{Z}$ es porque en alemán, la palabra número se escribe *Zahlen*

Conjunto de números racionales está formado por todos los números que se escriben como el cociente de dos números enteros, a y b: $\frac{a}{b}$ donde b es distinto de cero. La escritura decimal de un número racional puede ser un número decimal finito o bien periódico.

En los casos que sea un número decimal finito, se le llama también número decimal.
Este conjunto se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$, ya que proviene de la palabra inglesa *Quotient*

Conjunto de números decimales está formado por todos los números que se escriben de la forma $\frac{a}{10^n}$, con "a" entero y "n" natural. El conjunto se simboliza con una "D" con doble barra: $\mathbb{D}$

Ejemplos:

- $3{,}125 = \frac{3125}{1000} = \frac{3125}{10^3} \Rightarrow 3{,}125 \in \mathbb{D}$
- $-6 = \frac{-6}{1} = \frac{-6}{10^0} \Rightarrow -6 \in \mathbb{D}$ Todo número entero pertenece a $\mathbb{D}$
- $0{,}555....$ Esta expresión representa al número $\frac{5}{9}$, el cual no puede ser expresado de la forma $\frac{a}{10^n}$. Por tanto $0{,}555.... \notin \mathbb{D}$

  Sin embargo $\frac{5}{9} \in \mathbb{Q}$

Conjunto de números irracionales está formado por los números con expansión decimal infinita no periódica. Estos números no pueden ser escritos en la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros, $b \neq 0$. Este conjunto se simboliza con la letra $\mathbb{I}$
Algunos números que pertenecen a este conjunto son: π (pi), e (Euler), Φ (phi), $\sqrt{7}$

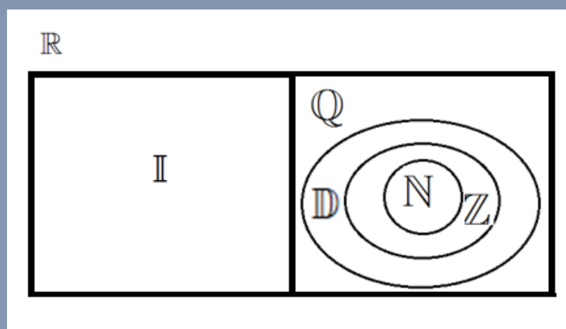
La unión de estos conjuntos forman el conjunto de números reales: $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

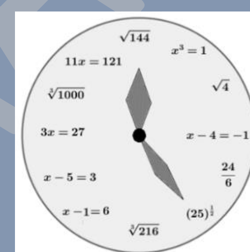
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

A continuación, veamos algunas relaciones entre elementos y conjuntos:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, que se lee: $\mathbb{N}$ es subconjunto de $\mathbb{Q}$, o bien, $\mathbb{N}$ está contenido en $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, que se lee: $\mathbb{Z}$ no es subconjunto de $\mathbb{N}$, o bien, $\mathbb{Z}$ no está contenido en $\mathbb{N}$.
- $-5 \in \mathbb{Q}$, que se lee: -5 pertenece a $\mathbb{Q}$, o bien, -5 es elemento de $\mathbb{Q}$.
- $-8 \notin \mathbb{N}$, que se lee: -8 no pertenece a $\mathbb{N}$, o bien, -8 no es elemento de $\mathbb{N}$.



Tiempo para practicar 2.1



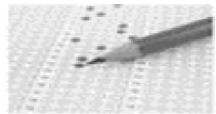
1. Complete con los símbolos $\subset$, $\not\subset$, $\in$, $\notin$ según sea el caso.

(*a*) $\mathbb{N}$ ___ $\mathbb{Q}$	(*g*) $\mathbb{Q}$ ___ $\mathbb{I}$	(*m*) -5 ___ $\mathbb{Z}$	(*r*) $\frac{13}{100}$ ___ $\mathbb{D}$
(*b*) -7 ___ $\mathbb{Z}$	(*h*) $\mathbb{D}$ ___ $\mathbb{Q}$	(*n*) 5π ___ $\mathbb{I}$	(*s*) $\frac{2\pi}{3}$ ___ $\mathbb{Q}$
(*c*) $3{,}14$ ___ $\mathbb{Q}$	(*i*) $\mathbb{Z}^+$ ___ $\mathbb{N}$	(*ñ*) $2{,}71$ ___ $\mathbb{I}$	(*t*) $-3{,}0202...$ ___ $\mathbb{Q}$
(*d*) $1{,}23$ ___ $\mathbb{D}$	(*j*) $\mathbb{N}$ ___ $\mathbb{Z}^+$	(*o*) $0{,}\overline{7}$ ___ $\mathbb{D}$	(*u*) e ___ $\mathbb{Q}$
(*e*) $2{,}3$ ___ $\mathbb{Z}^+$	(*k*) $-3{,}5$ ___ $\mathbb{D}$	(*p*) $\sqrt{3}$ ___ $\mathbb{R}$	(*v*) $-3{,}\overline{53}$ ___ $\mathbb{Q}$
(*f*) 0 ___ $\mathbb{Z}^+$	(*l*) $\frac{14}{7}$ ___ $\mathbb{D}$	(*q*) $\frac{-8}{3}$ ___ $\mathbb{Q}^-$	(*w*) $\sqrt[5]{-32}$ ___ $\mathbb{D}$

2. Complete con los símbolos $\subset$, $\not\subset$, $\in$, $\notin$ según sea el caso.

(*a*) $\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$ ___ $\mathbb{Q}$	(*b*) $\left\{\sqrt{3},\sqrt[3]{8}\right\}$ ___ $\mathbb{I}$	(*c*) 11 ___ $\{3,11\}$	(*d*) $\{\pi,\Phi\}$ ___ $\{6,\pi,\Phi\}$
(*e*) $\{0\}$ ___ $\mathbb{Z}$	(*f*) $\{1,2,3\}$ ___ $\{1,2\}$	(*g*) $\{e,5,\pi\}$ ___ $\mathbb{I}$	(*h*) Φ ___ $\mathbb{Q}$
(*i*) $\left\{\frac{3}{4},\frac{-1}{2}\right\}$ ___ $\mathbb{D}$	(*j*) 15 ___ $\mathbb{D}$	(*k*) $\left\{\frac{-2}{3},\frac{1}{9}\right\}$ ___ $\mathbb{I}$	(*l*) $7{,}\overline{8}$ ___ $\mathbb{I}$

HACIA EL



BACHILLERATO

1) Considere las siguientes proposiciones.

I. Un número decimal, con certeza es también un número racional

II. Un número irracional es $\frac{1}{\sqrt{4}}$

De ellas, son verdaderas

(A) solo la I	(B) solo la II
(C) ambas	(D) ninguno

2) Considere las siguientes proposiciones.

I. $8,\overline{96} \in \mathbb{Q}$

II. $\left\{\frac{-5}{\sqrt{25}}\right\} \subset \mathbb{Z}$

De ellas, son verdaderas

(A) solo la I	(B) solo la II
(C) ambas	(D) ninguno

3) Un número entero, con certeza es también un número

(A) racional	(B) natural
(C) irracional	(D) no decimal

4) Un número racional corresponde a

(A) $\sqrt[4]{4}$	(B) $\sqrt{\frac{81}{25}}$
(C) $1-\pi$	(D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Intervalos

Habilidades:
3. Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión.
4. Determinar la unión y la intersección de conjuntos numéricos.
5. Determinar el complemento de un conjunto numérico dado.

Escenario de aprendizaje

En Costa Rica, las personas al cumplir 12 años, usan una tarjeta de identificación de menores, la cual pierde validez al llegar a los 18 años, puesto que es reemplazada por la cédula de identidad.

(a) Mencione algunas posibles edades de las personas que deben usar la tarjeta de identificación de menores.

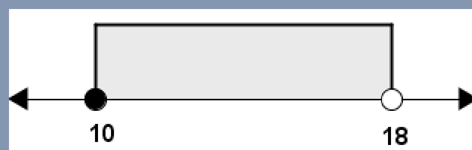
(b) De qué manera podría expresar el conjunto de las edades de aquellas personas que deben usar la tarjeta de identificación de menores. ¿Será correcto usar la notación {10,18}?

En la situación descrita, no es posible señalar cada uno de los elementos que forman el conjunto de edades, ya que este es infinito. Por ello, si se desea expresar este conjunto, es necesario usar otra notación, que representa subconjuntos infinitos de números reales, llamados **intervalos**.

Para representar los intervalos, basta con indicar los extremos del mismo, por ejemplo, en el escenario que estamos analizando, los extremos son 10 y 18. Ahora bien, esos extremos puede que sean parte del conjunto o no, y es por ello que se siguen ciertas convenciones para evitar las confusiones.

Los intervalos se pueden expresar mediante la forma gráfica, simbólica y por comprensión. Analicemos la manera de describir la situación del escenario de aprendizaje:

Gráfica Note que la persona que tiene 12 años debe usar la tarjeta de identificación de menores, pero no así la que tiene 18 años. Gráficamente se coloca un *"pequeño círculo sin rellenar"* en el valor que no se incluye, y "*relleno"* en el número que sí pertenece al intervalo.



Notación simbólica Se coloca en forma ascendente los dos extremos del intervalo, y se utilizan corchetes. Se colocan los corchetes hacia adentro si el número se incluye, hacia fuera si no se incluye.

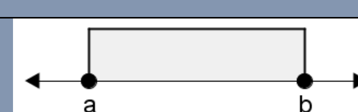
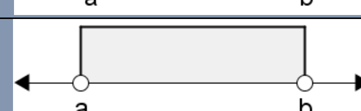
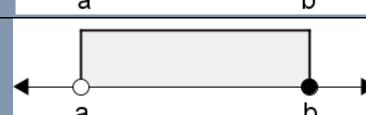
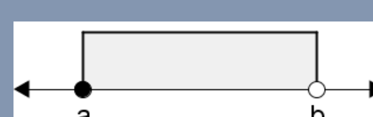
$$[10,18[$$

Por comprensión Se escribe en llaves la característica que relaciona a los valores del intervalo. Cuando el extremo del intervalo se incluye, se usan los símbolos $\leq$, $\geq$, si no se incluye se utiliza $<, >$ según sea el caso.

En nuestro ejemplo, las edades deben ser mayores o iguales a 10 pero menores a 18, por lo cual se expresa:

$$\{x \,/\, x \in \mathbb{R}, 10 \leq x < 18\}$$

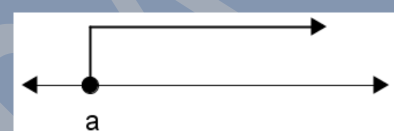
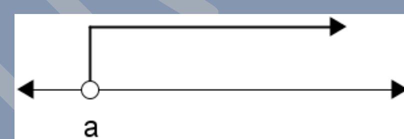
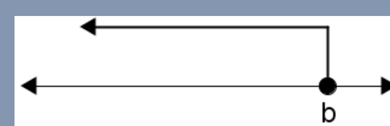
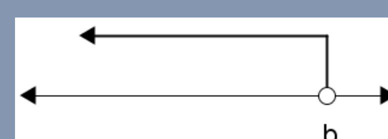
En resumen:

Notación simbólica	Por comprensión	Gráfica
$[a,b]$	$\{x, x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$	
$]a,b[$	$\{x, x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$	
$]a,b]$	$\{x, x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$	
$[a,b[$	$\{x, x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$	

Intervalos al infinito Son aquellos intervalos que solo tiene un extremo. Por ejemplo, el conjunto formado por los números mayores a 5, o el conjunto de los números menores o iguales a $\frac{-3}{7}$

En estos casos se usa el símbolo de infinito, el cual siempre va "*abierto*"

$$\infty$$

Notación simbólica	Por comprensión	Gráfica
$[a,+\infty[$	$\{x, x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$ $\{x, x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$	
$]a,+\infty[$	$\{x, x \in \mathbb{R} / x > a\}$ $\{x, x \in \mathbb{R} / a < x\}$	
$]-\infty,b]$	$\{x, x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$ $\{x, x \in \mathbb{R} / b \geq x\}$	
$]-\infty,b[$	$\{x, x \in \mathbb{R} / x < b\}$ $\{x, x \in \mathbb{R} / b > x\}$	

Operaciones con conjuntos

Unión de conjuntos La unión de dos o más conjuntos es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos. La unión de A y B se denota $A \cup B$.

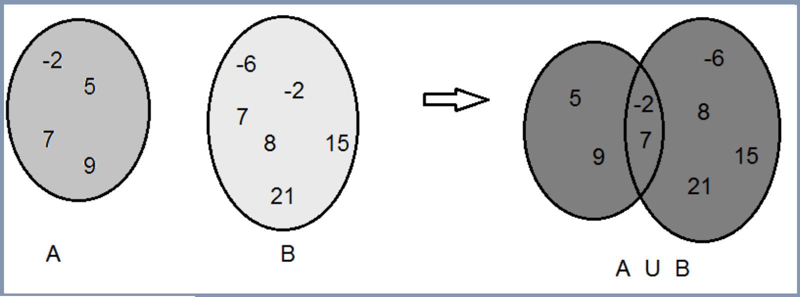
Se dice que $x \in A \cup B$ si $x \in A$ o $x \in B$

Ejemplos

1. Sean los conjuntos $A=\{-2,5,7,9\}$, $B=\{-6,-2,7,8,15,21\}$ entonces

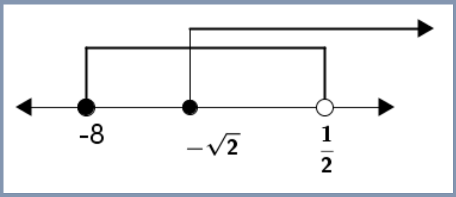
$$A \cup B=\{-6,-2,5,7,8,9,15,21\}$$

Mediante los diagramas de Venn:



2. Sean los conjuntos $A=\left[-8,\frac{1}{2}\right[$, $B=\left\{x / x \in \mathbb{R},\ x \geq -\sqrt{2}\right\}$. Determine $A \cup B$

Conviene graficar los intervalos:



Por tanto $A \cup B=[-8,+\infty[$

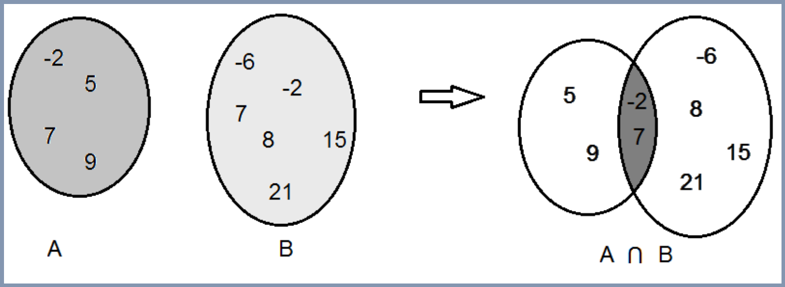
Intersección de conjuntos La intersección de dos o más conjuntos es el conjunto formado por los elementos que tienen en común ambos conjuntos. La intersección de A y B se denota $A \cap B$.

Se dice que $x \in A \cap B$ si $x \in A$ y $x \in B$

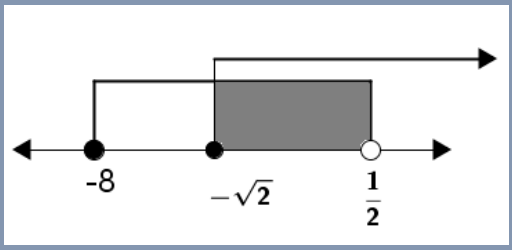
Ejemplos

1. Sean los conjuntos $A=\{-2,5,7,9\}$, $B=\{-6,-2,7,8,15,21\}$ entonces

$$A \cap B=\{-2,7\}$$



2. Sean los conjuntos $A=\left[-8,\frac{1}{2}\right[$, $B=\left\{x\,/\,x\in\mathbb{R},\ x\geq-\sqrt{2}\right\}$. Determine $A\cap B$



$A\cap B=\left[-\sqrt{2},\frac{1}{2}\right[$

Complemento de un conjunto El complemento de un conjunto es otro conjunto que contiene todos los elementos que no están en el conjunto original. Para poder definirlo es necesario especificar con qué clase de elementos se está trabajando, es decir, especificar el conjunto universal. Si A es un conjunto, su complemento se denota A^C, o bien, $\overline{A}$

Sea M el conjunto universal y $A\subset M$, entonces $x\in\overline{A}$ si $x\in M$ y $x\notin A$

Ejemplos

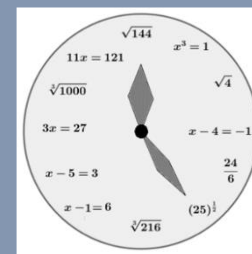
1. En el conjunto de los números enteros, el complemento del conjunto de los números pares, es el conjunto de números impares.

2. Sea el conjunto universal $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ y B = $\{2,3,5,7\}$. Se tiene que $\overline{B}=\{1,4,6\}$

3. Sea el conjunto universal $M=\{x\,/\,x\in\mathbb{R},\ -3\leq x<8\}$ y A = $]-1,4]$.

   Observe que $A\subset M$ y $\overline{A}=[-3,-1]\cup]4,8[$

Tiempo para practicar 2.2



1. Represente los siguientes intervalos reales mediante su gráfica y la notación por comprensión.

(*a*) $[-5,2[$ ______________________________

(*b*) $\left[\frac{1}{2},100\right]$ ______________________________

(*c*) $]-\infty,2\pi]$ ______________________________

(*d*) $\left]-7,\frac{-5}{2}\right[$ ______________________________

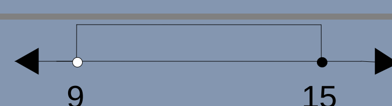
(*e*) $\left]\frac{7}{6},+\infty\right[$ ______________________________

(*f*) $\left[\sqrt{5},3\sqrt{7}\right]$ ______________________________

(*g*) $]-\infty,6[$ ______________________________

(*h*) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ ______________________________

2. Complete la tabla con la notación de intervalo, la de conjunto y la representación gráfica, según sea el caso.

Notación simbólica	Notación por comprensión	Gráfica
$]-\infty,5]$		
	$\{x/x\in\mathbb{R},-8<x\}$	
		
$\left[-9,\frac{8}{15}\right[$		
	$\{x/x\in\mathbb{R},7\geq x\}$	
	$\{x/x\in\mathbb{R},-5\leq x<6\}$	

3. Exprese mediante notación por comprensión cada conjunto. Puede guiarse con el primer ejercicio.

(a) El conjunto formado por los números pares mayores a 12

$\{x / x \in \mathbb{Z},\ x \text{par},\ x > 12\}$

(b) El conjunto formado por los números racionales menores a 11 y mayores a 3

____

(c) El conjunto formado por los números irracionales menores a $\sqrt{3}$

____

(d) El conjunto formado por los números reales negativos ______________

(e) El conjunto formado por los números reales mayor o iguales a -9 y menores a 10

____

Selección única

4. Si $P = \left\{x / x \in \mathbb{R},\ x > \frac{-7}{3}\right\}$, entonces es verdadero que

(A) $\frac{-7}{3} \in P$ (B) $\frac{-12}{5} \in P$

(C) $\frac{-21}{10} \in P$ (D) $-3 \in P$

5. Un número que pertenece al intervalo $\left\{x / x \in \mathbb{R}, -\pi < x < \frac{-1}{2}\right\}$

(A) $-\pi$ (B) -1

(C) $\frac{-63}{20}$ (D) $\frac{1}{2}$

6. Si m y n son números reales tales que $0 < m < n$ con certeza se cumple que

(A) $m \in]-\infty, 0]$ (B) $m \in [n, +\infty[$

(C) $m \in]0, +\infty[$ (D) $m \in]m, n[$

7. Si $p \in [-3, 8[$ entonces se cumple con certeza que

(A) $p \in \{x / x \in \mathbb{R}, -3 > x\}$ (B) $p \in \{x / x \in \mathbb{R}, x < 10\}$

(C) $p \in \{x / x \in \mathbb{R}, 0 \leq x\}$ (D) $p \in \{x / x \in \mathbb{R},\ 8 < x\}$

8. Si $\frac{3}{2} \in \left]a,b\right]$ y $3 \in \left]a,b\right]$ entonces se cumple con certeza que

(A) $2 \in \left]a,b\right]$ (B) $4 \in \left]a,b\right]$

(C) $\frac{1}{2} \in \left]a,b\right]$ (D) $\frac{11}{2} \in \left]a,b\right]$

9. Si $2 \in [a,b[$, entonces con certeza se cumple que

(A) $2 = a$ (B) $2 \neq b$

(C) $2 < a$ (D) $2 > b$

10. En cada caso se da el conjunto universal y subconjuntos de este. Determine lo que se le solicita de modo que se complete el cuadro.

Conjunto Universal M	Subconjuntos de M	$A \cup B$	$A \cap B$	A^C	$\overline{B}$
(a) $\mathbb{R}$	$A = \left[-1,9\right[$ $B = \left]-\infty,4\right]$				
(b) $\{-11,-9,-6,0,3,7,12\}$	$A = \{-6,0,7\}$ $B = \{-11,3,7\}$				
(c) $\mathbb{Z}$	$A = \{x \in \mathbb{Z}, x \text{ par}\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z}, x \text{ impar}\}$				
(d) $\mathbb{Z}^+$	$A = \{x \in \mathbb{Z}^+, x \text{ par}\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z}^+, x \text{ primo}\}$				
(e) $\mathbb{R}$	$A = \left]-\infty,3\right]$ $B = \left]10,+\infty\right[$				
(f) $\{x / x \in \mathbb{Z}, -8 < x \leq 7\}$	$A = \{-7,-5,-1,0,5\}$ $B = \{-5,-1,4,6,7\}$				

11. Sean los conjuntos Universal $= \{x / x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 10\}$, $A = \{-2,3,5,8,9,7\}$ $B = \{-2,1,3,4,5,7,9\}$ $C = \{0,-2,3,4,5,6,8\}$.

Determine (a) $A \cup B$ (b) $A \cup C$ (c) $A \cup B \cup C$ (d) $C \cap B$ (e) $A \cap C$ (f) $A \cap B \cap C$ (g) $\overline{A}$ (h) $\overline{B \cap C}$ (i) $\overline{A \cup B \cup C}$

12. Considere el conjunto $H=\{x, x\in\mathbb{N} / x<12,\ x \text{ par}\}$ y complete los espacios en blanco con $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ según sea.

12 ______ H	$\{0, 8\}$ ______ H	$\{-2,\ 2\}$ ______ H
7 ______ H	$\{2\}$ ______ H	$\{14\}$ ______ H

13. Considere los conjuntos:

Universal: $\{x, x\in\mathbb{N} / 7<x\leq 16\}$

A = $\{x, x\in\mathbb{N},\ x \text{ impar } / 9\leq x<15\}$

B = $\{x, x\in\mathbb{N},\ 8<x\leq 16 / \ x \text{ múltiplo de } 3\}$

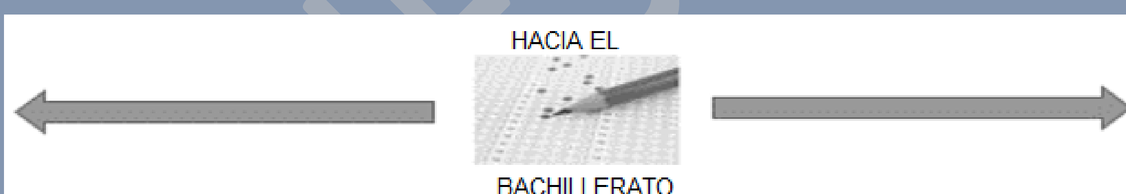
Determine (a) $A\cap B$ (b) $A\cup B$ (c) $\overline{A}$ (d) $\overline{B}$ (e) $\overline{A\cup B}$

14. Considere los conjuntos:

Universal: IR

$M=\left\{x, x\in IR,\ x<\dfrac{3}{2}\right\}$ $\qquad N=\left[-\sqrt{3},+\infty\right[$

Determine (a) $M\cap N$ (b) $M\cup N$ (c) $\overline{M}$ (d) $\overline{N}$ (e) $\overline{M\cap N}$



1) El conjunto de números reales menores a 1 corresponde a

(A) $]-\infty, 1]$	(B) $[1,+\infty[$
(C) $]1,+\infty[$	(D) $]-\infty, 1[$

2) El conjunto $\{x, x\in \text{IR} / x\geq \pi\}$ expresado en notación simbólica corresponde a

(A) $[\pi,+\infty[$	(B) $]\ \pi,+\infty[$
(C) $]-\infty,\ \pi[$	(D) $]-\infty,\ \pi]$

3) Sean los conjuntos A = {-2, 5, 7} B = {5, 7, 9}. El conjunto $A \cap B$ corresponde a

(A) $[5,7]$

(B) {-2, 5, 7, 9}

(C) {5, 7}

(D) $[-2,9]$

4) Considere los conjuntos $M =]-\infty, e]$, $N =]-1, +\infty[$. El conjunto $M \cup N$ corresponde a

(A) IR

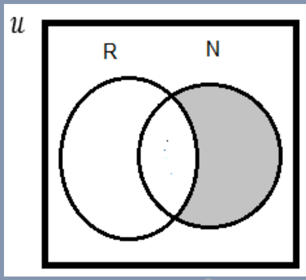
(B) $[e, +\infty[$

(C) $]-1, e]$

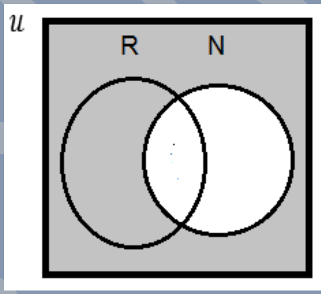
(D) $[-1, e[$

5) Un diagrama que representa el complemento de N corresponde a

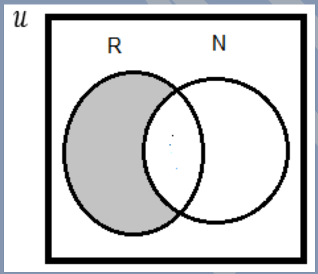
(A)



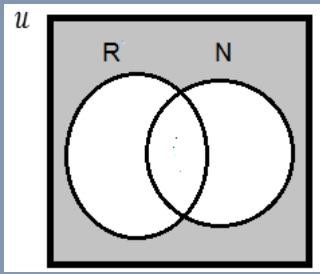
(B)



(C)



(D)



6) Considere los conjuntos $A =]-\infty, -3]$, $B =]-\infty, 0[$. El conjunto $A \cup B$ corresponde a

(A) IR

(B) $[-3, 0[$

(C) $]-\infty, -3]$

(D) $]-\infty, 0[$

7) Considere el conjunto universal IR y $A = \left]-2, 17\right]$. El conjunto $\overline{A}$ corresponde a

(A) $\left]-\infty, -2\right] \cup \left]17, +\infty\right[$	(B) $\left]-\infty, -2\right[\cup \left[17, +\infty\right[$
(C) $\{-2, -1, 0, 1, \ldots 17\}$	(D) $\{-2, 17\}$

8) Sean M = $\{x,\ x \in \mathbb{N},\ x < 15\}$, N = $\{x,\ x \in \mathbb{N},\ x \geq 3,\ x$ múltiplo de 3 $\}$ Considere las siguientes proposiciones.

I. $12 \in M \cap N$

II. $15 \in M \cup N$

De ellas, son verdaderas

(A) solo la I	(B) solo la II
(C) ambas	(D) ninguno

9) Sean M = $\{x,\ x \in \mathbb{N},\ x$ primo $\}$, N = $\{x,\ x \in \mathbb{N},\ x$ par $\}$ Considere las siguientes proposiciones.

I. $M \cap N = \{2\}$

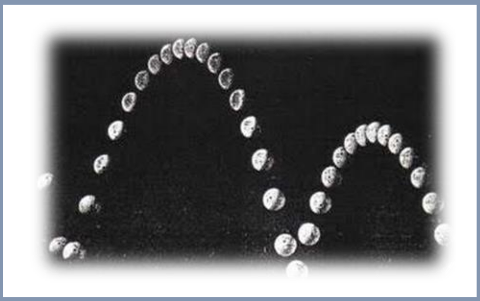
II. $7 \notin M \cup N$

De ellas, son verdaderas

(A) solo la I	(B) solo la II
(C) ambas	(D) ninguno

10) Si $\left[-1, 5\right[\cap \left]4, 9\right] = \left]A, B\right[$, entonces, ¿cuál es el valor de B?

$\square\square\square\square,\square\square$



En muchas situaciones cotidianas hacemos relaciones, en las que un factor depende de otro. Por ejemplo, si queremos saber que tal estamos de masa corporal, el médico nos mide y según nuestra edad, nos indica el peso ideal. Si vamos en un taxi, el monto a pagar depende de la distancia recorrida, del valor del primer kilómetro y un factor de espera. Incluso la presión del agua y la inclinación para que una fuente se vea atractiva, tiene un principio matemático. La misma naturaleza es una muestra sorprendente de cómo se relacionan diferentes componentes.

Es conveniente estudiar algunas de estas relaciones, pues resultan de gran importancia en áreas como las ingenierías, economía, arquitectura, ciencias y otras diversas áreas del saber.

Conocimiento: Funciones

Habilidades:

6. Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función y sus representaciones.
7. Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.

Escenario de aprendizaje

Cipriano se desea hospedar en un hotel cerca del Parque Nacional Manuel Antonio. Consulta en la recepción y le indican que el costo es de 25 000 colones por día, lo cual incluye el uso de la habitación e instalaciones por 24 horas, así como el desayuno. El derecho de usar la caja fuerte es de 3000 colones, los cuales se pagan solo una vez. Suponga que Cipriano pagará el uso de la caja fuerte.

(a) Si Cipriano se hospeda durante 12 días ¿Cuánto debe pagar?

(b) Si se hospeda solo 6 días ¿pagará la mitad de lo que pagó con 12 días?

(c) Finalmente Cipriano pagó 353 000 colones. ¿Cuántos días se hospedó?

Comúnmente podemos estar en una situación similar a la de Cipriano y deberíamos ser capaces de dar respuesta a estas interrogantes. También es probable que el hotel tenga un sistema computarizado que haga los cálculos de modo que permitan agilizar la atención al cliente. Sin embargo; para ello primero deben establecer una fórmula que relacione el número días y el uso de la caja fuerte, con el precio a pagar.

A relaciones como esta, en matemática se les conoce como **funciones**, las cuales tienen una **variable independiente** (en este caso los días) y otra que **depende** de esta (en este problema sería el precio).

Establecer la fórmula para determinar el precio, en función de los días de hospedaje, es determinar el **criterio de la función.**

Para la situación planteada podríamos expresar que el precio P para x días de hospedaje, incluyendo el uso de la caja fuerte, está dado por

$$P(x) = 25\,000x + 3000$$

Este criterio ayudará a agilizar los cálculos solicitados y otros que se puedan presentar.

(a) El precio para hospedarse 12 días será $P(12) = 25000 \bullet 12 + 3000 = 303000$ colones

(b) Al hospedarse 6 días pagará: $P(6) = 25000 \bullet 6 + 3000 = 153000$ colones, que no es la mitad de 303 000. Hay una diferencia de 1500 colones, debido a que los 3000 colones por uso de la caja fuerte son **constantes.**

(c) Para determinar los días que se hospedó Cipriano, es necesario determinar el valor de x, por lo que conviene hacer una ecuación:

$$353000 = 25000 \bullet x + 3000$$
$$\Rightarrow \frac{353000 - 3000}{25000} = x$$
$$\Rightarrow 14 = x$$

Por tanto Cipriano se hospedó 14 días en el hotel

En este capítulo se profundizará sobre los conceptos y aplicaciones que tienen estas y otras funciones.

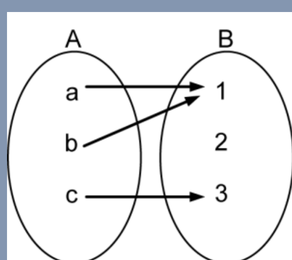
Definición de función

Una función es una correspondencia entre dos conjuntos A y B no vacíos, en la cual, para todo elemento “a” que pertenece al conjunto A, existe un único elemento “b”, que pertenece al conjunto B, al cual se asocia o corresponde.

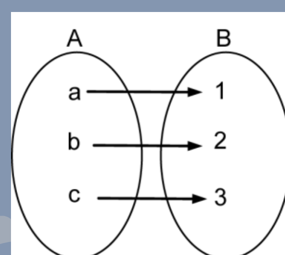
Para simbolizar que se ha establecido una función f, de un conjunto A en un conjunto B, usaremos la siguiente notación: $f: A \to B$

Los siguientes diagramas ilustran tres diferentes correspondencias entre A= {a, b, c} y B= {1, 2, 3}, las cuales son funciones.

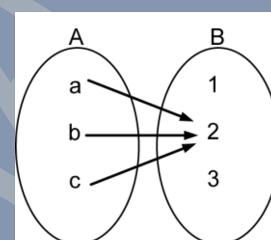
1.



2.

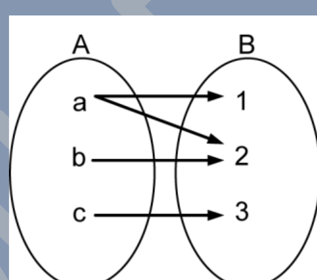


3.

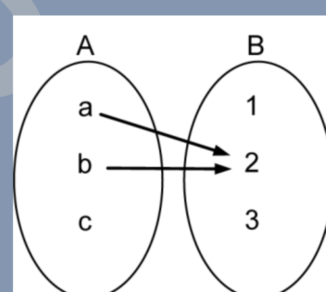


Estos otros diagramas presentan tres diferentes correspondencias entre A= {a, b, c} y B= {1, 2, 3}, las cuales no son funciones.

1.



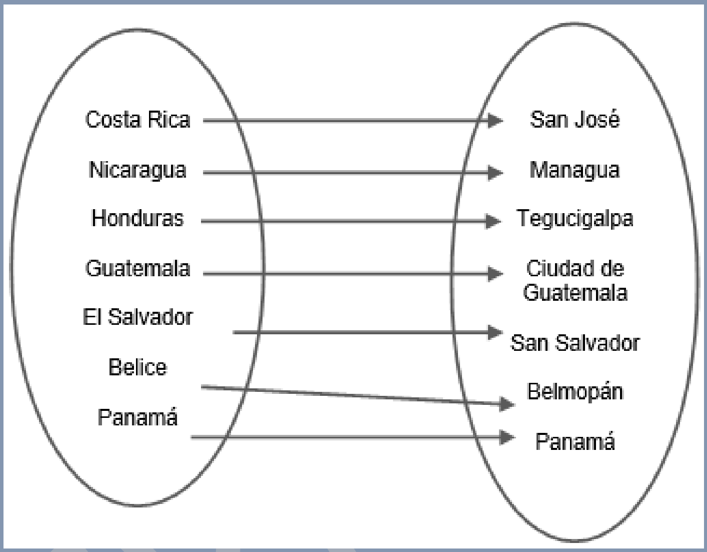
2.



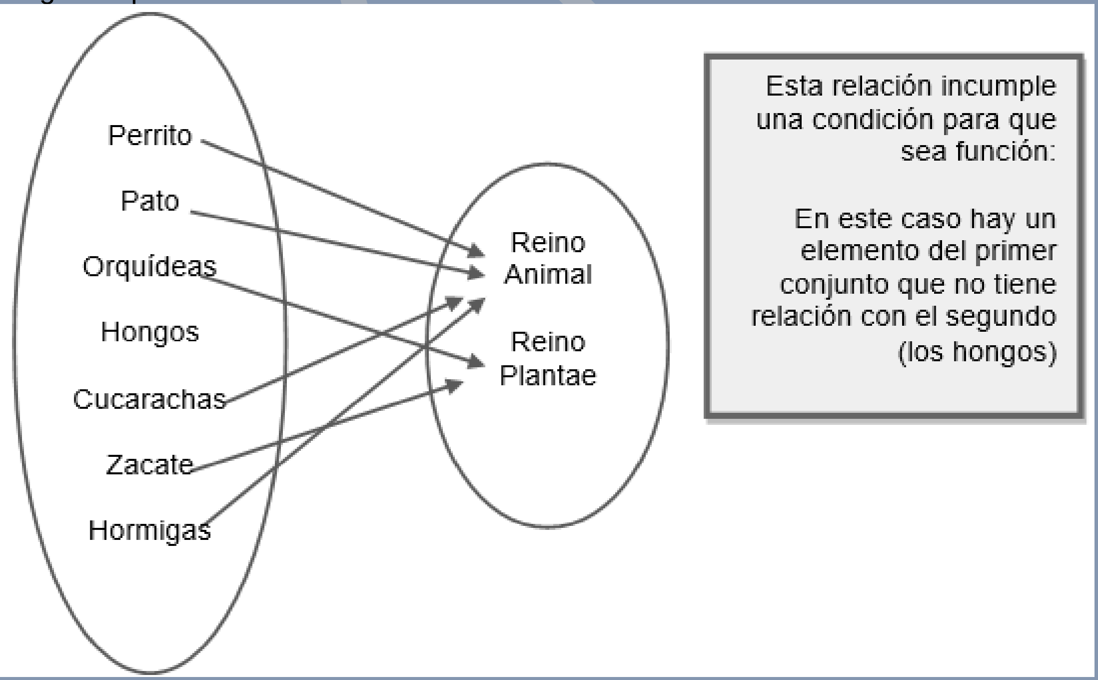
- En la correspondencia 1, el elemento “a” se relaciona con dos elementos en B, lo cual contradice la condición «existe **un único elemento** “b” » del concepto de función, por tanto no es función.
- El diagrama 2 no es función pues el elemento “c” no se asocia con ningún elemento en B, lo que contradice la condición «**para todo** elemento “a” » de la definición de función.

Ejemplos

1. En la clase de Estudios Sociales, se les pide a los estudiantes que a cada país de Centroamérica se le asocie su respectiva capital. En este caso la relación sí es una función.



2. A Clementina se le solicitó buscar diversas especies de seres vivos en su patio y luego relacionarlos en los reinos animal y plantae. Clementina encontró arañas, un perrito, un pato, orquídeas, hongos, cucarachas, zacate, helechos y hormigas. Utilicemos un diagrama para analizar la relación.



Dada una función $f:A \to B$ con $f(x) = y$, $x \in A$, $y \in B$ se define:

- **Dominio** o conjunto de partida, al conjunto A y se denota como D_f. También se le puede llamar conjunto de preimágenes.

- Codominio o conjunto de llegada, al conjunto B. Se denota Cod_f.

- Preimagen de un elemento $b \in B$, a aquel elemento $a \in A$ (del dominio), que se asocia con "b" bajo la función f. Por tanto el conjunto de las **preimágenes** equivalen al dominio.

- Imagen de un elemento $a \in A$, a aquel elemento $b \in B$ (del codominio), que se asocia con "a" bajo la función f.

- Conjunto de imágenes a los elementos del codominio que se asocian con una preimagen, mediante el criterio de la función. El **ámbito** equivale al conjunto de imágenes. Se denota A_f o f(A).

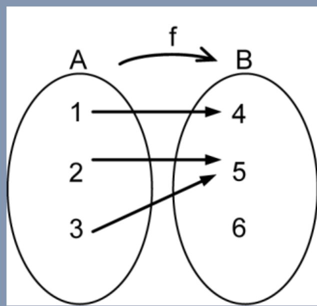
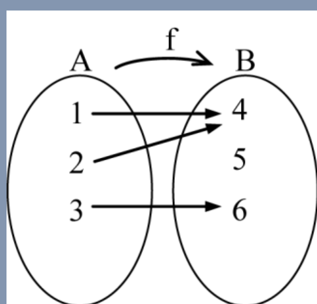
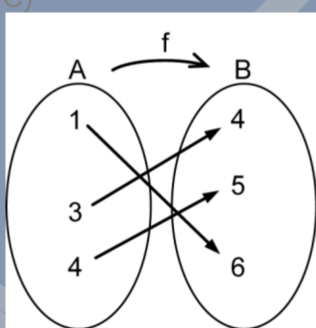
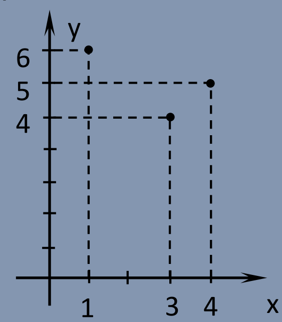
- A "**x**" como la variable independiente y a "**y**" variable dependiente.

- Criterio a la regla que establece la correspondencia entre los elementos de A y B. La regla puede darse mediante una expresión algebraica bien definida. Por ejemplo $f(x)= 2x +1$.

- Gráfico al conjunto de pares ordenados (x, y) tal que $f(x) = y$. Se denota G_f.

- Gráfica a la representación de todos pares ordenados que pertenecen al gráfico (G_f), representados como puntos en un sistema de ejes cartesianos.

Ejemplos

f:A → B	**Análisis**
A) 	La preimagen de 4 es 1. Una preimagen de 5 es 3. La imagen de 2 es 5. El ámbito de f es {4, 5}. El gráfico de f es {(1,4), (2,5), (3,5)} El dominio de f es {1, 2, 3}. El codominio es {4, 5, 6}.
B) 	Una preimagen de 4 es 1. La imagen de 2 es 4 El gráfico de f es {(1,4), (2,4), (3,6)} El dominio es {1, 2, 3}. El ámbito es {4, 6}. El codominio es {4, 5, 6} El conjunto de las imágenes es {4, 6}.
C) 	Gráfica de f 

El ejemplo C) corresponde a una función con gráfico finito, por lo tanto no se traza línea entre los puntos. A continuación se estudian funciones cuyas gráficas tienen infinitos puntos y al construirlas, se unen los puntos representados. Los trazos pueden ser en algunos casos rectos y en otros son curvos. Algunas funciones tienen gráficas que combinan trazos rectos y curvos. Los trazos pueden ser continuos o no.

Función real de variable real

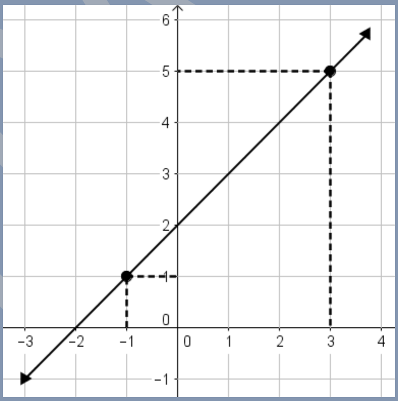
Una función cuyo dominio y codominio son intervalos de números reales, se dice que es una función real, de variable real.

Para graficar estas funciones, es conveniente hacer una tabla de valores, ubicar algunos de los pares ordenados y luego hacer un trazo de la curva o recta que une esos puntos

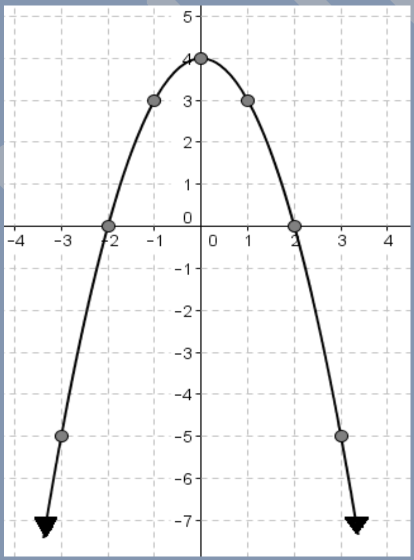
Ejemplos:

A) f: $[-1, 3] \rightarrow [1,5]$ tal que f(x) = x+2.

x	-1	3
y	1	5



B) h: IR →IR, tal que $h(x) = 4 - x^2$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
h(x)	-5	0	3	4	3	0	-5

¿Cuáles relaciones son funciones?

Dado el criterio, tabla o gráfica de una relación, se puede determinar si esta es una función o no, para lo cual se verifica si para toda preimagen, existe una única imagen que la relacione. Analicemos los siguientes ejemplos.

1. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{N} \qquad f(x)=x^2+1$

En este caso como el conjunto de salida es todo $\mathbb{R}$, podemos tomar como un posible valor de "x" el número 1/3 en cuyo caso f(1/3) = 10/3 el cual no es un número natural. Por tanto se ha encontrado un elemento del primer conjunto que no tiene con quien asociarse en el segundo conjunto . Se concluye que *f* no es una función.

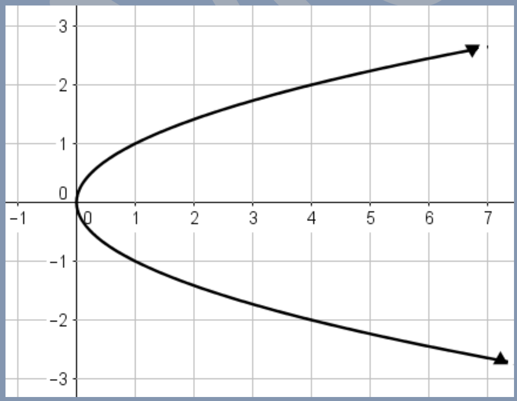
2. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \qquad f(x)=\dfrac{2x}{3-x}$

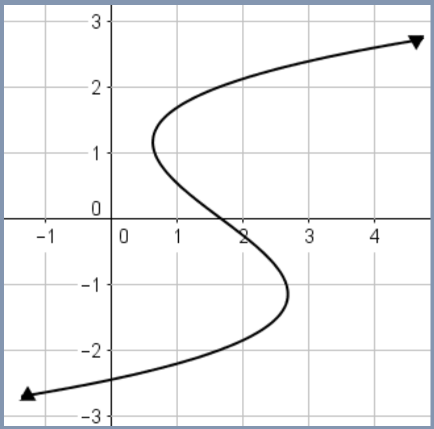
Para este caso, solo existe un número del primer conjunto que no se relaciona con el segundo. Esto es cuando x = 3, ya que en este valor se indefine la expresión. Por tanto la relación no es función.

3. $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{Z} \qquad f(x)=\sqrt{x}$

Al recordar la definición de la raíz cuadrada de un número , veremos que cualquier valor de esta relación estará asociado a otros dos. Por ejemplo, x = 49 se relaciona con 7 y – 7. Por tanto no es función.

4. Justifique por qué las siguientes gráficas no corresponde a funciones.





Cálculo de imágenes y preimágenes

Tal como se hizo con el escenario de aprendizaje del hotel en Manuel Antonio, cuando una función está definida mediante una expresión algebraica se pueden calcular **imágenes mediante la sustitución** de la variable en esa expresión.

La preimagen se obtiene igualando la expresión al valor dado y se resuelve la ecuación. La solución de la ecuación es la preimagen solicitada. Una ecuación puede tener una o varias soluciones según sea el caso, por tanto se puede obtener una o más preimágenes.

Ejemplos:

1. Sea la función f definida por $f(x)=x-2$, obtener f(−1), f(0), f(1), f(3)

$f(-1)=-1-2=-3$ $\Rightarrow f(-1)=-3$	$f(0)=0-2=-2$ $\Rightarrow f(0)=-2$	$f(1)=1-2=-1$ $\Rightarrow f(1)=-1$	$f(3)=3-2=1$ $\Rightarrow f(3)=1$

2. Sea la función $f:[-2,+\infty[\,\to[0,+\infty[, f(x)=\sqrt{x+2}$, obtener f(−1), f(0), f(2), f(1+2a)

$f(-1)=\sqrt{-1+2}=\sqrt{1}=1$ $\Rightarrow f(-1)=1$	$f(0)=\sqrt{0+2}=\sqrt{2}$ $\Rightarrow f(0)=\sqrt{2}$	$f(1)=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$ $\Rightarrow f(1)=\sqrt{3}$	$f(1+2a)=\sqrt{1+2a+2}$ $=\sqrt{3+2a}$

3. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-9$, obtener f(−3), f(−2), f(2), f(a-3)

$f(-3)=(-3)^2-9=0$ $\Rightarrow f(-3)=0$	$f(-2)=(-2)^2-9=-5$ $\Rightarrow f(-2)=-5$	$f(2)=(2)^2-9=-5$ $\Rightarrow f(2)=-1$	$f(a-3)=(a-3)^2-9$ $=a^2-6a+9-9$ $\Rightarrow f(a-3)=a^2-6a$

4. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2-3x, & \text{si } x\geq 2 \\ x-7, & \text{si } x<2 \end{cases}$, calcule $\dfrac{f(2)-f(3)}{f(-5)}$

$f(2)=2^2-3\cdot 2$ $=-2$	$f(3)=3^2-3\cdot 3$ $=0$	$f(-5)=-5-7$ $=-12$	$\dfrac{f(2)-f(3)}{f(-5)}=\dfrac{-2+0}{-12}=\dfrac{1}{6}$

5. Sea la función $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x)=9$, obtener $p(-3)$, $p(1/8)$, $p(\sqrt{7})$

$p(-3)=9$	$p\left(\frac{1}{8}\right)=9$	$p(\sqrt{7})=9$	Esta función se conoce como función constante

6. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$, obtener la preimagen de 3

$x-2=3\Rightarrow x=5$. La preimagen de 3 es 5.

7. Sea la función $f:IR\to IR$, $f(x)=x^2-9$, obtener la preimagen de - 1

$x^2-9=-1\Rightarrow x^2=-1+9=1$

$x^2=8\Rightarrow x=\pm\sqrt{8}$

Las preimágenes de -1 son $-\sqrt{8}$ y $\sqrt{8}$.

8. Para la función $f:\left]-5,2\right]\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\dfrac{5}{-x-7}+x$, determine el ámbito.

Se calculan las imágenes de los extremos del dominio:

$f(-5)=\dfrac{5}{-^{-}5-7}+-5=\dfrac{-15}{2}$

$f(2)=\dfrac{5}{-2-7}+2=\dfrac{13}{9}$

Por tanto el ámbito es $\left]\dfrac{-15}{2},\dfrac{13}{9}\right]$

9. En la función $f:A\to B$ con $f(x)=x^2+5x$, 24 es la imagen de __________

Función inyectiva

Una función $f:A\to B$ es inyectiva (función uno a uno), si todo elemento del codominio es imagen de a lo sumo de un elemento del dominio.

Simbólicamente: $\forall\ f(x_1)\in B,\ \forall\ f(x_2)\in B$, si $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

También se puede expresar: $\forall\ f(x_1)\in B,\ \forall\ f(x_2)\in B$, si $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

Ejemplos

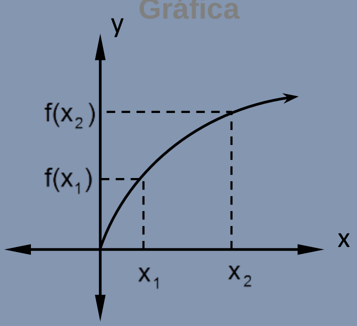
A) $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$, definida por $f(x)=\sqrt{x}$

Esta función cumple la condición

$\forall\ f(x_1), f(x_2)\in[0,+\infty[$ si $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

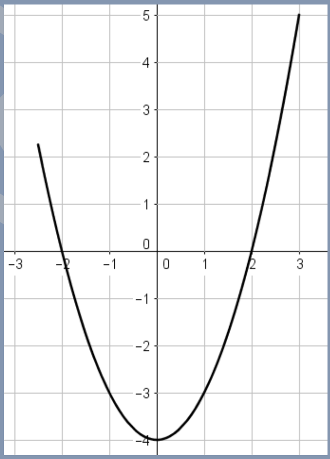
pues si $x_1\neq x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1}\neq\sqrt{x_2}$

Gráfica



Por tanto f es inyectiva.

B) $g:\left[-\frac{5}{2},3\right]\to[-4,5]$, tal que $g(x)=x^2-4$



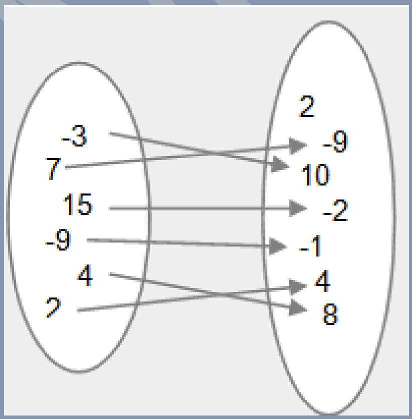
Note que por ejemplo que

$-2\neq 2$ pero $f(-2)=f(2)=0$

Por tanto g NO es inyectiva.

Tiempo para practicar 2.3

1. Considere la siguiente función f representada en el diagrama de Venn y halle lo que se le solicita.



Dominio: ____________________

Codominio____________________

Ámbito o rango ________________

Preimágenes__________________

Gráfico______________________

f(-9) ____________ .

La preimagen de 4 _____________

f(-3) • [f(2) – f(7)] _____________

2. A cada día de la semana se le asigna la inicial de su nombre, así por ejemplo al día Jueves se le asigna la J. Dibuje un diagrama de Venn y determine el dominio, ámbito y gráfico.

3. Se presentan a continuación diversas relaciones que van de A a B. Construya un diagrama de Venn para identificar cuáles relaciones corresponden a una función. De ser así identifique el ámbito, dominio, codominio, imágenes, preimágenes, gráfico de la función y el criterio.

   a) A = {-3, -1, 0, 1, 3} y B = {0, 1, 2, 3} La relación f que asocia cada número de A con su opuesto
   b) A = {0, 5, 9} y B = {0, 5, 25, 81, 100} La relación g que asocia cada número de A con su cuadrado
   c) A = {1, 2, 3, 4} y B = { -3, 0, 8} La relación h que asocia todo número de A con el ocho.
   d) A= $\left[3,8\right[$, $B=\left[4,20\right[$ La relación f de que asocia a cada número de A con su duplo.

4. Determine en cada caso si la relación *f* corresponde a una función. Justifique la respuesta.

   a) $f:\{-2,4,7\}\to\{10,-8,4,19,21\}$, $\quad f(x)=3x-2$
   b) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\quad f(x)=3-x$
   c) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{2}$
   d) $f:\mathbb{R}^{-}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=|x+1|$
   e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{N}$, $\quad f(x)=\sqrt{x}$

5. El costo D en dólares de producir semanalmente m unidades de pulseras está dado por D(m) = 2m + 1. Determine:

   a) La variable dependiente.
   b) La variable independiente.
   c) El costo por producir 256 pares de pulseras por semana.
   d) La cantidad de pulseras producidas en una semana, si el costo fue de 919 dólares.

6. En una entidad financiera, a inicios del 2016, realizar una conversión sobre el valor del colón “C” con respecto al dólar estadounidense “d”, usaba una función dada por C (d) = 542d. Determine:
   a) La variable dependiente e independiente
   b) El valor en colones de 124 dólares.

7. El tamaño L, en centímetros, de un feto de más de 12 semanas en términos de la edad *t* (dada en semanas) está modelada por L(*t*) = 1,48 *t* – 6,7. Determine:

a) La variable dependiente
b) La variable independiente
c) El dominio de la función. (recuerde que aproximadamente son 40 semanas de gestación)
d) Las semanas de gestación de un feto que mide 25, 86 cm
e) El tamaño aproximado de un niño que nace a las 40 semanas de gestación.
f) La diferencia de tamaño del feto entre la semana 25 y la 32

8. La longitud, en centímetros, de un resorte L en función de la masa m está dado por L(m) = 0,8m +3,2. Determine la longitud del resorte si tiene 5g de masa. Si el resorte mide 26,4 cm determine la masa del resorte.

9. La ganancia G por producir “y” escritorios mensuales está dada por.
$G(y) = -2y^2 + 380y - 12$
a) ¿Qué ganancias se obtendrán al producir solo dos escritorios?
b) ¿Cuánta más ganancia se obtiene al producir 60 escritorios, en lugar de 55?
c) ¿Cuál es la variable dependiente?

10. Considere el criterio en cada caso y halle lo que se le solicita.

	Criterio			
(a)	$f(x) = 6 - \frac{x+2}{2}$	La imagen de 7	La preimagen de 3	f (-9)
(b)	$h(x) = x^2 - 2x$	La imagen de $\frac{-1}{2}$	La preimagen de 35	El valor de $\frac{5 \bullet h(3) - h(-1)}{h(4)}$
(c)	$f(x) = \begin{cases} x - 3x^2 & si\ x < 5 \\ 4 & si\ x \geq 5 \end{cases}$	f (6)	f (5)	f (-2)
(d)	$h(x) = 6x - 5$	La preimagen de 3	El valor de $\frac{h(x) - h(6)}{x - 6}$	$h\left(\frac{5-a}{2}\right)$
(e)	$g(x) = \sqrt[3]{2x-1}$	La imagen de 4	La preimagen de 2	g (0)
(f)	h(x) = 3m + 1 m constante	h (7)	La imagen de 2n + 2	

	Criterio			
(g)	$f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$	$f\left(\dfrac{5}{2}\right)$	$f(1)-f(3)$	La preimagen de $\dfrac{2}{3}$
(h)	$h(x)=3(2x-1)^2-x$	h(-5)	h (a+3)	La imagen de 0
(i)	$p(x)=6$	La imagen de 7	p(-1)	p(5) – p(2)

11. Si f(x) = 5 – 2x y f(k) = 7 ¿cuál es el valor de k?

12. Para la función *f*, su gráfico es $G_f=\left\{\left(-7,\sqrt{2}\right),\ \left(2,3\sqrt{2}\right),\ (0,2),\ \left(4,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(5,\dfrac{1}{3}\right)\right\}$

. Determine

a) Dominio

b) Ámbito

c) Imagen de 2

d) $\dfrac{f(-7)+f(4)}{f(2)}$

13. Para la función $f:A\to IR$ con $f(x)=\sqrt{x+4}$, el ámbito de f es $\{5, 11, 15\}$. Determine el dominio de *f*

14. Para la función $f:[-9, 26[\to IR$ con $f(x)=-\sqrt[3]{x+1}$, determine el ámbito.

15. Para la función dada por $f(x)=\dfrac{3}{x-2}+1$, se cumple que –2 es la imagen de

16. Para la función dada por $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ se cumple que 0 es la preimagen de ___

17. Si (2,3) es un elemento del gráfico de f(x) = 3xk – 9, entonces ¿cuál es el valor de k?

18. Para la función $f:\left]-5, \dfrac{-1}{3}\right]\to IR$ con $f(x)=\dfrac{2}{x}+x$, determine el ámbito.

19. Para la función $f:M\to IR$ con $f(x)=x^3-\dfrac{3}{5}$, el ámbito de f es $\left]0, \dfrac{2}{3}\right]$.

Determine el dominio de *f*

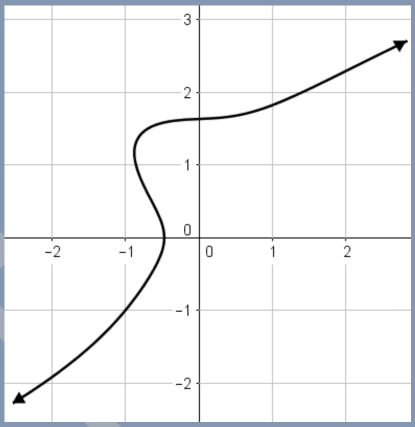
20. Si el largo de un rectángulo es el triple del ancho, exprese mediante una función el área del rectángulo A en términos del ancho “a”.

21. Exprese mediante una función el perímetro de un cuadrado P en términos de su diagonal “d”.

22. En cada caso se presenta una gráfica o una representación tabular de diversas relaciones. Indique si corresponden o no a funciones.

(a)

(b)



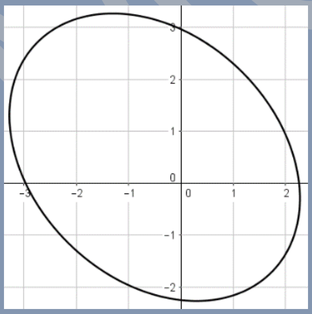
(c)

x	-3	-2	-1	0	1	1	2
y	-2	4	1	-7	3	0	-5

(d)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	4	-4	4	-4	4	-4

(e)



(f)

23. Según la representación que se brinda de cada función, determine si es **inyectiva** en todo el dominio.

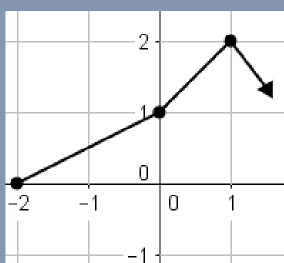
(a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	2	1	3	5	7	-4

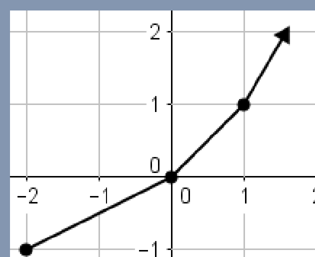
(b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	2	1	3	5	7	-4

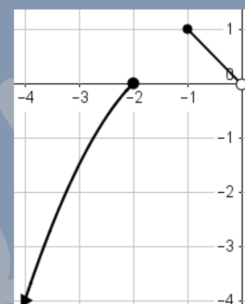
(c)



(d)

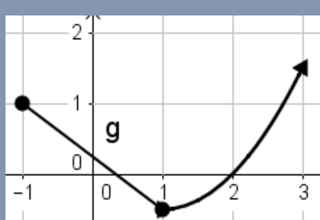


(e)

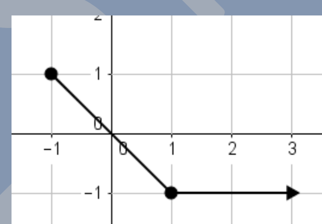


24. Dada la representación gráfica de una función f, determine en cuáles intervalos f es inyectiva.

(a)



(b)



Selección Única

1) Para la función dada por $f(x)=\dfrac{5-3x}{5}$, la preimagen de -2 equivale a

(A) 5

(B) $\dfrac{5}{3}$

(C) $\dfrac{11}{15}$

(D) $\dfrac{17}{3}$

2) Para la función dada por $f(x)=-x^2-3x$ la imagen de -2 equivale a

A) -10

B) 10

C) -2

D) 2

3) Para la función dada por $f(x)=2-\dfrac{2-x}{2}$ la preimagen de -1 equivale a

A) $\dfrac{1}{2}$
B) $\dfrac{3}{2}$
C) 4
D) -4

4) Para la función dada por $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-2}}{3}$ la preimagen de $\dfrac{2}{3}$ equivale a

A) 2
B) 3
C) $\dfrac{2}{3}$
D) $\dfrac{4}{3}$

5) Para la función dada por $f(x)=2-\dfrac{3x}{2}$, 6 es la preimagen de

A) -3
B) -7
C) $-\dfrac{4}{3}$
D) $-\dfrac{8}{3}$

6) Para la función $f:\mathbb{Z}^- \to \mathbb{Z}$, dada por $f(x)=x^2+1$, considere las siguientes proposiciones.

I. El ámbito de f es $\mathbb{Z}^+$
II. 10 es un elemento del ámbito de f.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II.

7) Para la función *f* con $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{x-3} & \text{si } x\geq 3\\ -x-5 & \text{si } x<3\end{cases}$ el valor de $f(5)-f(-2)$ corresponde a

A) $-\dfrac{41}{5}$
B) $-\dfrac{59}{5}$
C) -59
D) 66

8) Sea f una función $f:A\to[0,3[$, donde $G_f=\{(3,0),(2,1),(5,2)\}$ es el gráfico de la función f, entonces es VERDADERO que

A) El codominio es igual al ámbito
B) A = { 0, 1, 2}
C) La preimagen de 2 es 5
D) A = $[2, 5]$

9) Si para la función $f:A\to\mathbb{R}$, con $f(x)=x^3-1$, el ámbito es $[-3,3[$, entonces A equivale a

A) $\mathbb{R}$
B) [-28, 26]
C) $\left[-\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}\right[$
D) $\left[-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right[$

10) Para la función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, con $f(x)=1-3x$ considere las siguientes proposiciones:

I. (-3, 10) pertenece al gráfico de f
II. La preimagen de 3 es -8.

De ellas ¿Cuáles son verdaderas?

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II.

11) Sea $f:\{0,1,2,3,...,10\}\to\mathbb{Z}$, un posible par ordenado que pertenece al gráfico de f corresponde a

A) (-3,1)
B) $\left(10,\frac{1}{3}\right)$
C) (7,-6)
D) (11,0)

12) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, una función. Si el dominio de f satisface tiene 12 elementos, entonces el número de elementos del ámbito de f puede ser

A) 0
B) 5
C) 14
D) 20

13) Sea $f:P\to\mathbb{Z}$, una función. Si el ámbito de f es {-3, -1, 0 1, 5}, entonces el número de elementos del dominio de f puede ser

A) 2
B) 7
C) 4
D) 3

14) Para la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{-10}{x^2}$ considere las siguientes proposiciones

I. El ámbito de f es $\mathbb{R}^+$
II. (-1, 10) es un elemento del gráfico de f.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II

16) Si f es una función cuyo criterio está dado por $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2x}{5}$ y $(2k,5)\in G_f$ entonces el valor de k corresponde a

A) -3
B) $-\frac{3}{2}$
C) $-\frac{3}{4}$
D) $-\frac{45}{8}$

17) ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponden a una función?

A) $\{(-3,2)(2,-3)(0,0)\}$

B) $\{(4,-5)(2,-1)(4,0)\}$

C) $\{(-1,1)(-7,6)(-1,0)\}$

D) $\{(0,-1)(2,8)(2,0)\}$

18) Considere las siguientes relaciones.

I. $h:\{-5,-2,6\}\to\{-1,0,5\}$

donde el gráfico es $\{(-5,0),(-2,5)\}$

II. $g:\{1,8,10\}\to\{-3,16,24,30\}$

donde $g(x)=3x$

De ellas, son funciones

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II

19) Si f es una función tal que $f:\{2,5\}\longrightarrow\{a,b,c\}$, cuyo gráfico es {(2,b), (5, a)}, entonces con certeza

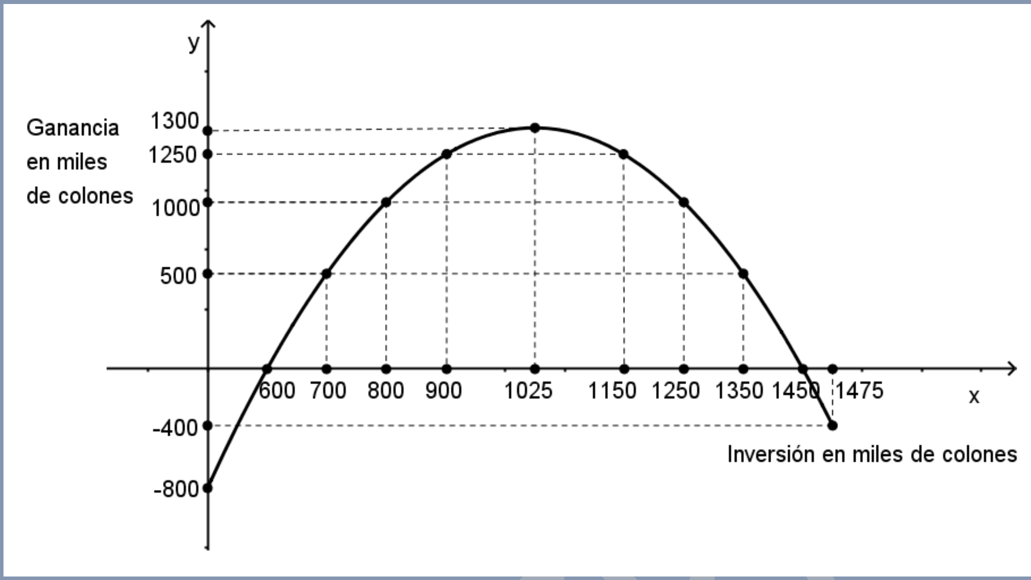
A) f (b) = 2
B) el ámbito es igual al codominio
C) “a” es la preimagen de 2
D) “b” pertenece al âmbito de f

Conocimiento: Gráfica de funciones

Habilidades:
8. Analizar una función a partir de sus representaciones.

Escenario de aprendizaje

Una empresa analiza las ganancias obtenidas, según el dinero invertido. La información fue presentada en la gráfica que sigue.



(a) Cuál fue la inversión que produjo la mayor ganancia?

(b) ¿Cuál fue la inversión que produjo una ganancia de 1 000 000 de colones?

(c) ¿A partir de qué monto de inversión, las ganancias fueron disminuyendo?

(d) ¿Cómo fueron las ganancias al invertir 1 450 000 colones?

(e) ¿Qué comportamiento tuvieron las ganancias al invertir más de ₡1 450 000?

(f) ¿Cuáles fueron los montos de inversión con los que no hubo ganancias ni pérdidas?

(g) ¿En cuáles intervalos solo se reportaron pérdidas?

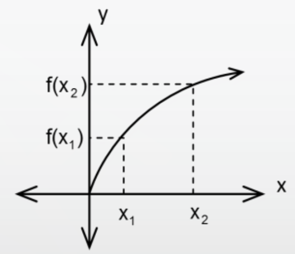
(h) ¿En cuál rango se ubican las ganancias en miles de colones?

Análisis de gráficas de funciones

Para analizar las gráficas es conveniente conoce sobre cuál eje trabajar.

- **Con el eje y** se logra determinar el ámbito de la función (“*de abajo hacia arriba*”)
- **Con el eje x** (“*de izquierda a derecha”*) se logra determinar:

  - **Dominio**
  - **Intervalos donde f es creciente:** Los intervalos donde f es creciente son aquellos subconjuntos del dominio que cumplen que $f(x) \leq f(m)$ cuando $x < m$, para todo “x” y “m” elementos del dominio. Lo simbolizaremos $f \nearrow$
  - **Intervalos donde f es decreciente:** Los intervalos donde f es estrictamente decreciente son aquellos subconjuntos del dominio que cumplen que $f(x) \geq f(m)$ cuando $x < m$, para todo “x” y “m” elementos del dominio. Lo simbolizaremos $f \searrow$



Esta gráfica muestra una función creciente en todo su dominio

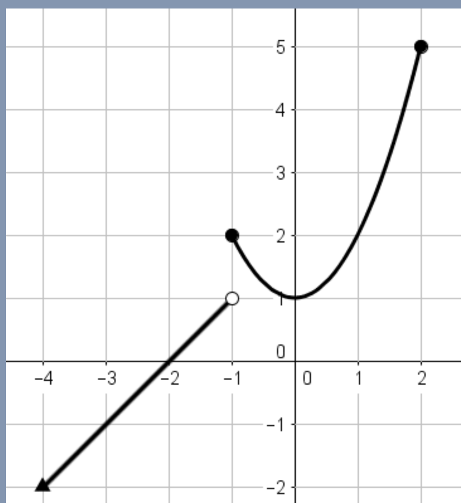
  - **Intervalos donde f es positiva:** Aquellos intervalos donde $f(x) > 0$, para todo “x” que pertenece al dominio.
  - **Intervalos donde f es negativa:** Aquellos intervalos donde $f(x) < 0$, para todo “x” que pertenece al dominio.

Aclaración: Según lo contemplado en el Programa de Estudios del MEP, Costa Rica (2012), no se detallará la diferencia entre un intervalo donde la función es creciente, o estrictamente decreciente. Para facilitar el análisis de los ejercicios, usaremos los corchetes abiertos y contemplaremos los intervalos donde la función es constante de modo separado.

Ejemplos

Considere la gráfica de la función f adjunta, y según la información que se proporciona, determine lo que se solicita.

1)



Ámbito $\left]-\infty,5\right]$

Dominio $\left]-\infty,2\right]$

f creciente $\left]-\infty,-1\right[$ y $\left]0,2\right[$

f decreciente $\left]-1,0\right[$

$f(x)<0$ $\left]-\infty,-2\right[$

$f(x)>0$ $\left]-2,2\right]$

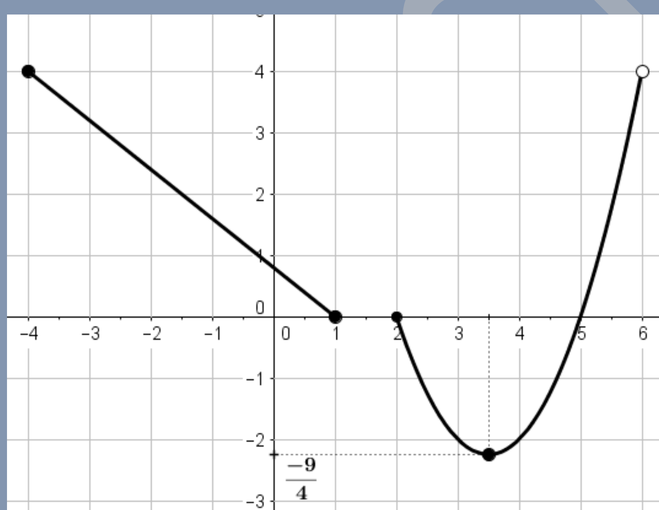
$f(-1)=2$

$f(1)=2$

La preimagen de - 1 es - 3

Valor máximo en x = 2

2)



Ámbito $\left[\frac{-9}{4},4\right]$

Dominio $\left[-4,1\right]\cup\left[2,6\right[$

f creciente $\left]\frac{7}{2},6\right[$

f decreciente $\left]-4,1\right[$ y $\left]2,\frac{7}{2}\right[$

$f(x)<0$ $\left]2,5\right[$

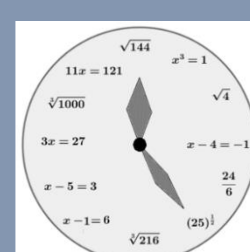
$f(x)>0$ $\left[-4,1\right[$ y $\left]5,6\right[$

$f(0)=1$

1, 2 y 5 son preimágenes de 0

valor mínimo en $x=\frac{7}{2}$

Tiempo para practicar 2.4



1. Grafique los siguientes pares ordenados y trace en el orden que se les presentan una línea para unirlos. (0, 0) - (2, 4) - (4, 0) – (0, 3) – (4, 3) – (0, 0)

2. Construya la gráfica de la función $f:[-2,6]\to IR$ dada por $f(x)=x^2-4x$

3. Construya la gráfica de:

(a) $g:[-2,2]\to[0,2]$ $\quad g(x)=|x|$

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3x+2$

(c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad h(x)=5$

(d) $p:[-2,2]\to\mathbb{R}$ $\quad p(x)=x^3$

4. Construya la gráfica de las siguientes funciones discontinuas.

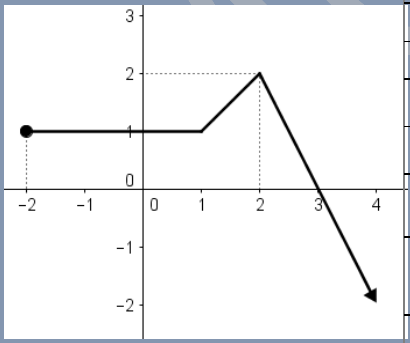
(a) $f:[-3,4]\to\mathbb{R}$

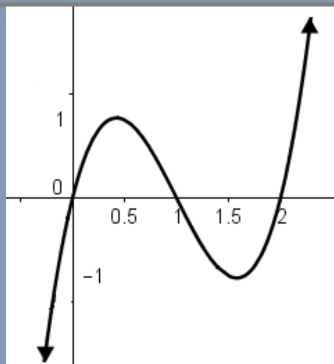
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\le 1 \\ -2x+4 & si \quad x>1 \end{cases}$$

(b) $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$

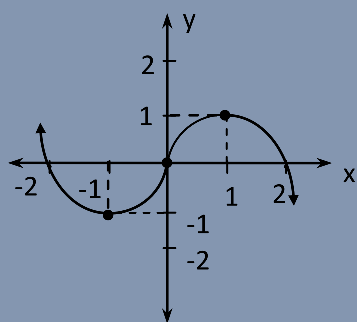
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x\ge 0 \\ x-1 & si \quad x<0 \end{cases}$$

5. A continuación se presentan diversas gráficas correspondientes a funciones f. Conteste lo que se solicita en cada una de ellas.

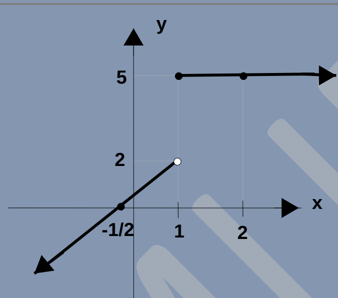
	(a)	
	Dominio	
	Ámbito	
	$f \nearrow$	
	$f \searrow$	
	f constante	
	$f(x)<0$	
	$f(x)>0$	
	Preimagen de 0	
	Imagen de $\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$f(-1)+f(2)$	
	Imagen de 0	



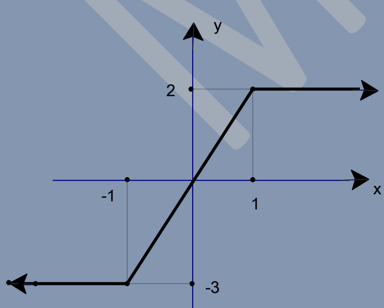
(b)	
Dominio	
Ámbito	
$f \nearrow$	
$f \searrow$	
$f(x) < 0$	
$f(x) > 0$	
Preimagen de 0	
$f(0)$	



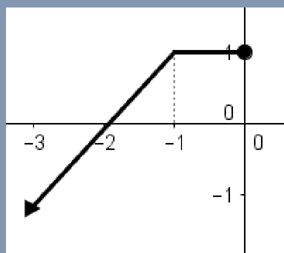
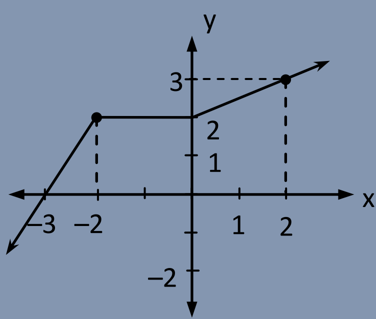
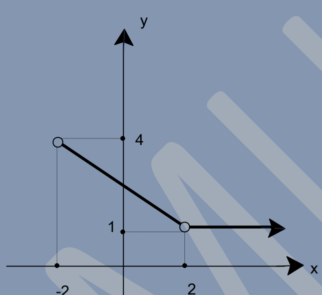
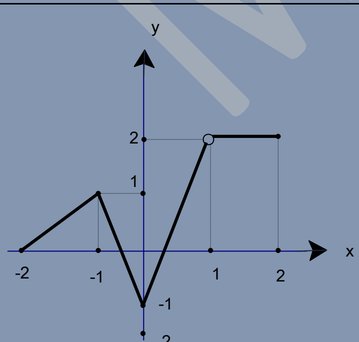
(c)	
Dominio	
Ámbito	
$f \nearrow$	
$f \searrow$	
$f(x) < 0$	
$f(x) > 0$	
Preimagen de 0	
Imagen de 2	
Preimagen de -1	

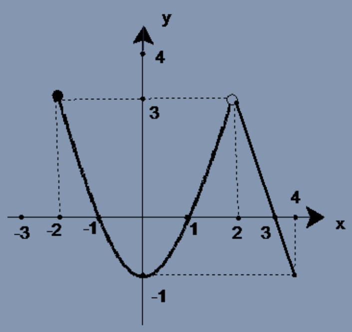
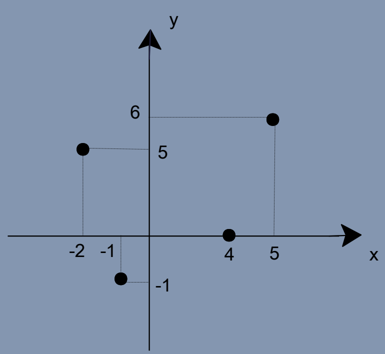
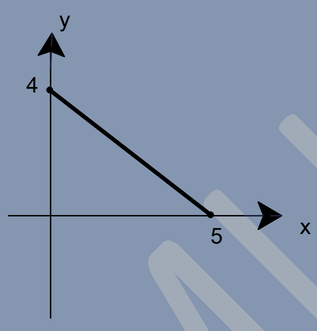


(d)	
Dominio	
Ámbito	
$f \nearrow$	
f constante	
$f(x) < 0$	
$f(x) > 0$	
Preimagen de 0	
Imagen de 1	
$f(2\pi)$	



(e)	
Dominio	
Ámbito	
$f \nearrow$	
f constante	
$f(x) < 0$	
$f(x) > 0$	
Preimagen de 0	
Imagen de $\frac{17}{2}$	
$f(5)-f(-7)$	

<table>
<tr><td rowspan="10">
</td><td>(f)</td><td></td></tr>
<tr><td>Dominio</td><td></td></tr>
<tr><td>Ámbito</td><td></td></tr>
<tr><td>$f \nearrow$</td><td></td></tr>
<tr><td>f constante</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x) < 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x) > 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Preimagen de 0</td><td></td></tr>
<tr><td>Imagen de -1</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(0)$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="12">
</td><td>(g)</td><td></td></tr>
<tr><td>Dominio</td><td></td></tr>
<tr><td>Ámbito</td><td></td></tr>
<tr><td>$f \nearrow$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f \searrow$</td><td></td></tr>
<tr><td>f constante</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x) < 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x) > 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Preimagen de 0</td><td></td></tr>
<tr><td>Imagen de 2</td><td></td></tr>
<tr><td>Imagen de -0,5</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="9">
</td><td>(h)</td><td></td></tr>
<tr><td>Dominio</td><td></td></tr>
<tr><td>Ámbito</td><td></td></tr>
<tr><td>$f \searrow$</td><td></td></tr>
<tr><td>f constante</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x) < 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x) > 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Imagen de 2</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(7)$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="10">
</td><td>(i)</td><td></td></tr>
<tr><td>Dominio</td><td></td></tr>
<tr><td>Ámbito</td><td></td></tr>
<tr><td>$f \nearrow$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f \searrow$</td><td></td></tr>
<tr><td>f constante</td><td></td></tr>
<tr><td>Preimagen de 1</td><td></td></tr>
<tr><td>Imagen de 0</td><td></td></tr>
<tr><td>Tres preimágenes de 2</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(7)$</td><td></td></tr>
</table>

	**(j)**	
	Dominio	
	Ámbito	
	f ↗	
	f ↘	
	$f(x) > 0$	
	Imagen de 1	
	Preimagen de 3	
	$f(4)$	
	**(k)**	
	Dominio	
	Ámbito	
	Imagen de 5	
	**(l)**	
	Dominio	
	Ámbito	
	f ↗	
	f ↘	
	$f(x) < 0$	
	$f(x) > 0$	
	Imagen de 0	
	Preimagen de 0	

Selección Única

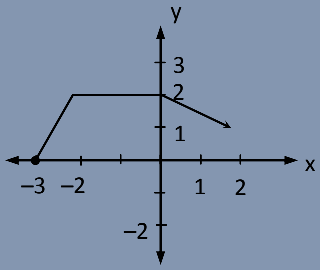
1) De acuerdo con los datos de la gráfica, el ámbito de f corresponde a

A) [-3, 2]

B) [-3, 0]

C) $]-\infty, 2]$

D) $[-3, +\infty[$



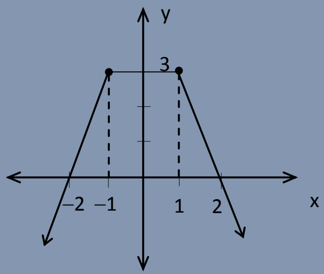
2) De acuerdo con los datos de la gráfica de la función f adjunta, $\forall x \in [-2, 2]$ se cumple que

A) $f(x) = 3$

B) $f(x) \in]0, 3[$

C) $0 \leq f(x) \leq 3$

D) El ámbito de f es $\mathbb{R}$



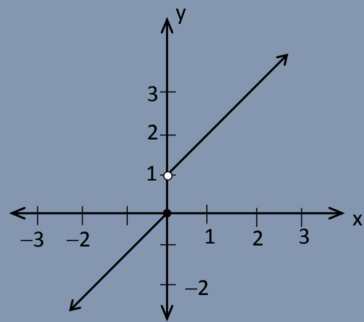
3) De acuerdo con los datos de la gráfica de la función f adjunta, el ámbito de f equivale a

A) IR

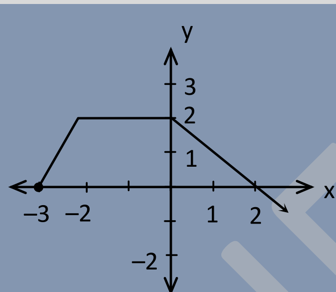
B) IR-$\{1\}$

C) IR-$[0,1[$

D) IR-$]0,1]$



4) De acuerdo con los datos de la gráfica de la función f adjunta, $\forall x \in]-2,2[$ se cumple que



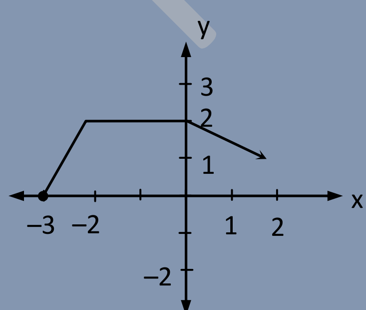
A) $f(x) = 2$

B) $f(x) < 0$

C) $-3 \leq f(x) \leq 2$

D) $0 < f(x) < 2$

5) Considere la gráfica de la función f



De acuerdo con los datos de la gráfica anterior, analice las siguientes proposiciones

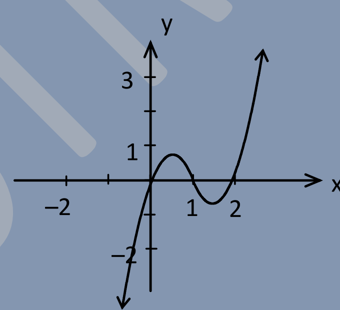
I. Si $x \in]-3,+\infty[$, entonces $f(x) > 0$

II. $f(x) \leq 2$ para todo x en su dominio.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II.

6) Considere la gráfica de la función f



De acuerdo con los datos de la gráfica anterior, analice las siguientes proposiciones

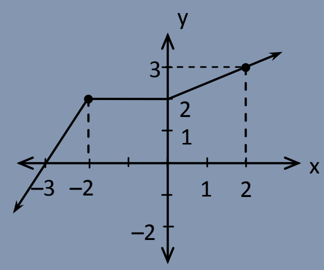
I. Si $x \in]0,5[$, entonces $f(x)$ es positiva.

II. $f(x) < 0$, si $x \in]1,2[$

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II.

7) Considere la gráfica de la función f



De acuerdo con los datos de la gráfica, analice las siguientes proposiciones

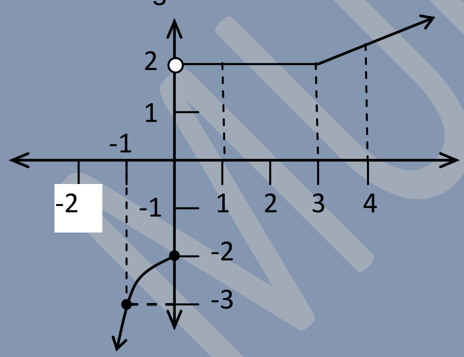
I. f(x) es positiva si $x \in \left]-1,0\right[$.

II. Si $x \in \left]-10,-3\right[$, entonces f(x) es negativa.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II.

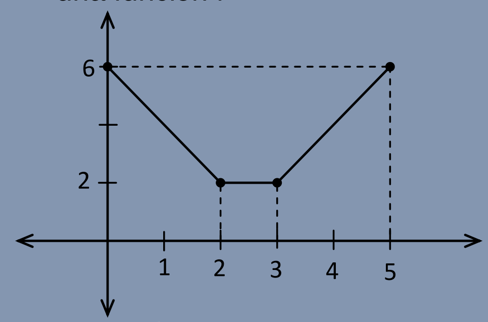
8) Analice la siguiente gráfica de una función g



Según los datos proporcionados un intervalo en que la función g es estrictamente creciente corresponde a

A)]-1, 0 [
B)]-2, 4 [
C)]-1, 3[
D)]1, 4 [

9) La siguiente gráfica corresponde a una función f



De acuerdo con los datos de la gráfica, un intervalo donde la función es estrictamente decreciente corresponde a

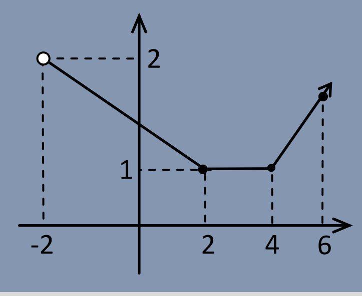
A)]0,5[

B)]2,3[

C)]0,1[

D)]3,5[

10) Considere la gráfica



De acuerdo con los datos de la gráfica, un intervalo donde la función es decreciente corresponde a

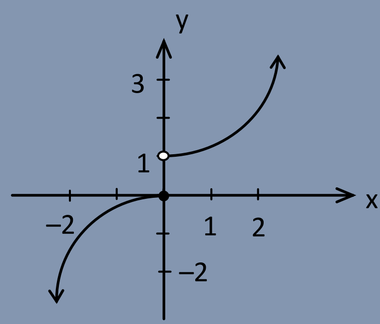
A)]1,6[

B)]2,4[

C)]2,6[

D)]–2,4[

11) Analice la siguiente gráfica de una función.



De acuerdo con los datos de la gráfica, un intervalo donde la función es estrictamente creciente corresponde a

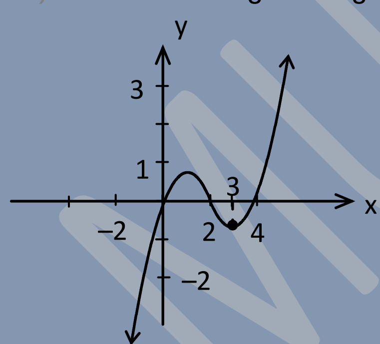
A)]0,2[

B)]-2,2[

C)]-2,1[

D)]–2,3[

12) Considere la siguiente gráfica



Un intervalo donde la función es estrictamente decreciente corresponde a

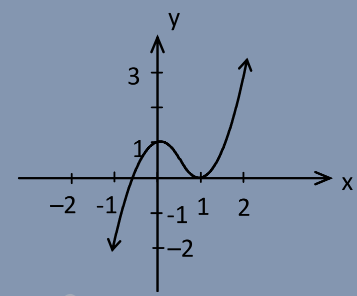
A)]0,3[

B)]2,3[

C)]-2,1[

D)]–2,4[

13) La siguiente gráfica corresponde a una función f



De acuerdo con los datos de la gráfica, un intervalo donde la función es estrictamente creciente corresponde a

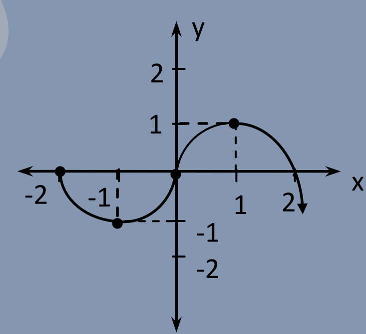
A) $]0,+\infty[$

B) $]-\infty,1[$

C) $]-1,2[$

D) $]-\infty,0[$

14) Analice la gráfica que se presenta seguidamente.



De acuerdo con los proporcionados, considere las siguientes proposiciones:

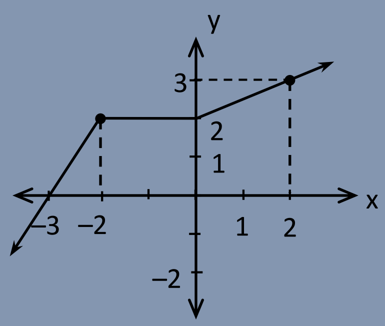
I. Si $x \in]-1,0[$ entonces f(x) es negativa y creciente.

II. Si $x \in]1,2[$, entonces $f(x) \geq 0$ y decreciente.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II.

15) Considere la gráfica de la función f



Con la información de la gráfica, analice las siguientes proposiciones:

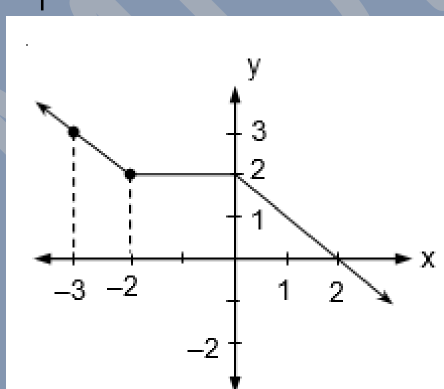
I. Si $x \in]-1,0[$ entonces f(x) es negativa y constante.

II. Si $x \in]0,8[$, entonces f(x) es positiva y creciente.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II.

16) Analice la gráfica de la función f



De acuerdo con los datos administrados considere las siguientes proposiciones:

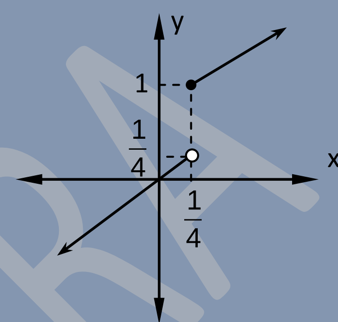
I. Si $x \in]-1,0[$ entonces f(x) es positiva y constante.

II. Si $x \in]2,8[$, entonces f(x) es negativa y creciente.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II.

17). Considere la gráfica de una función $f: IR \rightarrow IR$.



Según la información proporcionada, con certeza se cumple que f es

A) positiva en todo el dominio
B) decreciente.
C) inyectiva.
D) no inyectiva.

Composición funciones

Escenario de aprendizaje

En una fábrica, el costo (inversión) en dólares "C" por producir "x" cantidad de artículos está dada por C(x) = 3x+ 2.

La ganancia "G" en dólares, está relacionada con dicha inversión, mediante el criterio G(C) = $-0{,}5C^2+150C$

Si se confeccionan 95 artículos, ¿cuál sería la ganancia esperada?

Note que en este escenario, están involucradas dos funciones: la de costos y la de ganancias.

Si deseo obtener la ganancia, primero debo calcular el costo:

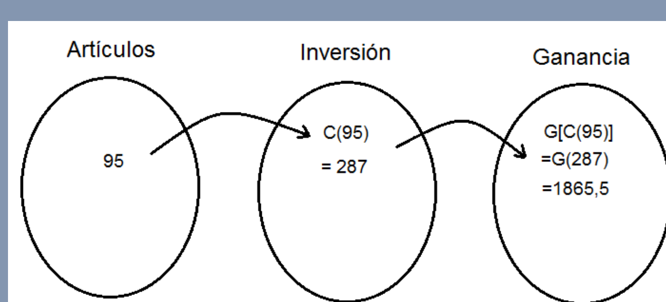
El costo por fabricar 95 artículos es $C(95)=3\bullet 95+2=287$

Ahora bien, la ganancia se obtiene: $G(287)=-0{,}5(287)^2+1500\bullet 287=1865{,}5$

Por tanto, al fabricar 95 artículos, se obtiene una ganancia de $1 865,5

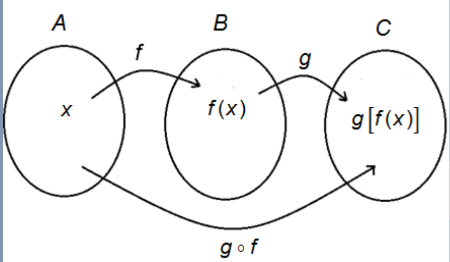
Observe que para obtener el resultado final de $1 865,5, se resolvió dos procesos de cálculo de imágenes, primero con la función C y ese resultado con la función G.

A situaciones como esta, se les llama **composición de funciones**.



Definición

Dadas dos funciones *f* y *g*, $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ se llama composición de las funciones *f* y *g*, a la función $g \circ f: A \rightarrow C$ que satisface $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$



En el escenario anterior, el criterio de la función composición de C y G se define:

$$
\begin{aligned}
(G \circ C)(x) = G[C(x)] = G[3x+2] &= -0{,}5(3x+2)^2 + 150(3x+2) \\
&= -0{,}5(9x^2 + 12x + 4) + 450x + 300 \\
&= -4{,}5x^2 + 444x + 298
\end{aligned}
$$

Así, para calcular la ganancia al fabricar 95 artículos, se puede usar la fórmula que se obtuvo de la composición de C y G:

$$
\begin{aligned}
(G \circ C)(x) &= -4{,}5x^2 + 444x + 298 \\
(G \circ C)(95) &= -4{,}5 \bullet 95^2 + 444 \bullet 95 + 298 = 1\,865{,}5
\end{aligned}
$$

Ejercicio para trabajar en clase.

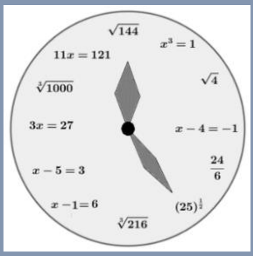
1. Dados los criterios de las funciones f, g y h, determine lo que se le solicita.

$f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = 5 - x^2, \quad h(x) = \sqrt{x+2}$

(a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(g \circ f)(x)$ (c) $(g \circ h)(x)$

(a) $(h \circ f)(5)$ (b) $(g \circ f)(-3)$ (c) $(h \circ f \circ g)(x)$

Tiempo para practicar 2.5



1. Complete el cuadro con lo que se le solicita. Suponga que los criterios corresponden a funciones bien definidas en $\mathbb{R}$. Simplifique al máximo sus respuestas

	f(x)	g(x)	$(f\circ g)(x)$	$(g\circ f)(x)$	$(f\circ g)(-3)$	$(g\circ f)\left(\frac{1}{2}\right)$
a	$f(x)=5-x$	$g(x)=-5x+6$				
b	$f(x)=\sqrt{x}$	$g(x)=x^2+5$				
c	$f(x)=\frac{3}{x}$	$g(x)=\frac{3}{x+2}$				
d	$f(x)=\frac{5-2x}{3}$	$g(x)=\frac{-3x+5}{2}$				
e	$f(x)=4x+x^2$	$g(x)=-3x$				
f	$f(x)=3x+5$	$g(x)=3x+5$				

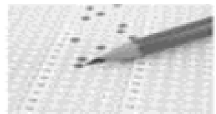
2. Los criterios de las funciones f, g, h son $f(x)=6-2x,\ g(x)=x^2-1,\ h(x)=\frac{x}{2}$ Determine $(f\circ g\circ h)(x),\ (h\circ g\circ f)(x),\ (f\circ h\circ g)(x)$

3. Sea $p(x)=x^2-4x-12,\ d(x)=2+\sqrt{16+x}$. Determine $(p\circ d)(x),\ (d\circ p)(x)$

4. Sea f: $\{1,2,3,4\}\to A$ con $f(x)=5-x^2$ y g: $\{4,1,-4-11\}\to B$ con $g(x)=3-x$

   (a) Determine la función $g\circ f$. Indique el dominio, ámbito y criterio.
   (b) Construya una tabla para las funciones f, g y $g\circ f$

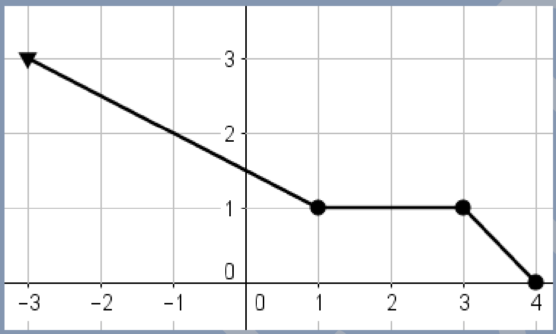
HACIA EL



BACHILLERATO

1) Los gráficos de las funciones h y f están dados por
$G_h = \{(-8,3),(3,5),(-2,5)\}$, $G_f = \{(-2,3),(4,-2),(5,7)\}$
El valor de $(h \circ f)(-2)$ es el siguiente

2) Considere la gráfica de la función h dada por



Y el criterio de la función g: $g(x) = 3x^2 - 1$.

El valor de $(g \circ h)(-1)$ es el siguiente

3) Sean las funciones $f : [-2,6[\to A$, $g : B \to C$, con $f(x) = 3 - 5x$, $g(x) = 2x + 3$, donde se define $g \circ f$.
El dominio de g para que $g \circ f$ esté bien definida, corresponde a

(A) $[-1,15[$

(B) $]-27,13]$

(C) $\left[\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}\right[$

(D) $\left]-\frac{3}{5}, 1\right]$

Conocimiento:
Función Lineal

Habilidades:
10. Representar gráficamente una función lineal.
11. Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.
12. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella

Escenario de aprendizaje

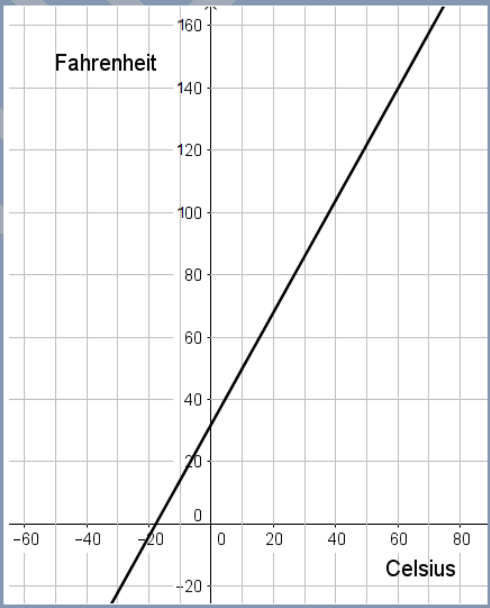
Una cocinera necesita constantemente hacer conversiones entre grados Celsius y Fahrenheit, para medir las temperaturas a la hora de preparar sus recetas.

La fórmula para hacer esa conversión está dada por $F(C) = 1{,}8C + 32$

Construyamos una tabla que resuma algunas de las conversiones.

Grados	-20	-10	0	10	20	30	40	50
Fahrenheit	- 4	14	32	50	68	86	104	122

Si se construye una gráfica con estos valores, podemos apreciar que esta función describe una recta.

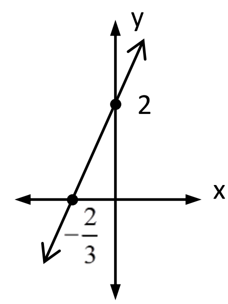
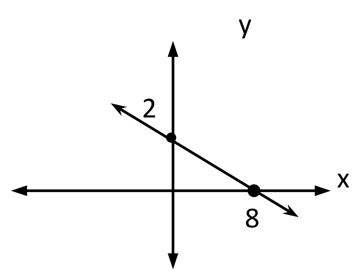
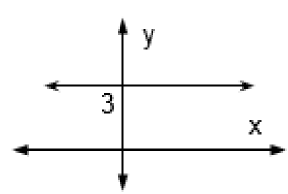


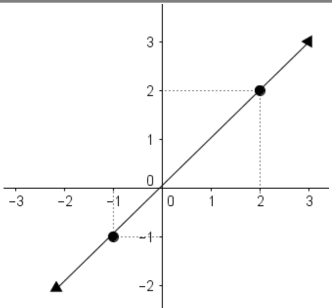
Definición de función lineal

Se llama función lineal a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = mx + b, con m, b $\in$ IR.

- "m" se denomina pendiente
- "b" intersección con el eje y.
- Su gráfica es una línea recta.
- La intersección con el eje y es $(0, b)$ y con el eje x es $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$
- Si m $>$ 0 f es creciente.
- Si m $<$ 0 f es decreciente.
- Si m = 0 f es constante.

Ejemplos:

Criterio de f	m	Intersección con el eje y	Intersección con el eje x	Gráfica
f(x) = 3x + 2	3 f crece	(0, 2)	$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$	
$f(x) = \frac{-x+8}{4}$	$\frac{-1}{4}$ f decrece	(0, 2)	(8, 0)	 f decrece
$f(x) = 3$	0 f constante	(0,3)	No hay	

Criterio de f	m	Intersección con el eje y	Intersección con el eje x	Gráfica
$h(x) = x$ Se llama función identidad	1	(0,0)	(0,0)	

Determinación del criterio de una función lineal

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos que pertenecen a una función lineal f, la pendiente está definida por $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

El valor de b se obtiene al despejarlo en la ecuación y = mx +b, así b = y – mx

Ejemplos:

1. El gráfico de la función f lineal contiene a (1,0) y (3,1). Determine el criterio de f

Cálculo de la pendiente:

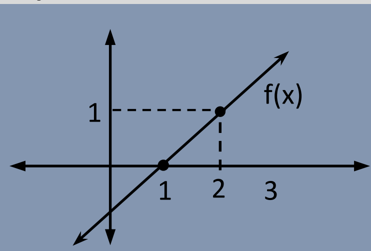
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{3-1} \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Cálculo de b:

$$b = y - mx = 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Se concluye que el criterio de f está dado por $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

2. De acuerdo con la gráfica adjunta, hallar el criterio de la función f.



Del análisis de la gráfica se concluye que el gráfico de la función contiene a (1,0) y (2,1). Por tanto se puede determinar primero la pendiente y luego calcular el valor de b y así obtener el criterio.

Cálculo de la pendiente:

$$\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{2-1} \Rightarrow \mathrm{m} = 1$$

Cálculo de b:

$$\mathrm{b} = y - \mathrm{m}x = 1 - 1 \bullet 2 = -1 \Rightarrow \mathrm{b} = -1$$

El criterio de la función es f(x) = x – 1

Aplicaciones de la función lineal

Las funciones lineales se pueden aplicar en diferentes campos, a continuación se ofrecen algunos ejemplos que ilustran su aplicación.

A) La función f dada por $\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{400}x + 30$, se utiliza para aproximar la temperatura del aire en grados Celsius a “x” metros de altura sobre la superficie de la Tierra. ¿Qué temperatura del aire corresponde a una altitud de 2000 m?

$$f(2000) = -\frac{1}{400} \bullet 2000 + 30 = -\frac{20}{4} + 30 = -5 + 30 = 25$$

$$f(2000) = 25$$

Una altitud de 2000m corresponde a 25º C.

B) El peso esperado en toneladas de un a ballena se expresa como $p(L)=1,7L-42,8$, donde L es la longitud de la ballena en pies. ¿Cuál será el peso de una ballena de 30 pies?

$$p(30)=1,7\bullet 30-42,8=8,2$$
$$p(30)=8,2$$

La ballena tiene un peso aproximado a 8,2 toneladas.

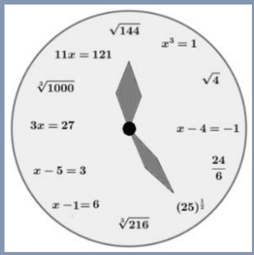
C) Un estudio determinó que para cierta clase de reptil el largo total es una función lineal del largo de la cola. Para una cola de 7 cm la longitud total es de 44 cm y para 10 cm de largo de cola se tiene 65 cm del largo total. ¿Cuál es el largo de un reptil de esa clase cuya cola mide 16 cm?

(7, 44) , (10 , 65)

$$m=\frac{65-44}{10-7}=\frac{21}{3}=7$$
$$b=44-7\bullet 7=44-49=-5\Rightarrow f(x)=7x-5\Rightarrow f(16)=7\bullet 16-5=107$$

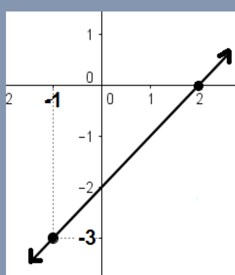
El largo del reptil es 107 cm.

Tiempo para practicar 2.6



1. Complete el siguiente cuadro con la información que se le solicita.

Datos de la función lineal	Valor de la pendiente	Valor de b	Punto de Intersección con el eje y	Punto de Intersección con el eje x	Monotonía
$f(x)=15-7x$					
$y=\frac{18x-10}{10}$					
$f(x)=\sqrt{2}$					
Tiene por ecuación $9y-5x=4$					

Datos de la función lineal	Valor de la pendiente	Valor de b	Punto de Intersección con el eje y	Punto de Intersección con el eje x	Monotonía
Tiene por ecuación $-4y+3x-5=0$					
Su gráfica pasa por los puntos (-3,1) y por (7, -9)					
Su gráfica es: 					

2. Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen y por $\left(\frac{1}{2},3\right)$

3. Halle el criterio de una función lineal f tal que f(-5) = 2 y f(3) = 9

4. Halle el punto de intersección con el eje x de la recta que pasa por los puntos (-2, -1) y (3, 7)

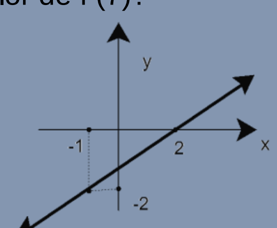
5. Halle el criterio de una función lineal f cuyos pares (-2, -5) y (0,9) pertenecen al gráfico de f.

6. Halle la ecuación de la recta cuya pendiente es $\frac{-5}{3}$ e interseca al eje x en 3

7. ¿Para qué valores de k se cumple que $f(x)=(2k+5)x-3$ es creciente?

8. ¿Para qué valores de k se cumple que f(x) = (6 -3k)x – 2x +3 es constante?

9. De acuerdo con la gráfica de una función f, ¿cuál es el valor de f (7)?



10. En una fábrica de pantalones, por día hay un gasto de 200 000 colones que incluye el alquiler del local, la electricidad y la planilla. Además por cada pantalón que se fabrique se gasta 1000 colones; entonces ¿cuál es el gasto en colones en un día por la confección de 200 pantalones?

11. Para la función f dada por $f(x)=\dfrac{d-3x}{2}$, si 2 es la imagen de -3, entonces ¿cuál es la preimagen de -1?

12. La pendiente de una función lineal f es 4. Si (5, -2) pertenece al gráfico de la función, determine la imagen de 7

13. Sea f una función lineal dada por f(x) = mx + b. Si m = b y (5, -4) pertenece al gráfico de f, entonces determine el punto de intersección con el eje x de la gráfica f.

14. Para la función f dada por f(x) = mx – 6 y f(-3) = 4, determine la monotonía de f

15. Si (2, -5) y (7,k) pertenecen a la recta t y la pendiente de esa recta es $\dfrac{1}{3}$, determine el valor de “k”.

16. Sea los pares (9, 1) (6, -2) (-3, 5k) que pertenecen al gráfico de una función lineal f, halle el valor de k

17. Si la recta definida por $y=\dfrac{(2k+8)x+6}{k-3}$ tiene pendiente igual a $\dfrac{2}{3}$, determine el valor de k

18. El costo en euros “C” de producir “x” unidades de un producto mensualmente está dado por C(x) = 3x + 900. Determine:

(a) ¿Cuál es el costo de producción si se ha producido 170 unidades?
(b) En el mes de setiembre el costo de producción fue de 1560 euros, mientras que en octubre fue de 1593 euros ¿Cuántas unidades más se produjeron en octubre en comparación a setiembre?

19. Una compañía que fabrica computadoras portátiles estima que la ganancia al vender una computadora al momento de su lanzamiento al mercado es de 70 000 colones y tres años después es de la mitad de la ganancia inicial. Si la ganancia G tiene una relación lineal con la cantidad “t” de años después del lanzamiento de las computadoras la mercado, determine:
(a) El criterio de la función lineal que modela esta situación.
(b) La ganancia que se obtiene por vender una computadora portátil al cabo de 5 años después de lanzada por primera vez al mercado.

20. El costo “C” en colones por producir mensualmente “x” unidades de un producto está dado por C (x) = 48x + 25 000. Si en julio la cantidad de unidades producidas se reduce en 38 unidades, entonces ¿en cuánto se reduce el costo?

21. Una tienda que ofrece camisas establece una promoción, vende 2 camisas por 6000 colones y 5 por 12 000. Si la relación es modelada de forma lineal. Determine:
(a) El criterio de la función lineal que modela esta situación.
(b) El precio al que se venden 10 camisas
(c) ¿Cuántas camisas compró un cliente que pagó 32 000 colones?

22. El costo en euros “C” de producir “x” unidades de un producto mensualmente está dado por C(x) = 3x + 900. Determine:

(a) ¿Cuál es el costo de producción si se ha producido 115 unidades?
(b) En el mes de setiembre el costo de producción fue de 1560 euros, mientras que en octubre fue de 1593 euros ¿Cuántas unidades más se produjeron en octubre en comparación a setiembre?

23. El valor inicial de un terreno es de ₡25 000 000 y su valor “V” aumenta cada año en ₡500 000. Según la información anterior, conteste:
(a) Si “x” representa la cantidad de años que trascurren, exprese mediante una función lineal el valor del terreno.
(b) ¿Cuál es la variable dependiente?
(c) Si han pasado 6 años, ¿cuál es el valor del terreno?
(d) ¿Cuál es la variable independiente?

24. En un colegio se desea contratar un servicio de fotocopiado. Tres compañías cotizan para tal fin:

Compañía A: cobra ₡75 000 por semana y ₡2000 por hora
Compañía B: cobra únicamente ₡5000 por hora
Compañía C: cobra ₡40 000 por semana y ₡3000 por hora

(a) Escriba una función lineal para cada cotización, donde “x” represente las horas de uso de la fotocopiadora
(b) Si se espera un uso de 14 horas por semana, ¿cuál será la opción más económica?
(c) Si se espera un uso de 33 horas por semana, ¿cuál será la opción más económica?
(d) A cuántas horas de uso de la fotocopiadora, el costo de la compañía A será igual al de la compañía B
(e) A cuántas horas de uso de la fotocopiadora, el costo de la compañía A será menor que el de las otras dos. [sugerencia: usar Excel para hacer una tabla con los valores respectivos]

25. En una compañía se rentan automóviles a ₡20 000 el día. Además, se suma a ese costo una tarifa de ₡500 por cada kilómetro recorrido.

(a) Represente este caso mediante una función lineal
(b) ¿Cuál es el costo en un recorrido de 50km en un día?
(c) Si se paga un total de ₡57 500, ¿cuántos kilómetros se recorrieron?

26. Estela desea aprender inglés, por lo que va a una academia y le indican que el precio por la matrícula es de ₡25 650 y la mensualidad de ₡15 300.

(a) Modele esta situación mediante una función lineal
(b) Luego de pagar ₡377 550, Estela logró aprender inglés. ¿cuántos meses estudió en la academia?

27. El cobro "C" en dólares, que realiza un fontanero para cambiar la tubería, está dado por $C(m) = 2m + 5$, donde "m" es el número de metros de tubería.

(a) Complete la tabla

m	1	2	3	4	5	6
C						

(b) Construya la gráfica que representa la situación anterior.

28. La dosis "D" en miligramos, de un medicamento para un tipo de perro, está relacionada con la masa corporal "m" del mismo, dada en kilogramos, mediante la fórmula $D(m) = 2 + 3m$

(a) Complete la tabla

m	2	4	6	8
D				

(b) Construya la gráfica que representa la situación anterior.

29. Un jugador de fútbol de una liga menor percibe un ingreso de 625 dólares por partido jugado y por cada gol anotado a favor de su equipo se le acredita una bonificación de 100 dólares

(a) Modele esta situación mediante una función lineal.
(b) Construya una tabla en la que aparezca de cero a cinco goles.

30. El salario fijo mensual de un oficinista es de ₡425 000, más ₡15 000 por cada hora extra.

(a) Modele esta situación mediante una función lineal.
(b) Construya una tabla en la que aparezca de cero a 8 horas extra

Conocimiento:
Función Cuadrática

Habilidades:

13. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$
14. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.

Escenario de aprendizaje

En una compañía, las utilidades mensuales obtenidas al invertir “x” colones al mes en publicidad están dadas por la función $U(x) = -0{,}15x^2 + 670x - 35\,000$

El encargado de la publicidad desea invertir 2200 dólares, pero su compañero le cuestiona el porqué no invierte más, para así obtener mejores ganancias, le sugiere invertir el doble, pues según su razonamiento obtendrá el doble de utilidades. ¿Cuál será la mejor estrategia?

Si calculamos las utilidades al invertir 2200, tendremos:

$$-0{,}15 \bullet (2200)^2 + 670 \bullet (2200) - 35000 = 713000$$

¡La utilidad es de 713 000 dólares!

Sin embargo, si se invierte 4400 dólares, se obtendrá una utilidad de 9 000 dólares

Por tanto la estrategia del administrador resulta mucho más beneficiosa para la compañía. Incluso esa inversión se acerca mucho a la que maximizaría las utilidades.

En este caso estamos frente a una función que denominaremos **función cuadrática,** cuyas gráficas estudiamos en noveno nivel.

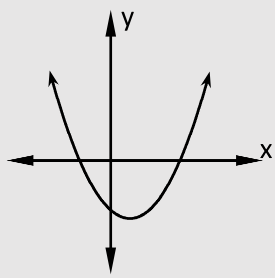
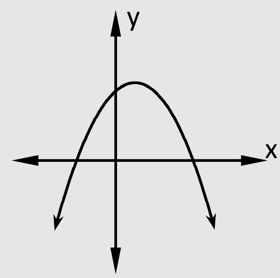
Definición de función cuadrática

Una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; a, b y c en IR, $b \neq 0$, se llama función cuadrática o función polinomial de segundo grado. Su gráfica es una parábola con eje de simetría en $x = -\frac{b}{a}$. La gráfica de la función cuadrática siempre tiene un punto de intersección con el eje “y” en (0,c). En el caso del eje “x” puede tener uno, dos o ningún punto de intersección, esto lo determina el criterio del discriminante, que más adelante se estudia.

Análisis de la función cuadrática

Concavidad

El signo del parámetro "a" determina la concavidad de la gráfica de una función cuadrática, a continuación se presentan ambos casos.

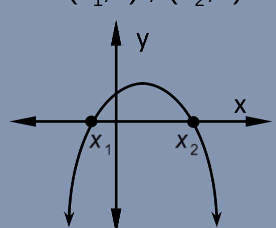
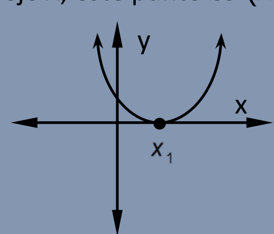
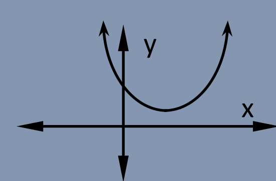
Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba.	**Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo.**
 Hay punto mínimo	 Hay punto máximo

Intersección con el eje "x"

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b y c en IR, se denomina discriminante al valor

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Este valor nos dará información de cuántos puntos de la gráfica de f intersecan al eje "x"

Si $\Delta > 0$ la gráfica tiene dos puntos de intersección con el eje X, los cuales son: $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ 	Si $\Delta = 0$ la gráfica tiene un punto de intersección con el eje X, este punto es $(x, 0)$ 	Si $\Delta = 0$ la gráfica no interseca al eje X 

Para determinar los puntos de intersección con el eje “x” se resuelve la ecuación

$$ax^2+bx+c=0$$

Vértice

El vértice de la parábola corresponde al punto:

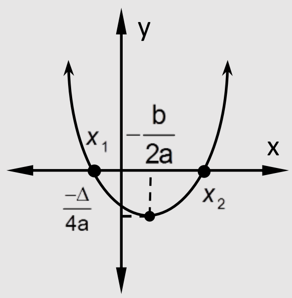
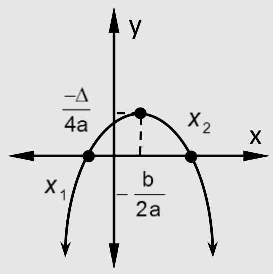
$$\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Este par ordenado representa el punto máximo o mínimo de la parábola, dependiendo de la concavidad de la misma.

Eje de simetría

Está dado por $x=\dfrac{-b}{2a}$

A continuación se presenta un cuadro que resume el ámbito y los intervalos donde f crece y donde f decrece.

Condición	Gráfica	Ámbito	decrece	crece
$a>0,\ \Delta>0$		$\left[\frac{-\Delta}{4a},+\infty\right[$	$\left]-\infty,\frac{-b}{2a}\right[$	$\left]\frac{-b}{2a},+\infty\right[$
$a<0,\ \Delta>0$		$\left]-\infty,\frac{-\Delta}{4a}\right]$	$\left]\frac{-b}{2a},+\infty\right[$	$\left]-\infty,\frac{-b}{2a}\right[$

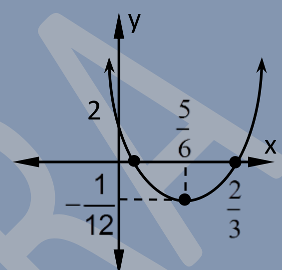
Ejemplos: Dado el criterio de la función cuadrática determine los puntos de intersección con los ejes, el vértice y grafique

1. $f(x)=3x^2-5x+2$.

- $\Delta=(-5)^2-4\bullet3\bullet2=25-24=1 \Rightarrow \Delta>0$

- $3x^2-5x+2=0$
  $(x-1)(3x-2)=0$
  $\Rightarrow x_1=1, \qquad x_2=\dfrac{2}{3}$

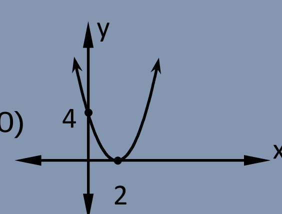
- Cálculo del vértice:
  $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{5}{6}$; $\dfrac{-\Delta}{4a}=\dfrac{-1}{12}$ Vértice $\left(\dfrac{5}{6},\dfrac{-1}{12}\right)$



- Eje de simetría $x=\dfrac{5}{6}$
- Intersección eje Y: (0, c) = (0, 2)

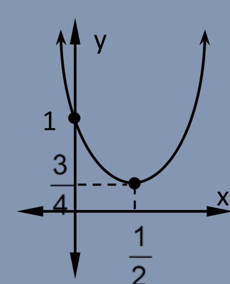
2. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

- $\Delta=(-4)^2-4\bullet1\bullet4=16-16=0 \Rightarrow \Delta=0$
- $x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2 \Rightarrow x_1=x_2=2$
- Cálculo del vértice: $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{4}{2}=2$; $\dfrac{-\Delta}{4a}=\dfrac{0}{4}=0$ Vértice $(2,0)$
- Intersección eje Y: (0, c) = (0, 4)



3. $f(x) = x^2 - x + 1$

- $\Delta=(-1)^2-4\bullet1\bullet1=1-4=-3 \Rightarrow \Delta<0$
- Cálculo del vértice: $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{-\Delta}{4a}=\dfrac{3}{4}$ Vértice $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$
- Intersección eje Y: (0, c) = (0, 1)



Aplicaciones de la función cuadrática

(a) Se lanza una pelota desde el suelo hacia arriba. La altura "h" en metros, que alcanza esa pelota en función del tiempo ""t" medido en segundos, está dada por $h(t) = -t^2 + 10t$. Determine la altura máxima de la pelota y en el tiempo que se alcanza.

Los puntos máximos o mínimos se determinan calculando el vértice:

$$\Delta = 10^2 - 4 \bullet -1 \bullet 0 = 100$$

$$V = \left(\frac{-10}{2 \bullet -1}, \frac{-100}{4 \bullet -1} \right) = (5,25)$$

Como el vértice es (5,25), entonces la altura máxima alcanzada es de 25 metros, lo cual ocurre a los 5 segundos de haberse lanzado el balón.

(b) El dueño de un automóvil determina que el costo en colones por kilómetro, al conducir su vehículo a una velocidad de v km/h, está dado por $C(v) = 0{,}015v^2 - 2{,}5v + 120$. Determine la velocidad en la cual el automóvil consume el costo mínimo.

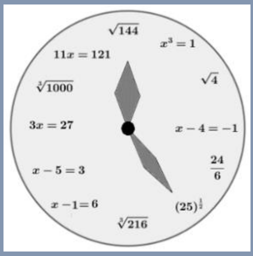
$$\Delta = (-2{,}5)^2 - 4 \bullet 0{,}015 \bullet 120 = -0{,}95 \qquad C(x) = 0{,}015v^2 - 2{,}5v + 120$$

$$V = \left(\frac{2{,}5}{2 \bullet 0{,}015}, \frac{0{,}95}{4 \bullet 0{,}015} \right) = \left(\frac{250}{3}, \frac{95}{6} \right)$$

Como la parábola es cóncava hacia arriba, el vértice $\left(\frac{250}{3}, \frac{95}{6} \right)$ corresponde al punto mínimo. Por tanto, la velocidad con la que se consume menos combustible es de $\frac{250}{3}$ km/h, un aproximado de 83,3 km/h.

Diversas estructuras tienen forma parabólica, que corresponde a una función cuadrática.

Tiempo para practicar 2.7



1. Analice las siguientes funciones cuadráticas de IR a IR y grafíquelas.
   (a) $f(x) = 4 - x^2$
   (b) $f(x) = (x+2)^2$
   (c) $f(x) = 8x - x^2$
   (d) $f(x) = x^2 + 5$
   (e) $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

2. Determine un intervalo donde f(x) = $(x+3)^2$ sea decreciente.

3. Si la gráfica de la función f(x) = $(2k - 3)x^2 - 5x$ es cóncava hacia abajo, entonces determine el intervalo al que pertenece k

4. ¿Cuál es el ámbito de la función f(x) = $\dfrac{3 - x^2}{2}$?

5. ¿Para cuál intervalo la función f(x) = $-x^2 + 7x - 10$ es positiva?

6. Si el vértice de una función cuadrática f cuya gráfica es cóncava hacia abajo es (-9, 8) entonces determine su ámbito y un intervalo donde f es creciente.

7. "Una piedra es lanzada desde un punto del suelo hacia arriba describiendo una trayectoria parabólica en donde la altura h , está en función del tiempo "t", modelada por la función $h(t) = \dfrac{-3}{10}t^2 + 7{,}5t$ " ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra, y cuánto dura la piedra para tocar el suelo de nuevo, respectivamente? Determine además el dominio de la función.

8. El administrador de una fábrica que su ganancia en miles de colones semanales como función del número de x productos vendidos, está dada por la función $G(x) = -0{,}02x^2 + 16x - 1300$ ¿Cuántos artículos debe vender semanalmente para obtener la máxima ganancia y cuál es esa ganancia?

9. La ganancia G en colones por vender una artesanía está dada por $G(x) = 7250x - 5x^2$, donde "x" es el precio en colones de cada artesanía. Si no se obtienen ganancias, entonces ¿cuál fue el precio fijado de esa artesanía?

10. El fabricante de un producto sabe que el ingreso en miles de colones I en términos del precio de venta "x" está dado por $I(x) = \dfrac{-x^2}{3} + 320x$ ¿Cuál es el ingreso máximo que puede obtener el fabricante?

11. La función ingreso se obtiene al multiplicar la cantidad de unidades “x” de producto vendido por su precio de venta P. Si el precio de venta está dado por $P(x)=\frac{-x}{3}+900$, determine el ingreso máximo.

12. Para la función f dada por f(x) = ax^2 – 6x – 5. Si x = –2 es el eje de simetría de la gráfica de f, entonces determine el ámbito de f.

13. Para la función f dada por f(x) = ax^2 + bx + 4, donde su gráfica interseca al eje x en el único punto (-2,0), determine el ámbito de f.

Selección única

1. Sea f una función cuadrática dada por $f(x)=ax^2+bx+c$. Si $f(0)=-1$ y el vértice de la gráfica de f es (1,0), entonces con certeza se cumple que

A) $b<0, \Delta=0$
B) $b<0, \Delta<0$
C) $b=1, \Delta>0$
D) $b>1, \Delta=0$

2. Sea *f* una función cuadrática dada por $f(x)=ax^2+bx+c$. Si $f(0)=-2$, el punto (1, 0) pertenece al gráfico de *f* y $a-b=4$, entonces con certeza se cumple que

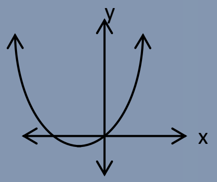
A) $b=-1, c>0$
B) $b=1, c>0$
C) $a>1, c>0$
D) $a>1, c<0$

3. Sea f una función dada por $f(x)=ax^2+bx+c$ Si $f(0)=f(1)=2$ y el vértice de la gráfica de f es $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$ entonces con certeza se cumple que

A) $b=-1, \Delta>0$
B) $b=-1, \Delta<0$
C) $b=1, \Delta>0$
D) $b=1, \Delta<0$

4. La gráfica adjunta corresponde a una función cuadrática dada por $f(x)=ax^2+bx+c$ Entonces con certeza se cumple que

A) $b<0, \Delta>0$
B) $b<0, \Delta<0$
C) $a<0, \Delta>0$
D) $a>0, \Delta<0$



5. Sea $f:[-2,+\infty[\to IR$, con $f(x)=3x^2-12x+9$. ¿Cuál es el ámbito de *f* ?

A) $[-3,45]$
B) $[-3,+\infty[$
C) $[-2,+\infty[$
D) $[45,+\infty[$

6. Sea *f* una función dada por $f(x)=4x^2-4x+k,k\in IR$, donde f corta al eje x en dos puntos distintos. Entonces con certeza se cumple que

A) $k<1,\Delta<0$
B) $k>1,\Delta<0$
C) $k<1,\Delta>0$
D) $k>1,\Delta>0$

7. Sea *f* una función dada por $f(x)=kx^2-4x+1,k\in IR,k\neq 0$, donde f corta al eje x en un solo punto. Entonces con certeza se cumple que

A) $k=-4,\Delta=0$
B) $k=-4,\Delta>0$
C) $k=4,\Delta>0$
D) $k=4,\Delta=0$

8. Sea *f* una función dada por $f(x)=kx^2-8x+k,k\in IR,\ k<0$, donde f corta al eje x en un solo punto. Entonces con certeza se cumple que

A) $k=-4,\Delta=0$
B) $k=-4,\Delta>0$
C) $k=4,\Delta>0$
D) $k=4,\Delta=0$

9. La función *f* dada por $f(x)=3x^2-12x+9$ es estrictamente creciente en

A) $]1,+\infty[$
B) $]2,+\infty[$
C) $]-\infty,1[$
D) $]-\infty,2[$

10. Considere las proposiciones que se refieren a la función f dada por $f(x)=-3x^2-12x-12$

I. Si $k\in]-\infty,-2]$, k es un elemento del ámbito de *f.*

II. $(0,-2)$ es un elemento del gráfico de *f*.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.
B) Ninguna.
C) Solo la I.
D) Solo la II.

Conocimiento: Sistemas de Ecuaciones

Habilidades:
16. Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
17. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizado sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Escenario de aprendizaje

Analicemos el siguiente reto matemático:

La cabeza de un pez mide 10 cm, la cola es tan larga como la cabeza más la mitad de su tronco, el tronco es tan largo como la cabeza y la cola juntas. ¿Cuánto mide el pez?

Aunque podemos llegar a la respuesta mediante tanteos, también podemos formular ecuaciones que nos faciliten los cálculos.

Usemos la siguiente simbología.

T = longitud del tronco del pez

C = longitud de la cola del pez

La longitud de la cabeza es de 10 cm

$T = 10 + C \quad (1)$

$C = 10 + \frac{T}{2} \quad (2)$

De modo que $C = 10 + \frac{10 + C}{2}$ Al reemplazar $T = 10 + C$ *en* (2)

$$C - \frac{C}{2} = 10 + 5$$

$$\frac{1}{2}C = 15$$

$$C = 30$$

Así llegamos a la conclusión de que cabeza mide 10cm, el tronco 40cm y la cola 30cm. De modo que el pez mide 80cm.

Nótese que en este ejemplo, los valores de T y C deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones (1) y (2). Esto es lo que se define seguidamente:

Cuando dos ecuaciones lineales de la forma ax + by =c , se satisfacen en forma simultánea para iguales, se denomina sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas o simplemente sistema de ecuaciones de dos por dos (2x2) .

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Este tipo de sistemas pueden tener una única solución, infinitas soluciones, o no tener solución. Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones de 2x2.

Método suma y resta

El método de suma y resta consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por un número apropiado de tal forma que al sumar ambas ecuaciones se elimine una de las incógnitas. Se resuelve la ecuación resultante y se sustituye el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplos:

A) Resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 3 \\ \dfrac{x-1}{2} = y \end{cases}$

Se acomoda el sistema de manera que quede de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Así:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 3 \\ \dfrac{x-1}{2} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ x - 1 = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Luego se multiplica la primera ecuación por -1:

$\begin{cases} -x + y = -6 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{cases} -x + y = -6 \\ \underline{x - 2y = 1} \Rightarrow y = 5 \\ -y = -5 \end{cases}$$

Sustituyendo $y = 5$ en la primera ecuación se obtiene:
$x-5=6 \Rightarrow x=5+6=11 \Rightarrow x=11$

El conjunto solución corresponde a $\text{C.S.}=\{(11,5)\}$

Método de sustitución

Analicemos el siguiente problema.

Bonifacio, con la ayuda de un grupo de estudiantes, recogió dinero para comprar útiles escolares y así enviarlos a una comunidad necesitada. Lograron comprar cuadernos y lapiceros. En total compraron 79 útiles escolares y gastaron 32 545 colones. Si cada cuaderno costó 1255 colones y los lapiceros 145 colones ¿Cuántos cuadernos y lapiceros logró comprar Bonifacio***?***

Plantearemos el problema en un lenguaje matemático, con el fin de construir dos ecuaciones lineales.

Las ecuaciones quedan planteadas así: $\begin{cases} x+y=79 & (1) \\ 1255x+145y=32545 & (2) \end{cases}$

Se debe hallar los valores que satisfagan ambas ecuaciones simultáneamente.

Una forma de proceder es despejar alguna incógnita de la primera ecuación, por ejemplo: x = 79 – y (*) , para luego reemplazarla en la segunda:

$$1255(79-y)+145y=32545$$

Al resolver la ecuación se obtiene y = 60.

Por último se reemplaza este valor en la ecuación (*) y se obtiene x = 19.

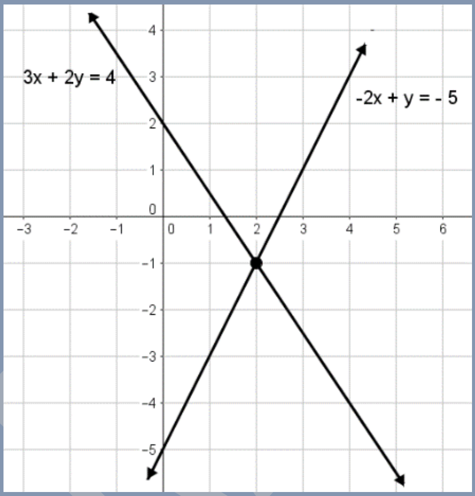
Así se logra determinar que Bonifacio compró 19 cuadernos y 60 lapiceros

Método de igualación

Dadas las ecuaciones de las rectas 3x + 2y = 4, 5 + y = 2x; determine el punto donde se intersecan sus gráficas.

Tal como se estudió en geometría analítica, para determinar la intersección de dos gráficas, es necesario buscar aquellos valores que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones. Esto se puede determinar mediante el método de igualación, tal como se explica seguidamente:

Primero se despeja la misma variable en cada ecuación:



$$3x+2y=4 \Rightarrow y=\frac{4-3x}{2},$$
$$-2x+y=-5 \Rightarrow y=2x-5$$

Se igualan los miembros derechos de cada ecuación (debido a la transitividad de las igualdades)

$$\frac{4-3x}{2}=2x-5$$
$$\Rightarrow \frac{-3x}{2}-2x=-5-\frac{4}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{-7}{2}x=-7$$
$$\Rightarrow x=2$$

Luego se reemplaza ese valor en cualquiera de las ecuaciones anteriores:

$$y=2x-5$$
$$\Rightarrow\ y=2\bullet 2-5=-1$$

Se concluye que el punto de intersección de las rectas es (2,-1)

Interpretación gráfica.

Considere en cada caso las rectas dadas, y determine la intersección de sus gráficas.

A) $\begin{cases}-x+y=-6\\ x-2y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=x-6\\ y=\dfrac{x-1}{2}\end{cases} \Rightarrow\ x-6=\dfrac{x-1}{2} \Rightarrow 11\ \Rightarrow y=11-6=5$

Las gráficas se intersecan en el punto (11,5). Hay una única solución

Se dice que este **sistema es independiente.**

Si el sistema es de la forma $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$ entonces será independiente cuando $m_1 \neq m_2$

B) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 4x + 12y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6-x}{3} \\ y = \dfrac{5-4x}{12} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{6-x}{3} = \dfrac{5-4x}{12} \Rightarrow 0x = \dfrac{-19}{12}$ ¡!

Note que no hay valores que satisfagan simultáneamente las dos ecuaciones, por tanto la solución es vacía. Gráficamente significa que las rectas son paralelas.

Se dice que este **sistema es incompatible.**

Si el sistema es de la forma $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$ entonces será incompatible cuando $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$

C) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x-3}{2} \\ y = \dfrac{2x-6}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2x-6}{4} \Rightarrow 0x = 0$

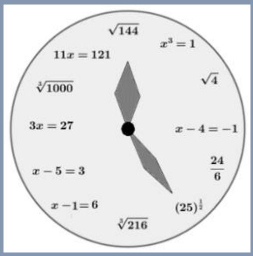
Cualquier valor real satisface la ecuación. Por tanto hay infinitas soluciones.

Gráficamente significa que ambas ecuaciones representan la misma recta.

A este sistema se le llama **sistema dependiente.**

Si el sistema es de la forma $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$ entonces será dependiente cuando $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$

Tiempo para practicar 2.8



1. Determine el conjunto solución de cada sistema de ecuaciones

a) $\begin{cases} 2x+5y=12 \\ x+y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x=3y-2 \\ 2+y=3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{3}=-1 \\ \dfrac{2y-2x}{5}=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(3x-2)=y \\ x-6=-3(y+4) \end{cases}$ e) $\begin{cases} a-4=\dfrac{b}{3} \\ b=\dfrac{5a}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} m=\dfrac{n-3}{2} \\ 2n-(m+3)=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-3y=5 \\ 2x+6=6y \end{cases}$ h) $\begin{cases} -2x=4y-2 \\ 6-12y=6x \end{cases}$ i) $\begin{cases} \dfrac{-5y}{2}=\dfrac{-1}{4} \\ \dfrac{y-x}{2}=2 \end{cases}$

2. Resuelva cada problema mediante sistemas de ecuaciones.

(a) La diferencia de dos números es 44. Si el doble del número mayor aumentado en el triple del menor es igual a 208, entonces ¿cuál es el número menor?

(b) Gregoriana tiene 24 monedas cuyas denominaciones son de 5 y 25 colones. Si en total tiene 300 colones. ¿Cuántas monedas de 25 colones tiene?

(c) Si en una fracción al doble del numerador se le disminuye en uno, al denominador se le aumenta en uno, el resultado es uno. Si al numerador se le aumenta en dos y al triple del denominador se le disminuye en dos, el resultado es un medio. ¿Cuál es esa fracción?

(d) En una granja hay gallinas y cabras. Si se cuentan las cabezas, son 50, si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

(e) Un lechero ha envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

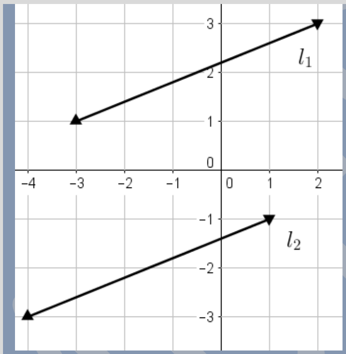
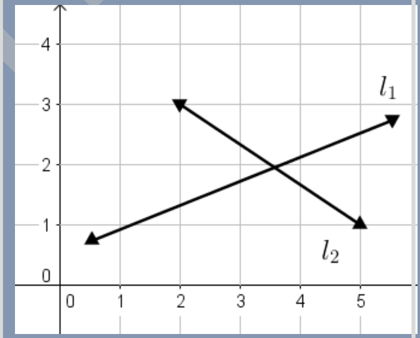
(f) El día del estreno de una película se vendieron 600 entradas y se recaudaron 812 500 colones. Si los adultos pagaban 1500 colones y los niños 800 ¿Cuál es el número de adultos y niños que acudieron?

(g) En un paseo un padre quiso repartir entre sus hijos una pequeña cantidad de dinero. Si les daba 300 colones a cada uno le sobraba 600 colones y si les daba 500 colones le faltaba 1000. ¿Cuántos hijos tiene? ¿Qué cantidad quería repartir?

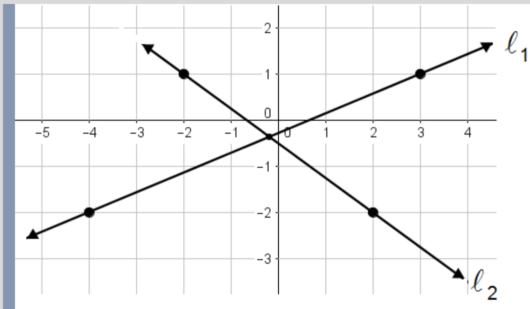
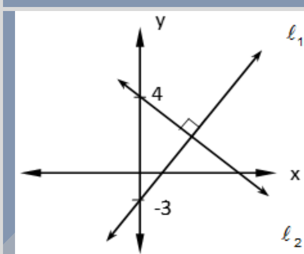
(h) Dionisio es hijo de Belarmino. Un día un amigo quería saber la cantidad de hijos de Belarmino. Dionisio le indica tiene tantas hermanas como hermanos; pero le aclara que si se le pregunta a su hermana Eustaquia, ella contesta que el número de hermanos que tiene es el doble que el de las hermanas. ¿Cuántos hijos y cuántas hijas tiene Belarmino?

(i) Hace 5 años la edad de Tolentino era el triple de la de Macedonio y dentro de 5 años sólo será el duplo. ¿Cuáles son las edades de Tolentino y Macedonio?

3. De acuerdo con los datos que se proporcionan, indique si el sistema resultante es dependiente, inconsistente o independiente. Analice además, qué interpretación gráfica se le podría dar a su solución. [No resuelva el sistema, trabaje con la teoría]

a	 	b	
c	$\begin{cases} x-2y=5 \\ 4x-8y=20 \end{cases}$	d	$\ell_1:\ 3x-6=-y$ $\ell_2: 6x+2y=12$
e	$\ell_1:$ Su gráfica pasa por $(-1,3)(2,1)$ $\ell_2: y=\dfrac{5x-1}{7}$	f	$\begin{cases} 3x-5y=2 \\ 9x-15y=7 \end{cases}$

4. Determine el punto de intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2

a	$\ell_1:\ y = 2x + 1$ $\ell_2:\ 2y - 2x = 4$	b	
c	$\ell_1 \perp \ell_2$ $\ell_1: 3y = 3 - 2x$ ℓ_2 pasa por el origen	d	 $\ell_2:\ y = -x + 4$

5. La función de costo total de una empresa está determinada por ₡2 000 000 mensuales fijos más ₡ 1 000 por cada unidad producida. La función de ingreso está dada por I(x) = 5 000x, donde “x” representa la cantidad de unidades producidas y vendidas en un mes. Si en marzo la empresa obtuvo cero colones de ganancia, ¿cuántas unidades se produjeron y vendieron ese mes?

6. Un vendedor de paquetes vacacionales tiene dos opciones para definir su salario mensual. La primera consiste en ganar un salario base de ₡ 600 000 más ₡6 000 por cada paquete que venda. La segunda opción es percibir un salario base de ₡ 400 000 más ₡14 000 por cada venta. ¿Cuántos paquetes vacacionales debe vender para que el salario sea el mismo en las dos opciones?

7. Una empresa telefónica ofrece a sus clientes de telefonía móvil dos planes, que incluyen mensajes de texto y minutos de llamadas. Los montos se resumen en la siguiente tabla.

Plan	Precio	Cantidad de mensajes de texto	Minutos de llamada que puede realizar
A	₡ 4 800	600	60
B	₡ 6 400	400	120

Si ambos planes ofrecen el mismo precio por cada mensaje de texto y por cada minuto de llamada, determine el precio que tiene cada servicio.

8. Una empresa adquiere en una misma fecha una máquina M por un monto de ₡5 000 000 y una máquina M a ₡ 4 500 000. Ambas máquinas se desvaloran mensualmente respecto al precio de adquisición en ₡525 000 y ₡ 425 000 respectivamente. ¿Cuántos años deben trascurrir para que ambas máquinas tengan un mismo valor?

9. La función de costo total de una empresa está constituida por ₡1 860 000 mensuales fijos, más ₡1200 por cada unidad producida. Además la función de ingreso "I" en colones está modelada por I(x) = 6000x, donde "x" es la cantidad de artículos producidos y vendidos por mes. ¿Cuál es la **mínima** cantidad de unidades que deben venderse para tener alguna ganancia?

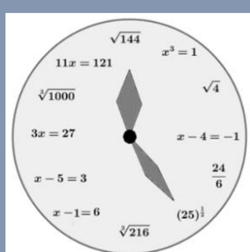
Estadística y Probabilidad

Representaciones tabulares y gráficas

Habilidades:
1. Utilizar diferentes tipos de representaciones gráficas o tabulares para el análisis de datos cualitativos y favorecer la resolución de problemas vinculados con diversas áreas.

Escenario de aprendizaje

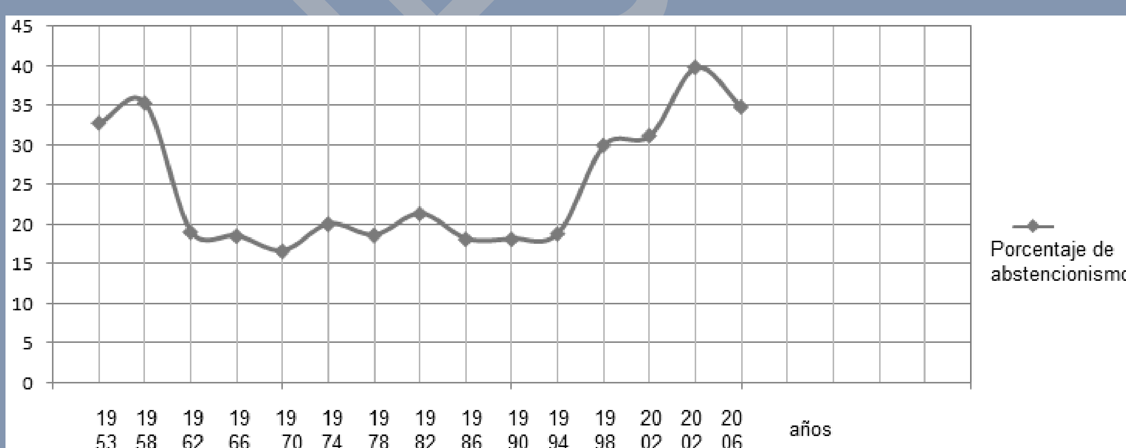
Repaso: Busque en periódicos, revistas o la Web tablas y gráficos estadísticos diversos. Analice la información contenida en cada uno de ellos y compártala con sus estudiantes.



Tiempo para practicar 3.1

1. Considere el gráfico.

Costa Rica: Porcentaje de abstencionismo electoral entre los años 1953 y 2006



Fuente: TSE

* El 2002 se repite porque hubo segunda ronda electoral

Conteste:

(a) ¿Por qué es conveniente usar un gráfico lineal para este tipo de información?

(b) ¿Entre cuáles dos años electorales consecutivos hubo el mayor aumento de abstencionismo?

(c) ¿Entre cuáles dos años electorales consecutivos disminuyó más significativamente el abstencionismo?

(d) ¿Entre cuáles años electorales consecutivos hubo un menor cambio en el porcentaje de abstencionismo?

(e) En el 2002 hubo segunda ronda electoral, ¿en cuánto porciento aumentó el abstencionismo en esa segunda ronda, respecto a la primera? Comente en clase cuáles pudieron ser los motivos de ese aumento.

(f) ¿Cuáles fue el año con menor abstencionismo?

(g) El padrón electoral en el 2006 fue de 2 548 577 personas. ¿Cuántas personas aproximadamente votaron en esas elecciones?

2. Considere la tabla y conteste lo que se le solicita.

Costa Rica. Nacimientos según año y sexo
Período 1990 – 2009

Año	Sexo		Total
	Hombre	Mujeres	
1990	42.291	39.648	81.939
1991	41.707	39.403	81.110
1992	41.390	38.774	80.164
1993	41.092	38.622	79.714
1994	41.104	39.287	80.391
1995	41.181	39.125	80.306
1996	40.558	38.645	79.203
1997	39.790	38.228	78.018
1998	39.428	37.554	76.982
1999	40.417	38.109	78.526
2000	39.943	38.235	78.178
2001	39.214	37.187	76.401
2002	36.868	34.276	71.144
2003	37.172	35.766	72.938
2004	36.748	35.499	72.247
2005	36.700	34.848	71.548
2006	36.276	35.015	71.291

(a) En qué año hubo mayor diferencia absoluta entre la cantidad de nacimientos de hombres y de mujeres.

(b) ¿Cuál es la razón entre el número de nacimientos de hombres y mujeres en 1999?

(c) ¿Cuál es el año en que hubo más nacimientos en total?

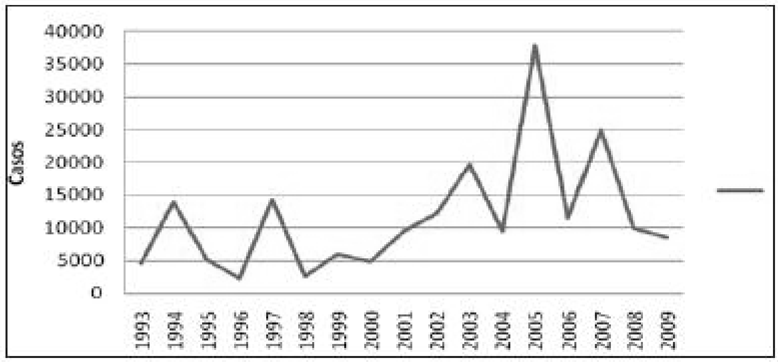
(d) ¿Cuál es el porcentaje de hombres nacidos en 1997?

(f) Con ayuda del Excel construya un gráfico lineal donde se aprecie el número total de nacimientos entre 1990 y 2009

Fuente: INEC

3. Analice el siguiente gráfico y conteste.

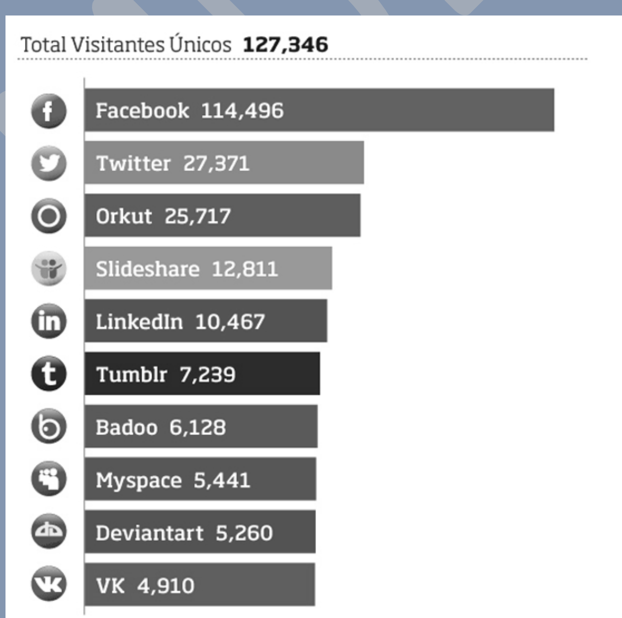
Costa Rica: Número de casos de Dengue en el periodo 1993-2009



Fuente: Caja Costarricense de Seguro Social

(a) ¿Entre cuáles dos años se dio el mayor crecimiento de casos de dengue?
(b) ¿Cuáles años consecutivos comprenden el más largo periodo en que los casos de dengue crecieron?
(c) ¿En qué años los casos de dengue fueron superiores a 15 000?
(d) ¿Cuántos casos de dengue se reportaron en el 2007?

4. El siguiente gráfico muestra en millones de usuarios, las visitas de personas a una red social durante abril del 2007. Según esta información, conteste:



(a) ¿Por qué si se suma el total de visitas de cada sitio Web, no coincide con el total de visitantes únicos?

(b) Según el número de visitas ¿qué porcentaje le corresponde a Myspace?

(c) Según el número de visitas ¿qué porcentaje le corresponde a Facebook?

(d) Si sumamos todas frecuencias absolutas de las redes sociales exceptuando al Facebook, ¿estas superan a la principal red social?

5. La tabla adjunta, presenta las calificaciones de los estudiantes de un grupo de sétimo nivel en Matemática. Según esa información, es verdadero que

Calificaciones	Frecuencia Absoluta
65	1
70	2
75	3
80	4
85	20
90	12
95	6

(A) 42 estudiantes tienen una calificación mayor 80.
(B) 85 estudiantes obtuvieron un 20 como calificación.
(C) 25% de los estudiantes tienen una nota de 90
(D) 3 estudiantes tienen una nota menor a 70.

6. En la tabla adjunta se muestran las edades de los estudiantes conductores que utilizan el parqueo de la Universidad Nacional por día. De acuerdo con los datos del cuadro, ¿cuál afirmación es verdadera?

Edad "x" de los conductores	Frecuencia absoluta
18	200
19	305
20	406
21	200
22	200
23	46
24	5

(A) 451 conductores que usan el parqueo tienen al menos 21 años
(B) 505 conductores que usan el parqueo tienen a lo sumo 20 años.
(C) la mitad de los conductores que usan el parqueo tienen 20 años
(D) 46 conductores que usan el parqueo tiene más de 23 años.

7. Considere la información proporcionada en la tabla.

Costa Rica: Porcentaje de repitencia en secundaria, según el tipo de educación, de los años 2003 a 2012

Tipo de Educación	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Pública	11,6	11,3	12,6	12,6	13,4	12,8	11,0	12,9	14,3	13,3
Privada	2,9	2,6	3,4	3,4	3,5	3,4	2,3	2,3	2,5	2,0
Subvencionada	3,0	2,7	2,9	3,1	3,7	3,6	3,5	3,3	3,7	2,8

Fuente: Estado de la nación.

(a) Construya con ayuda del Excel un gráfico lineal donde se logre apreciar las tres series a lo largo de los años indicados.
(b) ¿Cuál es el año donde es menor la diferencia entre el porcentaje de repitencia de la educación pública y privada?

8. Una señora desea estudiar contabilidad, y para ello indaga la oferta en varios institutos del país. La información que se le suministra es la siguiente:

Inserción al campo laboral según lugar donde recibió los estudios

Instituto	Graduados con técnico medio por año	Trabajan en un puesto relacionado a su especialidad
A	109	21
B	316	80
C	56	6
D	9	8
E	415	326
F	245	23
G	456	209

Analice con sus compañeros cuál puede ser la mejor opción

Medidas de posición

Habilidades:

2.Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.
3. Identificar la ubicación aproximada de las medidas de posición de acuerdo con el tipo de asimetría de la distribución de los datos.
4. Utilizar la calculadora o la computadora para calcular las medidas estadísticas correspondientes de un grupo de datos.
5. Determinar la media aritmética en grupos de datos que tienen pesos relativos (o ponderación) diferentes entre sí.
6. Utilizar la media aritmética ponderada para determinar el promedio cuando los datos se encuentran agrupados en una distribución de frecuencias.

Medidas de posición – Repaso-

Las medidas de tendencia central destacan un aspecto importante de la distribución en estudio. Sirven para hacer comparaciones y análisis.

Medidas de tendencia central en datos no agrupados

En datos no agrupados (es decir que no están separados en clases o intervalos) se puede hallar cada parámetro estadístico de la siguiente forma:

☑ **Media aritmética** (promedio): Es la suma de los valores de la variable dividida por el número de datos. Se puede simbolizar mediante $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\text{suma de valores de la variable}}{\text{total de datos}}$$

Ejemplos:

1) Hay colegios donde se saca la media de todas las materias de cada estudiante, para así determinar a los mejores promedios por nivel. Supongamos que estas son las notas de los tres mejores promedios:

Materia \ Estudiante	Armando	Josefa	Alejandrina
Español	98	90	95
Matemática	95	92	92
Ciencias	96	90	95
Estudios Sociales	75	95	95
Inglés	100	90	97
Francés	98	92	90
Cívica	100	93	90
Educ Fisica	98	100	90
Música	100	95	90
Artes	100	91	90

Promedio o media

Armando $\frac{98+95+96+75+100+98+100+98+100+100}{10}=96$

Josefa $\frac{90+92+90+95+90+92+93+100+95+91}{10}=92,8$

Alejandrina $\frac{95+92+95+95+97+98+90+90+90+90}{10}=92,4$

Hay que tener muy claro que la media es un parámetro para hacer comparaciones, y en este caso es útil para determinar que Armando tiene el mejor promedio. Note que a pesar de que Armando tuvo mejor promedio, su calificación en Estudios Sociales fue la más baja de todas; Josefa ni Alejandrina tuvieron una nota inferior a 90, pero Armando sí.

Ahora bien, su mejor promedio lo obtiene porque el resto de notas son bastante altas.

Si al analizar los datos, hay algunos pocos valores más grandes o más pequeños del común, provocan que el promedio se incline hacia esos valores.

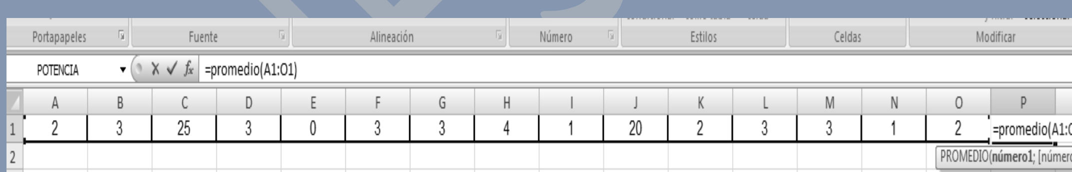
2) Por ejemplo, supongamos que se desea hacer un estudio en el departamento de orientación para verificar cuántas veces en promedio faltaron a clases los estudiantes en el III trimestre. Obtienen los siguientes datos del 8F:

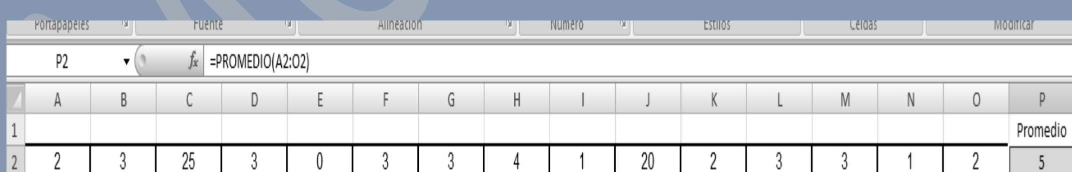
2	3	25	3	0	3	3	4	1	20	2	3	3	1	2

$$\bar{x} = \frac{2+3+25+3+0+3+3+4+1+20+2+3+3+1+2}{15} = 5$$

El promedio de ausencias del grupo es de 5. Sin embargo la mayoría de estudiantes sólo faltaron 2 o 3 veces. Este resultado de la media se debe a que dos estudiantes tuvieron una mala asistencia, con 25 y 20 ausencias, lo cual influyó en el promedio del grupo.

En Excel





☑ **Moda**: Es el valor de la variable con más frecuencia.

Ejemplos:

1) En una encuesta realizada en el colegio, se les consultó a cuál materia básica le dedicaban más estudio por semana. Las respuestas fueron las siguientes:

Estudios Sociales	Ciencias	Español	Matemática	Inglés	Francés	Estudios Sociales	Matemática
Matemática	Inglés	Ciencias	Español	Estudios Sociales	Estudios Sociales	Ciencias	Ciencias

En este caso la moda es Estudios Sociales, ya que es la observación con mayor frecuencia absoluta (4)

2) Considere la siguiente información tomada del INEC (Instituto Nacional de Estadística y Censos) y determine la moda.

Número de aposentos en viviendas construidas en San José, en un área de construcción de menos de 40 m^2

Número de posentos	Cantidad de viviendas
1	2
2	69
3	1792
4	254
5	24
6 o más	123

Fuente: INEC 2001

La mayor frecuencia es 1792, por tanto la moda es 3 aposentos.

☑ **Máximo y mínimo:** Estos valores se definen a partir de sus propios nombres. El máximo corresponde al dato de mayor valor numérico del conjunto y el mínimo representa el de menor valor numérico.

Con la información de la tabla anterior, el mínimo es uno, pero no se conoce el máximo.

Analicemos algunos ejemplos:

Determine la media, mediana y moda en cada serie de datos.

a) Las edades de 11 participantes en un campamento:

12, 15, 8, 9, 5, 3, 12, 5, 11, 6, 5

Moda = 5, es decir la edad que más se repite es 5

Media = $\frac{12+15+8+9+5+3+12+5+11+6+5}{11} \approx 8,27$

La edad promedio es de 8, 27 años

La edad máxima es 15 y la mínima 3

b) Número de veces que 4 jóvenes han viajado a Puntarenas: 4, 15, 22, 10

Moda: No hay

Media

$$\frac{4+10+15+22}{4}$$

$$=\frac{51}{4}=12,75$$

Máximo: 22

Mínimo 4

Media o promedio ponderado en datos agrupados (tablas):

Es la suma de: los productos de los valores de la variable por sus frecuencias absolutas, divida entre el total de valores.

Ejemplos:

1) Con la información de la siguiente tabla determine el promedio ponderado, media, máximo y mínimo

.

Número de caries de estudiantes de sétimo nivel de un colegio urbano

Número de caries	Frecuencia absoluta
0	2
1	19
2	17
3	10
4	10
5	8
Totales	66

Para determin columna más, donde se calcule el producto del número de caries con su frecuencia.

Número de caries	Frecuencia	Producto del número de caries por la frecuencia
0	2	$0 \cdot 2 = 0$
1	19	$1 \cdot 19 = 19$
2	17	$2 \cdot 17 = 34$
3	10	$3 \cdot 10 = 30$
4	10	$4 \cdot 10 = 40$
5	8	$5 \cdot 8 = 40$
Totales	66	163

Media ponderada: $\frac{163}{66} \approx 2{,}46$ caries.

Moda: Como la mayor frecuencia es 19, entonces la media es el valor al que corresponde esa frecuencia, es decir 1. Por tanto tener una calza es la moda de este análisis.

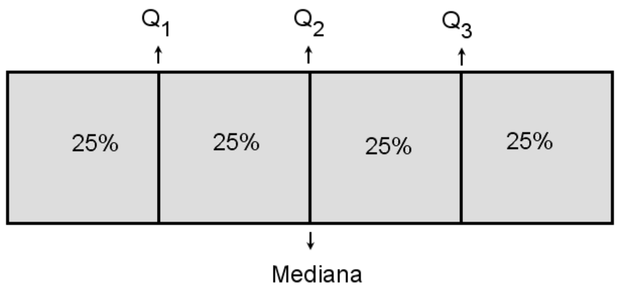
Mínimo: 0 calzas **Máximo:** 5 calzas

☑ **Cuartiles**:

Los cuartiles son los tres valores de la variable que dividen a un conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales.

Q_1, Q_2 y Q_3 determinan los valores correspondientes al 25%, al 50% y al 75% de los datos.

Al cuartil Q_2 se le llama **mediana.**



Q_1: Indica que el 25% de la serie de datos está bajo él y sobre él, se encuentra el 75% de los datos de la serie.

Q_2: Bajo esté valor se encuentra el 50% de la serie de datos y tercero, sobre ese valor calculado se encuentra el otro 50% de la serie de datos.

Q_3: Indica que el valor obtenido representa bajo sí el 75 % de la distribución de los datos y sobre sí, se encuentra el 25 % de la distribución de datos.

Para obtener **la posición** P_k del cuartil Q_k dentro de una serie de datos ordenada ascendentemente, se usa la fórmula:

$$P_k = k \cdot \frac{n+1}{4}$$ donde *n* es el número total de datos

Si ese resultado de la posición da con decimales, entonces el **valor del cuartil** se calcula: $Q_k = a + d(b-a)$ donde a y *b son los valores entre los que se ubica* P_k

y *d* es la parte decimal de P_k

Ejemplos:

1. La estatura en centímetros, de 19 estudiantes es

155, 169, 171, 163, 163, 179, 177, 160, 161, 170, 172, 156,

168, 164, 159, 174, 172, 179, 159

Determine los tres cuartiles e interprete el resultado.

Se ordena los datos de manera ascendente:

155, 156, 159, 159, 160, 161, 163, 163, 164, 168, 169, 170,
171, 172, 172, 174, 177, 179,179

n = 19

Primer cuartil. La posición está dada por $P_1 = 1 \bullet \frac{19+1}{4} = 5$. En esta posición se ubica el dato 163. Por tanto $Q_1 = 163$.

Este dato significa que el 25% de los estudiantes tienen una estatura menor o igual a 163.

Segundo cuartil o mediana. La posición está dada por $P_2 = 2 \bullet \frac{19+1}{4} = 10$. En esta posición se ubica el dato 168. Por tanto $Q_2 = 168$.

Este dato significa que el 50% de los estudiantes tienen una estatura menor o igual a 168cm. O bien, que el 50% tiene una estatura mayor o igual a 168 cm

Tercer cuartil. La posición está dada por $P_3 = 3 \bullet \frac{19+1}{4} = 15$. En esta posición se ubica el dato 172. Por tanto $Q_3 = 172$.

Este dato significa que el 75% de los estudiantes tienen una estatura menor o igual a 172cm.

2. El consumo en kWh mensuales de una familia durante un año se presenta en la siguiente tabla

Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Set	Oct	Nov	Dic
220	201	196	215	206	201	231	198	190	203	204	240

Determine los tres cuartiles e interprete el resultado.

Se ordena los datos de manera ascendente:

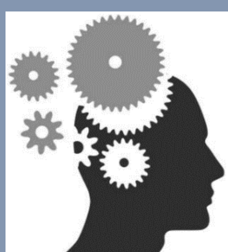
190, 196, 198, 201, 201, 203, 204, 206, 215, 220, 231, 240

$n = 12$

<u>Primer cuartil.</u> La posición está dada por $P_1 = 1 \bullet \frac{12+1}{4} = 3{,}25$. Como da con decimales, se buscan los valores de las posiciones 3 y 4. Esto es 198 y 201. Con estos valores, se aplica la fórmula para determinar el cuartil:

$$Q_k = 198 + 0{,}25(201 - 198) = 198{,}75$$

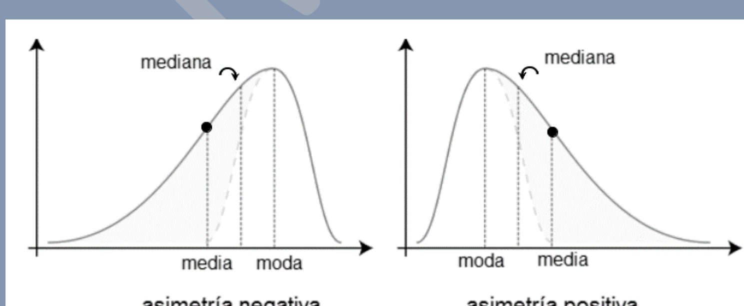
En el 25% de las ocasiones el consumo de electricidad fue inferior o igual a 198,75 kWh

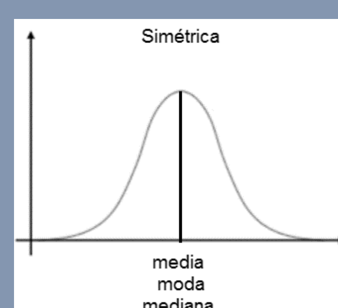


Calcule los otros dos cuartiles

¿Usar la media o la moda?

Como se indicó anteriormente, la media aritmética es muy sensible a valores extremos, es decir, datos muy altos o muy bajos con respecto a los demás. Para que la media cumpla su propósito, la distribución debe ser aproximadamente simétrica, en caso contrario, es conveniente usar la mediana.





Ejemplo

En una reunión de personal de una empresa de componentes electrónicos, se da un informe a los presentes, donde se indica que el salario promedio en colones de los trabajadores es de 600 000. Los empleados del departamento de producción consideran que el dato está alterado, pues la mayoría tiene salarios que no sobrepasan los ₡330 000. Sin embargo, el gerente les muestra los datos donde efectivamente se puede constatar de la veracidad de la información.

250 000	300 000	310 000	320 000	330 000	340 000	3000 000	3500 000
8	7	4	4	1	3	1	2

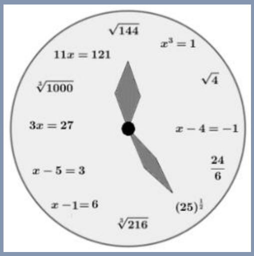
Promedio ₡599 000

Esto sucede porque tres de los gerentes tienen un salario mayor o igual a los ₡3 000 000, lo cual eleva la media de los salarios. En este caso, hubiese sido más oportuno usar la mediana de los datos, que sería de ₡305 000.

Se dice que los salarios de esta empresa, muestran una asimetría positiva.

Tiempo para practicar 3.2

1. Los siguientes datos corresponden a las edades de 11 ciudadanos.



15 20 16 19 54 65 10 11 40 15 52

Determine e interprete:
(a) La moda
(b) La media
(c) El máximo
(d) El mínimo
(e) Mediana

2. Los siguientes datos corresponden a la masa corporal en kilogramos de algunos estudiantes.

35 39 45 60 78 55 35 29 48 69

De acuerdo con la información determine e interprete:

(a) La moda
(b) La media
(c) El máximo
(d) El mínimo
(e) Mediana

3. La cantidad de hermanos de un grupo de personas es 1, 3, 1, 3, 4, 3, 5, 2, 1
Según esa información, ¿cuántas modas se aprecian en los datos?

4. Las calificaciones de un estudiante en matemáticas cada trimestre son

72	90	82

Determine la media de esas calificaciones.

5. En el siguiente recuadro se muestra la cantidad de litros de leche que consume 8 familias al mes.

17	25	8	12	17	26	25	17

Determine e interprete:

(a) La moda (b) La media (c) El máximo (d) El mínimo (e) La mediana

6. Las calificaciones de los estudiantes en Español son 83, 82, 71, 80, 25, 70, 65

(a) Determine la media de las calificaciones.
(b) De acuerdo con el resultado obtenido anteriormente, analice la siguiente frase:

"La media no tiene que ser un valor propio de la variable y es muy sensible a valores extremos en los datos".

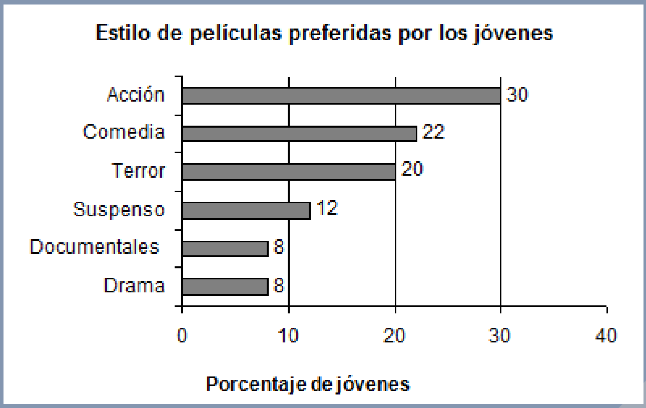
7. En una prueba de gimnasia la puntuación promedio de cada atleta se calcula eliminado la peor y la mejor nota de los jueces.
Si las puntuaciones obtenidas han sido: 8,1; 9,0; 9,3; 9,6; 8,2; 8,7 y 9,5. ¿Qué nota corresponde?

8. Las edades en años cumplidos de los integrantes de un grupo comunal aparecen en el cuadro adjunto. Según la información, determine e interprete:

(a) La moda
(b) La media
(c) El máximo
(d) El mínimo

Edad en años cumplidos	Número de personas
12	1
15	3
16	2
20	1
25	1
26	1
28	1
32	1

9. De acuerdo con los datos del gráfico adjunto, analice las siguientes proposiciones



I. La distribución presenta dos modas.

II. Doce de cada cien jóvenes prefieren las películas de suspenso.

De estas son verdaderas

(A) ambas.
(B) ninguna.
(C) solo la I.
(D) solo la II

10. En la tabla adjunta se muestran las notas de un estudiante de décimo nivel, conjuntamente con los valores porcentuales de cada rubro, entonces ¿cuál es su promedio ponderado?

Rubro	Porcentaje (%) del rubro	Calificación obtenida
Concepto	5	90
Asistencia	5	100
Trabajo en clase	15	85
Tareas	10	80
Exámenes	65	75

11. Los siguientes datos corresponden a la masa en kilogramos de 7 personas.

45	57	40	38	57	69	48

De acuerdo con la información anterior, es verdadero que

(A) Hay dos modas
(B) la moda es mayor que la media
(C) el máximo supera en 10 a la moda
(D) el valor de la media pertenece al conjunto formado por la masa en kilogramos.

12. La tabla adjunta, presenta las horas que dedican a leer los estudiantes del 8B de un colegio nocturno por mes. Según la información, conteste:

Horas dedicadas a leer	Frecuencia Absoluta
0	3
1	3
2	6
3	9
4	0
5	11

(a) ¿Cuál es la moda de las horas dedicadas a leer?
(b) ¿Cuál es la media de las horas dedicadas a leer?
(c) Construya un gráfico de barras con esta información

13. Una familia desea hacer un tour al avistamiento de ballenas en el Pacífico Sur de Costa Rica en el sétimo fin de semana, para lo cual busca información de tres compañías que han prestado el servicio en los 6 fines de semana anteriores.

Compañía / Ballenas por fin de semana	A	B	C
Primer fin de semana	6	5	5
Segundo fin de semana	7	8	8
Tercer fin de semana	9	9	9
Cuarto fin de semana	5	7	8
Quinto fin de semana	8	10	8
Sexto fin de semana	12	7	7

(a) Si la familia decide contratar la compañía con la mayor media de ballenas vistas por fin de semana, ¿Cuál compañía escoge?

(b) Si la decisión la toman de acuerdo a la mediana, ¿cuál compañía sería mejor?

14. La siguiente ilustración muestra diversas condiciones el tiempo de 4 días en San José, para el mes de agosto del 2015

Determine la moda, media y mediana de:

(a) Velocidad del viento

(b) Mililitros de agua llovida

(c) Temperatura máxima

15. Se presenta las edades de 20 oferentes que fueron a una feria del empleo:

22, 30, 25, 20, 28, 24, 37, 41, 55, 57, 55, 21, 24, 25, 24, 26, 57, 57, 49, 50

Determine los tres cuartiles e interprete el resultado.

16. La cantidad de horas que invierten en viajar los empleados a su empresa en San José y luego en regresar a su casa, se detalla a continuación.

1	1,5	0,5	1	1	1,5	0,5	1	2	2,5	2	2,5	1	2	1,5

Determine los tres cuartiles e interprete el resultado.

17. Se presenta el número de artículos que inspeccionan 26 trabajadores durante un día.

30	21	25	36	20	32	27	29	27	30	24	20	26
31	35	27	20	19	26	23	32	33	32	26	26	21

Determine los tres cuartiles e interprete el resultado.

18. Las calificaciones en Español de los estudiantes de una sección se presenta a continuación.

72	12	74	74	72	74	70	76	76	70	80	72	74	10	74
70	72	74	70	80	72	84	10	84	72	84	70	76	70	12

(a) Determine la media y la mediana
(b) Analice la simetría de esta distribución. ¿Cuál medida de tendencia representa más fielmente los datos?

19. La dueña de una soda lleva un registro mensual del número de clientes.

700	100	85	100	95	600	90	85	80	90	80	650

(a) Determine la media y la mediana
(b) Analice la simetría de esta distribución. ¿Cuál medida de tendencia representa más fielmente los datos?

HACIA EL

BACHILLERATO

1) Un curso universitario posee tres pruebas. La primera vale 20%, la segunda 30% y la tercera 50%. Si un estudiante obtuvo una nota de 70 en la primera prueba, un 60 en la segunda y un 80 en la tercera, entonces, considerando los valores porcentuales ¿cuál fue la nota que obtuvo el estudiante en ese curso?

2) Considere la siguiente tabla sobre calificaciones obtenidas por un estudiante en un curso que se aprueba con un 70 de promedio:

Rubro de evaluación	Valor porcentual (%)	Calificación obtenida por el estudiante
Examen I	25	72
Examen II	25	55
Proyecto final	50	x

Con base en la información anterior, ¿cuál es la calificación mínima que puede obtener el estudiante en el proyecto final para aprobar el curso?

3) Una academia prepara a sus clientes para la prueba teórica de manejo. En un mes, sus estudiantes presentaron el examen, y la media aritmética de las calificaciones fue de 86; la mediana de 72,5 y la moda de 90. La academia tiene una política de garantía, que establece que el 50% o más de los estudiantes lograrán la nota mínima de 80, de lo contrario, se les reintegra el dinero a quienes no aprobaron dicho examen

(a) Considere las siguientes proposiciones:

I. La nota mínima obtenida fue superior a 72,5.
II. El 86% de los estudiantes ganaron la prueba.

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

(b) Considere las siguientes proposiciones

I. La calificación que más se repitió en la prueba fue el 90.
II. La academia, como parte de la garantía tuvo que reintegrar el dinero a los clientes que no aprobaron el curso.

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

4) En la tabla adjunta se muestran las notas de un estudiante de décimo nivel, conjuntamente con los valores porcentuales de cada rubro, entonces ¿cuál es su promedio ponderado?

Rubro	Porcentaje (%) del rubro	Calificación obtenida
Concepto	5	90
Asistencia	5	100
Trabajo en clase	15	85
Tareas	10	80
Exámenes	65	75

5) Considere las siguientes proposiciones

I. La media no tiene que ser un valor propio de la variable y es muy sensible a valores extremos en los datos.
II. La moda siempre es un valor propio de la variable y representa el valor de la variable con más frecuencia.

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

6) El tiempo de espera, en minutos, de los usuarios que llaman a la operadora de una compañía de servicios móviles, se resume en la tabla de datos agrupados adjunta. Según esa información, el promedio ponderado de espera, en minutos, corresponde a

Tiempo de espera en minutos	Frecuencia absoluta
$[0,4[$	11
$[4,8[$	42
$[8,12[$	7
$[12,16[$	3

(A) 6,3 (B) 6,12

(C) 42,0 (D) 4,0

7) En una página de turismo, se presenta la cantidad de precipitaciones (en mm) por mes, que se presentaron en San José en el 2015. Los datos se resumen en la siguiente tabla:

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ag	Set	Oct	Nov	Dic
Precip (mm)	2	2	1	52	302	280	200	270	330	301	150	39

De acuerdo con la información, considere:

I. La cantidad de precipitaciones en mm, por mes, más usual fue 2
II. El 50% de los datos de las precipitaciones en mm, fue mayor o igual a 175

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

8) La tabla adjunta, muestra las posiciones y tiempos (en segundos) de la final de los 100 metros planos en el mundial de atletismo Beijing 2015. Según la información, considere las siguientes proposiciones:

IAAF World Championships iaaf.org Beijing 2015

100 METRES MEN FINAL

1	Usain BOLT	JAM	9.79	SB
2	Justin GATLIN	USA	9.80	
3	Trayvon BROMELL	USA	9.92	
3	Andre DE GRASSE	CAN	9.92	PB
5	Mike RODGERS	USA	9.94	
6	Tyson GAY	USA	10.00	
7	Asafa POWELL	JAM	10.00	
8	Jimmy VICAUT	FRA	10.00	
9	Bingtian SU	CHN	10.06	

I. El tiempo más usual fue de 10 segundos
II. El 50% de los datos tiempos registrados fue de 9,92 segundos o más.

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

9) En una competencia de clavados participan 4 deportistas, que son calificados por 5 jueces. En cada caso, la nota más alta y la más baja, son eliminadas, y se promedia la puntuación con las tres restantes. Los resultados de la competencia se resumen en la tabla.

	Puntuaciones del jurado				
Competidor	Juez 1	Juez 2	Juez 3	Juez 4	Juez 5
A	8,2	7,9	8,6	7,8	8,0
B	7,9	8,8	8,5	8,3	8,7
C	7,4	6,8	7,3	7,0	7,0
D	8,6	7,4	7,8	8,6	9,2

(a) ¿Cuál fue el puntaje obtenido por el competidor C?
(b) El competidor ganador es ___________

10) A continuación se muestran las temperaturas máximas en grados Celsius, para doce días de febrero, 2016 en Heredia

Temperatura máxima.	24	26	26	27	27	27	28	29	29	30	30	31

Según la información, considere:

I. El 25% de las temperaturas registradas son menores o iguales a 26,5°C.

II. El 25% de las temperaturas registradas son mayores o iguales a 29,5°C

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

11) La tabla adjunta muestra la tasa de desempleo en los países de Centro América, en el 2015, según el Fondo Monetario Internacional

Según la información considere:

I. La mayor diferencia en la tasa de desempleo es de 6%.

II. La tasa de desempleo en Honduras es menor que el promedio de los otros 5 países centroamericanos

Costa Rica	10,1%
El Salvador	5,5%
Nicaragua	4,8%
Honduras	4,5%
Guatemala	4,2%
Panamá	4,1%

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

12) Considere los datos de la tabla, que corresponden a medidas de posición de la masa corporal, en kilogramos, de un determinado grupo

Mínimo	Cuartiles			Máximo
	Q_1	Q_2	Q_3	
41	49	68	72	89

(a) De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

I. EL recorrido intercuartílico es de 48 kg
II. La mayor diferencia entre las masas corporales es de 23 kg

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

(b) Considere las siguientes proposiciones:

I. El 50% de las masas corporales se ubican entre 49kg y 72kg inclusive.
II. El 75% de las masas corporales son mayores o iguales a 49kg

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

(c) El recorrido de las masas corporales es

13) Considere la siguiente información, la cual corresponde salario promedio, en colones, de los trabajadores de dos almacenes.

	Mínimo	Cuartiles			Máximo
		Q_1	Q_2	Q_3	
Almacén A	330 000	355 000	480 000	875 000	950 000
Almacén B	355 000	400 000	475 000	510 000	720000

(a) Según la información, analice:
I. El recorrido intercuartílico de los salarios, en el almacén A es mayor que en el B
II. El 25% de los salarios en el almacén A es menor o igual al salario mínimo del almacén B

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

(b) Considere las siguientes proposiciones:
I. El 50% de los salarios en el almacén B se ubican entre 480 000 y 355 000 colones inclusive.
II. El 50% de los salarios del almacén A son mayores o iguales a ₡475 000

¿Cuál o cuáles de ellas son verdaderas?

14) En una muestra a 180 pacientes con miopía elevada (superior a 12,00D) se les midió la longitud axial (un parámetro biométrico de sus ojos). Al resumir los datos, se obtuvo que la mediana es de 28,5, la moda de 31 y la media de 31,5. De acuerdo con esta información se puede afirmar con certeza que en los 180 pacientes

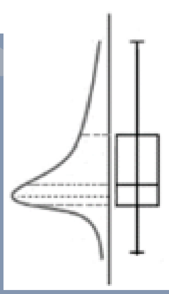
(A) exactamente 90 tienen una longitud axial de 28,5

(B) la longitud axial más usual es 31

(C) al menos un paciente tiene una longitud axial de 31,5

(D) el 50% tienen una longitud axial mayor o igual a 31,5

15) El diagrama adjunto representa una gráfica de distribución de frecuencias con asimetría negativa. Entonces se cumple que



(A) $M_0 = M_e$

(B) $\overline{x} = M_e$

(C) $\overline{x} < M_e$

(D) $\overline{x} > M_e$

Probabilidades

Habilidades:

1. Describir relaciones entre dos o más eventos de acuerdo con sus puntos muestrales, utilizando para ello las operaciones: unión, intersección y “complemento” e interpretar el significado dentro de una situación o experimento aleatorio.
2. Representar mediante diagramas de Venn las operaciones entre eventos.
3. Reconocer eventos mutuamente excluyentes en situaciones aleatorias particulares.
4. Deducir mediante situaciones concretas las reglas básicas (axiomas) de las probabilidades.
5. Deducir las propiedades relacionadas con la probabilidad de la unión y del complemento.
6. Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución

Escenario de aprendizaje

Se lanzan dos dados y se suman los resultados.

¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los valores de las caras de arriba sea un número primo?

El espacio muestral se puede representar en el siguiente cuadro, donde se recalca los valores primos. Note que hay 15 eventos favorables. Por lo que la probabilidad solicitada es de 15/36.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Otra manera de proceder es analizando cada evento probable.

La suma es un número primo, en los siguientes eventos:

E_1: Que la suma sea 2

E_2: Que la suma sea 3

E_3: Que la suma sea 5

E_4: Que la suma sea 7

E_5: Que la suma sea 11

Cada uno de estos eventos son **mutuamente excluyentes**, es decir, en un mismo lanzamiento no puede ocurrir E_1 y E_4 al mismo tiempo.

Calculamos la probabilidad de cada evento

$P(E_1) = P(2) = 1/36$

$P(E_2) = P(3) = 2/36$

$P(E_3) = P(5) = 4/36$

$P(E_4) = P(7) = 6/36$

$P(E_5) = P(11) = 2/36$

De tal modo, que la probabilidad de que la suma sea un número primo es

$15/36 = 1/36 + 2/36 + 4/36 + 6/36 + 2/36 = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5)$

En eventos mutuamente excluyentes, se cumple que

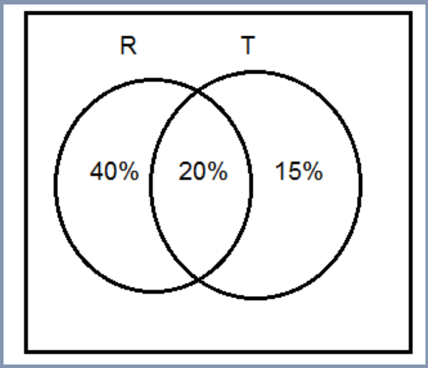
$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots E_n) = P(E_1) \cup P(E_2) \cup P(E_3) \cup \ldots P(E_n)$$

Escenario de aprendizaje

En un colegio de San Carlos el 60% de los estudiantes usan Internet y lo hacen para acceder a redes sociales. Un 35% usa Internet para hacer trabajos. El 20% de la población estudiantil usa este recurso tecnológico para realizar sus trabajos e interactuar en las redes sociales. Con esta información determine

(a) La probabilidad de que un estudiante seleccionado aleatoriamente use redes sociales o haga trabajos con ayuda del Internet.
(b) La probabilidad de que un estudiante seleccionado aleatoriamente use redes sociales.
(c) La probabilidad de que un estudiante seleccionado aleatoriamente use redes sociales y haga trabajos con ayuda del Internet.
(d) La probabilidad de que un estudiante seleccionado aleatoriamente no use Internet para acceder a redes sociales ni para hacer trabajos.

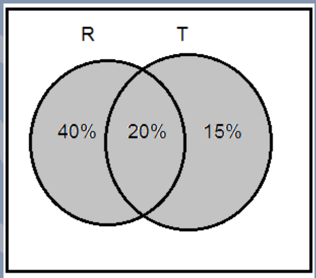
En este caso podemos definir los siguientes eventos:



T: Use Internet y con él haga trabajos

R: Use Internet y con él acceda a las redes sociales

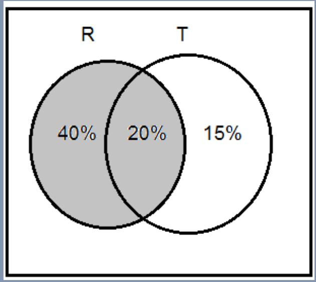
Note que estos eventos **no** son excluyentes, puesto que un mismo estudiante puede que use el Internet para realizar trabajos y acceder a las redes sociales. En estos casos, es conveniente hacer un diagrama de Venn para analizarlos con mayor facilidad.



(a) Para expresar que un estudiante usa redes sociales o hace trabajos con ayuda del Internet, se simboliza: $R \cup T$

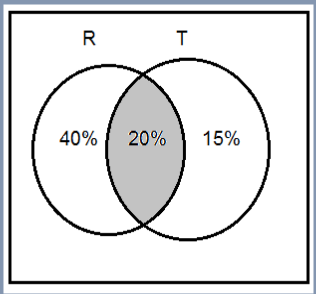
Con el diagrama se nota que $P(R \cup T) = \frac{75}{100} = 0,75$

Esta también es la probabilidad de que un estudiante use Internet.



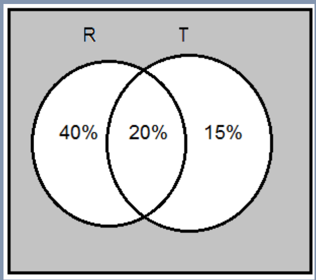
(b) La probabilidad de que un estudiante use Internet y lo haga con el fin de ingresar a redes sociales está dada por

$P(R) = \frac{60}{100} = 0,6$



(c) Para expresar que un estudiante usa redes sociales y hace trabajos con ayuda del Internet, se simboliza: $R \cap T$

$P(R \cap T) = \frac{20}{100} = 0,2$



(d) Para expresar que un estudiante no usa Internet (ni para trabajos ni para redes sociales) se simboliza $\overline{R \cup T}$:

$P(\overline{R \cup T}) = \frac{25}{100} = 0,25$

Con este problema, podemos deducir algunas propiedades de probabilidad:

1. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
2. $P\left(\overline{E_1}\right) = 1 - P(E_1)$

En síntesis:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$

2. $P(E) = \dfrac{\text{resultados favorables}}{\text{total de elementos del espacio muestral}}$

3. En eventos mutuamente excluyentes:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots E_n) = P(E_1) \cup P(E_2) \cup P(E_3) \cup \ldots P(E_n)$$

4. $P(A \cup B)$: Probabilidad de que ocurra A,ocurra B o ambas

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. $P(A \cap B)$:Probabilidad de que ocurra A, y B a la vez

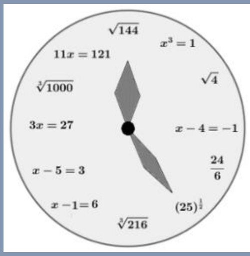
6. $P(A - B)$: Probabilidad de que ocurra A pero no B

7. $P(\overline{A})$: Probabilidad de que no ocurra A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Tiempo para practicar 3.3

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de los números que quedan hacia arriba sea múltiplo de 3?



2. De 35 estudiantes a 15 les gusta el baloncesto, a 24 el fútbol y a 9 ambos deportes. Si se escoge al azar a un estudiante, determine la probabilidad de que sea alguien que:

   (a) Le guste el fútbol
   (b) Le guste el baloncesto
   (c) Le guste el fútbol o el baloncesto
   (d) Le guste el fútbol y el baloncesto
   (e) No le guste ninguno de los dos deportes
   (f) No le guste el baloncesto

3. En una bolsa hay 7 bolas rojas, 9 azules y 4 verdes. Cada bola tiene la misma probabilidad de ser sacada. Si se extrae una bola, determine la probabilidad de:

   (a) No sea roja
   (b) Sea verde
   (c) Sea roja o azul.

4. La siguiente tabla muestra el número de estudiantes del ciclo diversificado de un colegio rural.

	Hombre	Mujer	Total
Décimo	68	56	124
Undécimo	32	40	72
Total	100	96	196

Del total de estudiantes del ciclo diversificado, se va a escoger uno al azar para que represente el colegio en un evento.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en undécimo?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en décimo?

5. La probabilidad de que Engracia compre una blusa es de 0,3 y de que compre una enagua 0,5. Si la probabilidad de que compre alguna prenda es de 0,7. Determine:
(a) La probabilidad de que compre las dos prendas a la vez
(b) La probabilidad de que solo compre la enagua

6. La siguiente tabla muestra el número de estudiantes que asisten al comedor escolar, según si vive cerca o lejos del centro educativo

	Beca	Sin beca	Total
Cerca	70	300	370
Lejos	135	50	185
Total	205	350	555

Del total de estudiantes que asisten al comedor, determine

(a) La probabilidad de que tenga beca.

(b) La probabilidad de que viva cerca

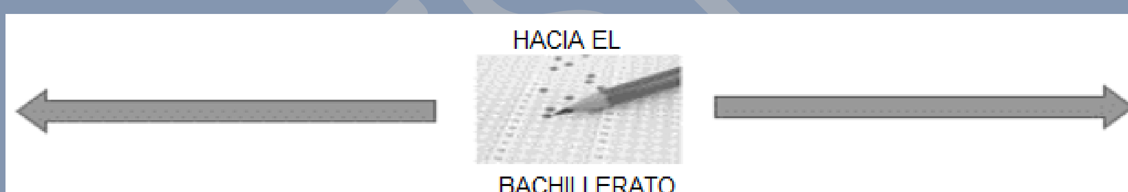
(c) La probabilidad de que viva lejos y tenga beca

(d) La probabilidad de que viva cerca y no tenga beca.

7. De un grupo de jóvenes, a 54 les gusta usar Internet, a 36 les gusta ver TV y 13 les gusta ver TV y usar Internet. Determine la probabilidad de que

(a) A un joven solo le guste ver TV

(b) A un joven le guste ver TV y usar Internet



1) La tabla muestra la cantidad de estudiantes de undécimo nivel de un colegio de Limón

Sección	Hombres	Mujeres
11 -1	18	14
11-2	16	12
11-3	8	20
11-4	18	6
Total	**60**	**52**

(a) Si se elige un estudiante al azar, entonces, ¿cuál es aproximadamente la probabilidad de que el estudiante sea hombre?

(b) Si se elige un estudiante al azar, entonces, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante sea de la 11 -2?

(c) Si se elige un estudiante al azar, entonces, ¿cuál es aproximadamente la probabilidad de que el estudiante sea una mujer de la 11 -1 o un hombre de la 11-4?

(d) Si se elige un estudiante al azar, entonces, ¿cuál es aproximadamente la probabilidad de que el estudiante sea una mujer de la 11 -3?

2) La Junta de Protección Social sacó un nuevo juego llamado "chances de números bajos", donde el que acierte el número entre el 00 y 49, recibe 70 veces su inversión. Gúdula y Onésimo compran algunos números para un mismo sorteo, de la siguiente forma: Gúdula compra todos los terminados en 3 (03, 13, 23..), mientras que Onésimo compra todos los números desde el 25 hasta el 31.

Según la información, considere:

I. Es más probable que acierte Gúdula a que acierte Onésimo
II. La probabilidad de que alguno de los dos, Onésimo o Gúdula, acierte es 0,24

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

3) En un EBAIS se está haciendo esfuerzos para que adultos mayores no padezcan de obesidad. Para ello implementan unas rutinas de ejercicios, pero no todos los pacientes que son atendidos, hacen dicha rutina. Al cabo de un año, calculan el índice de masa corporal (IMC) y si esta es mayor a 25, se considera con sobrepeso. Estos son los resultados

Hábito de ejercicio	**Índice de masa corporal**		**Total**
	Mayor o igual a 25	Menor a 25	
Hacen ejercicio	9	23	32
No hacen ejercicio	37	11	48
Total	**46**	**34**	**80**

(a) Si se selecciona un paciente en forma aleatoria, ¿cuál es aproximadamente la probabilidad de que no haga ejercicio y tenga un índice de masa corporal menor a 25?

(b) Considere las siguientes proposiciones:

I. La probabilidad de ser un paciente con IMC menor a 25, es más de dos veces mayor para los que hacen ejercicio que para los que no lo hacen.
II. La probabilidad entre los pacientes que hacen ejercicio, de tener un IMC superior o igual a 25 es de 0,28 aproximadamente.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

4) Se lanza un dado, y se registra el número que sale en la cara superior. Se observan dos eventos:

M: Que salga un número par
N: Que salga el número 6

(a) Considere las siguientes proposiciones:

I. Los eventos M y N son mutuamente excluyentes
II. El complemento de B tiene 5 puntos muestrales

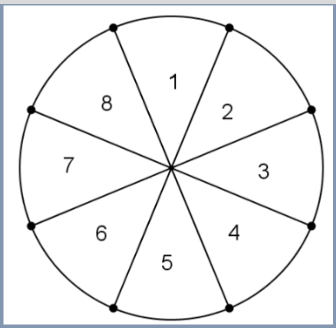
De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

(b) ¿Cuántos puntos muestrales tiene el evento $M \cap N$?

(c) ¿Cuántos puntos muestrales tiene el evento $M \cup N$?

5) Si A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes y la probabilidad de A es 0,3 y la de B es 0,4, entonces, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez?

6) La figura muestra una ruleta, que al ser girada cada número tiene la misma posibilidad de ser seleccionado. Se definen los siguientes eventos:



M: Que salga un número impar
N: Que salga un número divisor de 16
R: Que salga un número menor a 4

(a) ¿Cuántos puntos muestrales tiene el evento $M \cup N$?
(b) ¿Cuántos puntos muestrales tiene el evento $R \cap N$?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar o un número menor a 4?
(d) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número divisor de 16 o un número menor a 4?
(e) Considere las siguientes proposiciones.

I. Los eventos M y N son mutuamente excluyentes.
II. Los eventos M y R son mutuamente excluyentes

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

7) En una caja hay tarjetas numeradas del 10 al 30 (es decir 10, 11, …, 28, 29, 30). ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una tarjeta al azar, la suma de los dígitos sea 3 o 4?

8) Se tienen 10 bolas numeradas del 21 al 30, las cuales al extraerlas de una caja, tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas.

Se definen los eventos M y N:

Evento M: La bola extraída tiene un número divisible por 3
Evento N: La bola extraída tiene un número múltiplo de 5

(a) Según la información, considere:

I. M y N son eventos mutuamente excluyentes
II. El complemento de M, con respecto al espacio muestral corresponde a N

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

(b) ¿Cuántos puntos muestrales tiene el evento $M \cup N$?

(c) ¿Cuántos puntos muestrales tiene el evento $M \cap N$?

9) Se hizo un inventario en un colegio al final de año, relacionado con el estado del mobiliario. La información se resume en la tabla

Mueble	**Estado**		**Total**
	Bueno	Malo	
Pupitre	110	40	150
Escritorio	20	8	28
Total	**130**	**48**	**178**

(a) ¿Cuál es aproximadamente la probabilidad de que al escoger al azar un mueble de esa muestra, esté defectuoso?

(b) ¿Cuál es aproximadamente la probabilidad de que al escoger al azar un mueble de esa muestra, sea un pupitre en buen estado?

(c) Si se toma como población total a los muebles en buen estado, y se decide seleccionar al azar un mueble de esa población, entonces, ¿cuál es aproximadamente la probabilidad de que el mueble sea un escritorio?

10) En un grupo de undécimo nivel hay 35 estudiantes. A 15 les gusta el baloncesto, a 24 el futbol y a 9 ambos deportes

(a) Si se escoge al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el futbol?
(b) Si se escoge al azar un estudiante, ¿cuál es aproximadamente la probabilidad de que le guste el futbol o el baloncesto?
(c) Si se escoge al azar un estudiante, ¿cuál es aproximadamente la probabilidad de que no le guste el futbol?
(d) Si se escoge al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que no guste el futbol ni el baloncesto?

Respuestas: Geometría

1.1 **Circunferencia**

2 (a) (7,-1), r = 7 **(b)** (0,1/4), r = 1 **(c)** (0,0), r = $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ **(d)** (6,3), r=2 **(e)** (-7,0), r=5

3. (a) $(x+9)^2+(y-5)^2=36$ **(b)** $(x-7)^2+y^2=16$ **(c)** $x^2+y^2=\frac{1}{9}$

(d) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+4)^2=\frac{29}{4}$ **(e)** $(x-4)^2+(y+1)^2=25$ **4.** $(x-3)^2+y^2=4$

5. $(x-6)^2+(y-4)^2=25$ / $(x-6)^2+(y-4)^2=1$

6. "c": $x^2+y^2=144$ / "e": $(x-4)^2+y^2=16$ / "d" $(x-10)^2+y^2=4$

7. Aproximadamente 36,05 cm

8. (6,5), r = 4

9. (a) Exterior **(b)** Pertenece a la circunf **(c)** Interior **(d)** Exterior **(e)** Pertenece a la circunf **(f)** Exterior **(g)** Pertenece a la circunf **(h)** Interior

10. (a) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ **(b)** $(x+3)^2+(y-2)^2=36$ **(c)** $x^2+y^2=1$

1.2 **Rectas y circunferencias**

1. (a) Tangente en (4,-2) **(b)** Secante en $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ **(c)** Secante en (0,0) y $\left(\frac{-30}{13},\frac{-20}{13}\right)$ **(d)** Exterior **(e)** Tangente en (-4,1) **(f)** Secante en (-1,0) y (3,0) **(g)** Exterior

2. A **3.** B **4.**

1.3 **Rectas paralelas y perpendiculares**

(a) || **(b)** $\perp$ **(c)** || **(d)** $\perp$ **(e)** $\perp$ **(f)** $\perp$ **(g)** ||

Ejercicios de temas adicionales

1.

Dato	m	b	Intersec eje x	Intersec eje y
a)	-7	15	$\left(\frac{15}{7},0\right)$	$(0,-7)$
b)	$\frac{9}{5}$	-1	$\left(\frac{5}{9},0\right)$	$(0,-1)$
c)	0	$\sqrt{2}$	No hay	$\left(0,\sqrt{2}\right)$
d)	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\left(\frac{-4}{5},0\right)$	$\left(0,\frac{4}{9}\right)$
e)	$\frac{3}{4}$	$\frac{-5}{4}$	$\left(\frac{5}{3},0\right)$	$\left(0,\frac{-5}{4}\right)$
f)	-1	-2	$(-2,0)$	$(0,-2)$
g)	2	3	$\left(\frac{-3}{2},0\right)$	$(0,3)$

2. $y=6x$ **3.** $y=\dfrac{8x+11}{5}$ **4.** $y=\dfrac{-5}{3}x+5$ **5.** 6

6. (a) $\boxed{\frac{-9}{2}}\boxed{\frac{-9}{2}}\boxed{\frac{2}{9}}$ (b) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{-1}$ (c) $\boxed{\frac{6}{5}}\boxed{\frac{6}{5}}\boxed{\frac{-5}{6}}$ (d) $\boxed{\frac{1}{9}}\boxed{\frac{1}{9}}\boxed{-9}$ (e) $\boxed{\frac{-4}{3}}\boxed{\frac{-4}{3}}\boxed{\frac{3}{4}}$ **7.** $y=2x-1$

8. $\dfrac{3}{5}$ **9.** $y=\dfrac{-3x-15}{2}$ **10.** $\dfrac{-1}{2}$ **11.** $\dfrac{-7}{12}$ **12.** $y=\dfrac{3}{4}x+8$ **13.** $y=x+1$
14. **(a)** 90° **(b)** 4,43 **15.** **(a)** y = x +2 **(b)** y = 8 – x **(c)** Se verifica que la ecuación de la recta tangente y de la que contiene al radio, son perpendiculares. **16.** 6 cm
17. **(a)** $(x-1)^2+(y-3)^2=6$ **(b)** $(x+7)^2+(y-4)^2=1$ **(c)** $(x-1)^2+(y-6)^2=16$ **(d)** $x^2+(y-8)^2=9$ **(e)** $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{3}\right)^2=4$

1.4 **Polígonos**

1. **(a)** 18cm^2 **(b)** 20,5 cm^2 **(c)** 14cm^2 **(d)** 15cm^2 **(e)** 938 **2.** **(c)** 20,03 cm **(d)** 16,69 cm **(e)** 116, 69 **3.** Área: 44,5. Perímetro: ≈ 26,32 **4.** **(a)** 27,5 **(b)** ≈ 19,75 **(c)** ≈ 6,4
5. **(a)** $\boxed{26{,}5}$ $\boxed{21{,}33}$ **(b)** $\boxed{18{,}5}$ $\boxed{20{,}09}$ **(c)** $\boxed{22{,}5}$ $\boxed{24{,}61}$ **6.** 21,65cm **7.** 450cm **8.** $\sqrt{6}mm$
9. 576 **10.** 14 **11.** 90 **12.** 0,43m^2 **13.** **(a)** 2340° **(b)** 7 **(c)** 60cm **(d)** octógono **(e)** 20 **(f)** $10\sqrt{3}cm$ **(g)** 3,5 cm^2 **14.** 6 dm **15.** 110,11 cm^2 **16.** **(a)** 108dm **(b)** 841, 77 dm^2 **17.** $\sqrt{14}m^2$ **18.** **(a)** 406, 85 mm^2 **(b)** 53,9 cm^2 **(c)** 618,18cm^2 **19.** 2,93cm **20.** 6,2 cm **21.** $25\sqrt{3}cm^2$ **22.** 135° **23.** 18° **24.** 30° **25.** 2160° **26.** 65cm **27.** 38, 13cm^2 **28.** 110cm **29.** 120°

1.5 **Visualización espacial.**

4. 3cm del centro **6.** **(a)** Rectángulo **(b)** 68cm **7.** ≈ 6,34 cm **8.** 11,31cm

2.2 Conjuntos

1. **(a)** $\{x/x\in\mathbb{R},\,-5\le x<2\}$ **(b)** $\left\{x/x\in\mathbb{R},\,\frac{1}{2}\le x\le 100\right\}$ **(c)** $\{x/x\in\mathbb{R},\,x\le 2\pi\}$

(d) $\left\{x/x\in\mathbb{R},\,-7<x<\frac{-5}{2}\right\}$ **(e)** $\left\{x/x\in\mathbb{R},\,x>\frac{7}{6}\right\}$ **(f)** $\{x/x\in\mathbb{R},\,\sqrt{5}\le x\le 3\sqrt{7}\}$

(g) $\{x/x\in\mathbb{R},\,x<6\}$ **(h)** $\left\{x/x\in\mathbb{R},\,x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3. **(b)** $\{x/x\in\mathbb{Q},\,3<x<11\}$ **(c)** $\{x/x\in\mathbb{I}\,,\,x<\sqrt{3}\}$ **(d)** $\{x/x\in\mathbb{R},\,x<0\}$

(e) $\{x/x\in\mathbb{R},\,-9\le x<10\}$ **4.** C **5.** B **6.** C **7.** B **8.** A **9.** B

10.

	$A\cup B$	$A\cap B$	A^C	$\overline{B}$
(a)	$]-\infty,9[$	$[-1,4]$	$]-\infty,-1[\cup[9,+\infty[$	$]4,+\infty[$
(b)	$\{-11,-6,0,3,7\}$	$\{7\}$	$\{-11,-9,3,12\}$	$\{-9,-6,0,12\}$
(c)	$\mathbb{Z}$	ϕ	B	A
(d)	$\mathbb{Z}^+-\{1\}$	$\{2\}$	$\{x\in\mathbb{Z}^+, x \text{ impar}\}$	$\{x\in\mathbb{Z}^+, x \text{ compuesto}\}$
(e)	$]-\infty,3]\cup]10,+\infty[$	ϕ	$]3,+\infty[$	$]-\infty,10]$
(f)	$\{-7,-5,-1,0,4,5,6,7\}$	$\{-5,-1\}$	$\{-6,-4,-3,-2,1,2,3,4,6,7\}$	$\{-7,-6,-4,-3,-2,0,1,2,3,5\}$

11.

(a) $\{-2,1,3,4,5,7,8,9\}$

(b) $\{-2,0,3,4,5,6,7,8,9\}$

(c) $\{-2,0,1,3,4,5,6,7,8,9\}$

(d) $\{-2,3,4,5\}$

(e) $\{-2,3,5,8\}$

(f) $\{-2,3,5\}$

(g) $\{-1,0,1,2,4,6,10\}$

(h) $\{-1,0,1,2,6,7,8,9,10\}$

(i) $\{-1,2,10\}$

2.3 Funciones

1) Dominio $\{-9,-3,2,4,7,15\}$

Codominio $\{-9,-2,-1,2,4,8,10\}$

Ámbito $\{-9,-2,-1,4,8,10\}$

Gráfico $(-9,-1),(-3,10),(2,4),(4,8),$
$(7,-9),(15,-2)$

$f(-9)=-1$

Preimagen de $4=2$

$f(-3)[f(2)-f(7)]=130$

2) Dominio= {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}

Ámbito= $\{L,M,J,V,S,D\}$

Gráfico=
{(Lunes, L), (Martes, M),
(Miércoles, M), (Jueves, J), (Viernes, V),
(Sábado, S) (Domingo, D)}

3) (a) No es función. El 3 no se relaciona.

(b) Sí es función

Ámbito= {0, 25, 81}

Dominio ={0, 5, 9}

Codominio= {0, 5, 25, 81, 100}

Imágenes= 0, 25, 81

Preimágenes=0, 5, 9

Gráfico= {(0,0), (5,25), (9, 81)}

Criterio: $f(x) = x^2$

(c) Sí es función

Ámbito= {8}

Dominio= {1, 2, 3, 4}

Codominio= { -3, 0, 8}

Imágenes= 8

Preimágenes=1, 2, 3, 4

Gráfico={(1,8), (2,8), (3, 8),(4,8)}

Criterio: f(x) = 8

(d) Sí es función

Ámbito= $[6,16[$

Dominio= $[3,8[$

Codominio= $[4,20[$

Imágenes= $y, y\in[6,16[$

Preimágenes = $x, x\in[3,8[$

Gráfico= $\{(x,2x)/\,3\le x<8,\ x\in IR\}$

Criterio: f(x) =2x

4)
(a) *Sí*
(b) *No*
(c) *No*
(d) *Sí*
(e) *No*

5)
(a) *D*
(b) *m*
(c) \$ 513
(d) 459

6)
(a) *C, d*
(b) \$63 240

7)
(a) *L*
(b) *t*
(c) $[12, 40]$
(d) 22
(e) 52,5 *cm*
(f) 10,36 *cm*

8) $\boxed{7{,}2cm}$ $\boxed{29g}$

9)
(a) 740
(b) 750
(c) *G*

10)
(a) $\boxed{\frac{3}{2}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\frac{19}{2}}$

(b) $\boxed{\frac{5}{4}}$ $\boxed{-5\ y\ 7}$ $\boxed{\frac{3}{2}}$

(c) $\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{-14}$

(d) $\boxed{\frac{4}{3}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{10-3a}$

(e) $\boxed{\sqrt[3]{7}}$ $\boxed{\frac{9}{2}}$ $\boxed{-1}$

(f) $\boxed{3m+1}$ $\boxed{3m+1}$

(g) $\boxed{\frac{5}{7}}$ $\boxed{\frac{-1}{4}}$ $\boxed{2}$

(h) $\boxed{368}$ $\boxed{12a^2+59a+72}$ $\boxed{3}$

(i) $\boxed{6}$ $\boxed{6}$ $\boxed{0}$

11) -1

12)
(a) $\{-7,2,0,4,5\}$

(b) $\left\{\sqrt{2},3\sqrt{2},2,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{3}\right\}$

(c) $3\sqrt{2}$

(d) $\frac{1}{2}$

13) $\{21,\ 117,\ 221\}$

14) $]-3,2]$

15) 1

16) -1

17) 2

18) $\left]\frac{-27}{5},\frac{-19}{3}\right]$

19) $\left]\sqrt[3]{\frac{3}{5}},\sqrt[3]{\frac{19}{15}}\right]$

20) $A(a)=3a^2$

21) $P(d)=2\sqrt{2}d$

21) (a) *Sí* (b) *No* (c) *No*
(d) *Sí* (e) *No* (f) *Sí*

2.4 Gráficas

5)

(a)

Dominio $[-2,+\infty[$

Ámbito $]-\infty,2]$

f $\nearrow$ $]1,2[$

f $\searrow$ $]2,+\infty[$

f constante $]-2,1[$

f(x)>0 $[-2,3[$

f(x)<0 $]3,+\infty[$

Preimagen de 0=3

Imagen de $\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

f(-1)+f(2) = 3

Imagen de 0 =1

(b)

Dominio *IR*

Ámbito *IR*

f $\nearrow$ $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ *y* $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

f $\searrow$ $\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$

f(x)>0 $]0,1[\,,\,]2,+\infty[$

f(x)<0 $]-\infty,0[\,,\,]1,2[$

Preimagen de 0= 0, 1 *y* 2

f(0)= 0

(c)

Dominio *IR*

Ámbito *IR*

f $\nearrow$ $]-1,1[$

f $\searrow$ $]-\infty,-1[$ y $]1,+\infty[$

f(x)>0 $]-\infty,-2[\,,\,]0,2[$

f(x)<0 $]-2,0[\,,\,]2,+\infty[$

Preimagen de 0= 0, -2 *y* 2

Imagen de 2= 0

Preimagen de -1 =-1

(*d*)

Dominio: IR

Ámbito: $]-\infty,2[\cup\{5\}$

f estric $\nearrow$ $]-\infty,1[$

f(x)>0 $\left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$

f(x)<0 $\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right[$

Preimagen de 0= $-1/2$

Imagen de 1= 5

f(2π)=5

(e)

Dominio *IR*

Ámbito $[-3,2]$

f $\nearrow$ $]-1,1[$

f constante $]-\infty,-1[$ y $]1,+\infty[$

f(x)<0 $]-\infty,0[$

f(x)>0 $]0,+\infty[$

Preimagen de 0= 0

Imagen de $\frac{17}{2}=2$

f(5)-f(-7)=5

(f)

Dominio $]-\infty,0]$

Ámbito $]-\infty,1]$

f $\nearrow$ $]-\infty,1[$

f constante $]-1,0[$

f(x)<0 $]-\infty,-2[$

f(x)>0 $]-2,0]$

Preimagen de 0= -2

Imagen de -1= 1

f(0)=1

(g)

Dominio *IR*

Ámbito *IR*

f $\nearrow$ $]-\infty,-2[$ *y* $]0,+\infty[$

f constante $]-2,0[$

f(x)<0 $]-\infty,-3[$

f(x)>0 $]-3,+\infty[$

Preimagen de 0= -3

Imagen de 2=3

f(-0,5)=2

(h)

Dominio $]-2,+\infty[-\{2\}$

Ámbito $[1,4[$

f estric $]-2,2[$

f constante $]2,+\infty[$

f(x)>0 $]-2,+\infty[-\{2\}$

Imagen de 2=*no hay*

f(7)=1

(i)

Dominio $[-2,2]-\{1\}$

Ámbito $[-1,2]$

f $\nearrow$ $]-2,-1[$ *y* $]0,1[$

f $\searrow$ $]-1,0[$

f constante $]1,2[$

Preimagen de 1= -1

Preimagen de 2: $x\in\,]1,2]$

f(7)= *no hay*

(j)

Dominio $[-2,4]-\{2\}$

Ámbito $[-1,3]$

f $\nearrow$ $]0,2[$

f $\searrow$ $]-2,0[$ *y* $]2,4[$

f(x)<0 $]-1,1[\,,\,]3,4]$

f(x)>0 $[-2,-1[\,,\,]1,3[-\{2\}$

Imagen de 1= 0

Preimagen de 3: -2

f(4)=-1

(k) Dominio $\{-2,-1,4,5\}$

Ámbito $\{-1,0,5,6\}$

Imagen de 5=6

(l)

Dominio $[0,5]$

Ámbito $[0,4]$

f $\searrow$ $]0,5[$

$f(x)>0$ $[0,5[$

Imagen de 0=4

Preimagen de 0=5

2.5 Composición de funciones

1.

	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$	$(f \circ g)(-3)$	$(g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right)$
a	$5x-1$	$5x-19$	-16	$-\frac{33}{2}$
b	$\sqrt{x^2+5}$	$x+5$	$\sqrt{14}$	$\frac{11}{2}$
c	$x+2$	$\frac{3x}{3+2x}$	-1	$\frac{3}{8}$
d	x	x	-3	$\frac{1}{2}$
e	$-12x+9x^2$	$-12x-3x^2$	117	$\frac{-27}{4}$
f	$9x+20$	$9x+20$	-7	$\frac{49}{2}$

2. $\boxed{\frac{-x^2}{2}+8}$ $\boxed{\frac{4x^2-24x+35}{2}}$ $\boxed{-x^2+7}$

3. $\boxed{x+10}$ $\boxed{x}$

4. $g \circ f: \{1,2,3,4\} \to \{-1,2,7,14\}$

$(g \circ f)(x) = x^2 - 2$

2.6 Función lineal

m	b	Intersec eje x	Intersec eje y	Monotonía
-7	15	$\left(\frac{15}{7},0\right)$	$(0,-7)$	decrec
$\frac{9}{5}$	-1	$\left(\frac{5}{9},0\right)$	$(0,-1)$	crec
0	$\sqrt{2}$	No hay	$(0,\sqrt{2})$	const
$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\left(\frac{-4}{5},0\right)$	$\left(0,\frac{4}{9}\right)$	crec
$\frac{3}{4}$	$\frac{-5}{4}$	$\left(\frac{5}{3},0\right)$	$\left(0,\frac{-5}{4}\right)$	crec
-1	-2	$(-2,0)$	$(0,-2)$	decrec
1	-2	$(2,0)$	$(0,-2)$	crec

2) $y = 6x$ 3) $y = \frac{7x+51}{8}$ 4) $\left(\frac{-11}{8},0\right)$ 5) $y = 7x+9$

6) $y = \frac{-5}{3}x+5$ 7) $k > \frac{-5}{2}$ 8) $k = \frac{4}{3}$ 9) $\frac{10}{3}$

10) $400\,000$ 11) -1 12) 6 13) $(-1,0)$ 14) *Decreciente*

15) $\frac{-10}{3}$ 16) $\frac{-11}{5}$ 17) $\frac{-15}{3}$ 18) (*a*)1410 (*b*)11

19) (*a*) $y = \frac{-35\,000}{3}x + 70\,000$ (*b*) $11\,666{,}66$ 20) 1824

(5) (a) 1245 (b) 11

(6) (a)V(x) = 25 000000 + 500 000x (b) V (c)28 000000 (d) x

(7) (a) A: C(x) = 75 000 + 2000x B: C(x) = 5000x C: C(x) = 40 000 + 3000x

(b) B (c) C (d) 25h (e) 36

(8) (a) C(x) = 500x + 20 000 (b) ₡45 000 (c) 75 (9) (a) C(x) = 15 300x + 25 650 (b) 23

(10)

C	1	2	3	4	5	6
m	7	9	11	13	15	17

(11)

m	2	4	6	8
D	8	14	20	26

(12) (a) I(g) = 625 + 100g I: ingreso g: goles

(b)

g	0	1	2	3	4	5
I	625	725	825	925	1025	1125

(13) S(h) = 425 000 + 15000h

2.7 Función Cuadrática

2) $]-\infty,-3]$ 3) $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ 4) $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$ 5) $]2,5[$ 6) $\boxed{]-\infty,8]}$ $\boxed{]-\infty,-9]}$

7) $\boxed{46,87}$ $\boxed{25}$ $\boxed{[0,25]}$ 8) $\boxed{400}$ $\boxed{1900000}$ 9) 1450 10) 76800

11) 607 500 12) $]-\infty,1]$ 13) $[0,+\infty[$

2.8 Sistemas de ecuaciones

1.

$(a)\ \{(6,0)\}$ $(b)\ \left\{\left(\frac{8}{13},\frac{-2}{13}\right)\right\}$ $(c)\ \left\{\left(-12,\frac{-9}{2}\right)\right\}$ $(d)\ \left\{\left(\frac{3}{7},\frac{-15}{7}\right)\right\}$ $(e)\ \{(24,60)\}$

$(f)\ \{(-1,1)\}$ $(g)\ \phi$ $(h)\ \{(x,y)\in IR^2 / x=-2y+1\}$ $(i)\ \left\{\left(\frac{-39}{10},\frac{1}{10}\right)\right\}$

2.

(a) 68 y 24 (b) 9 (c) $\frac{3}{4}$ (d) 33 y 17 (e) 100 y 20 (f) 475 y 125

(g) 8, 3000 (h) 4 y 3 (i) 35 y 15

3. **(a)** Incompatible **(b)** independiente **(c)** dependiente **(d)** dependiente **(e)** independiente **(f)** incompatible

4. (a) (1,3) **(b)** $\left(\frac{-2}{11},\frac{-4}{11}\right)$ **(c)** $\left(\frac{6}{13},\frac{9}{13}\right)$ **(d)** $\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$ **5.** 500 **6.** 25 **7.** ₡4 cada mensaje y ₡40 el minuto de llamada. **8.** 5 años

Respuestas: Estadística y Probabilidad

3.1 Gráficos y tablas

1. (a) por ser cronológica (b) 1994 y 1998 (c) 1958 y 1962 (d) 1986 a 1994 (e) 10% (f) 1970 (g) 1 656 575 **2.** (a) 1992 (b) 1,0605 (c) 1990 (d) 51%

3. (a) 2004 y 2005 (b) De 1998 a 2003 (c) 2003, 2005 y 2007 (d) 25 000
4. (a) Una misma persona ingresó a más de una red social (b) 2,47% (c) 52, 08% (d) no **5.**Opción B **6.** Opción A **7.** (b) 2011

3.2 Medidas de posición

1. (a) 15 (b) 28,81 (c) 65 (d) 10 (e) 19 **2.** (a)35 (b)47.11 (c)78 (d)29 (e) 45 **3.** 2 **4.** 81,33 **5.** (a) 17 (b) 18,75 (c)26 (d) 8 (e) 17 **6.** 68 **7** 8,94**. 8.** (a) 15 (b) 20 (c) 32 (d) 12 **9.** C **10.** 79 **11.** B **12.** (a) 5 (b) 3,03 **13.** (a) A (b) C
14 (a) 7 7,2 7 (b) no hay 8,42 11 (c) 22 21,4 22 **18. (a)** Media 66 Mediana 74 **(b)** asimetría negativa **19. (a)** Media 229,58 Mediana: 92,5 **(b)** Asimetría positiva

3.3 Probabilidad

1. 12/36= 1/3 **2.** (a) 24/35 (b) 15/35=3/7 (c) 30/35 = 6/7 (d) 9/35 (e) 5/35= 1/7 (f) 20/35= 4/7 **3** (a) 13/20 = 0,65 (b) 4/ 20 = 0,2 (c) 16/ 20 = 0,8
4. (a) 100/196 = 25/49 (b) 72/196= 18/49 (c) 56/196 = 2/7 **5.** (a) 0,1 (b) 0,4
6. (a) 205/ 555 (b) 370/555 (c) 135/555 (d) 300/ 555 **7.** (a) 41/ 77 (b) 13/77