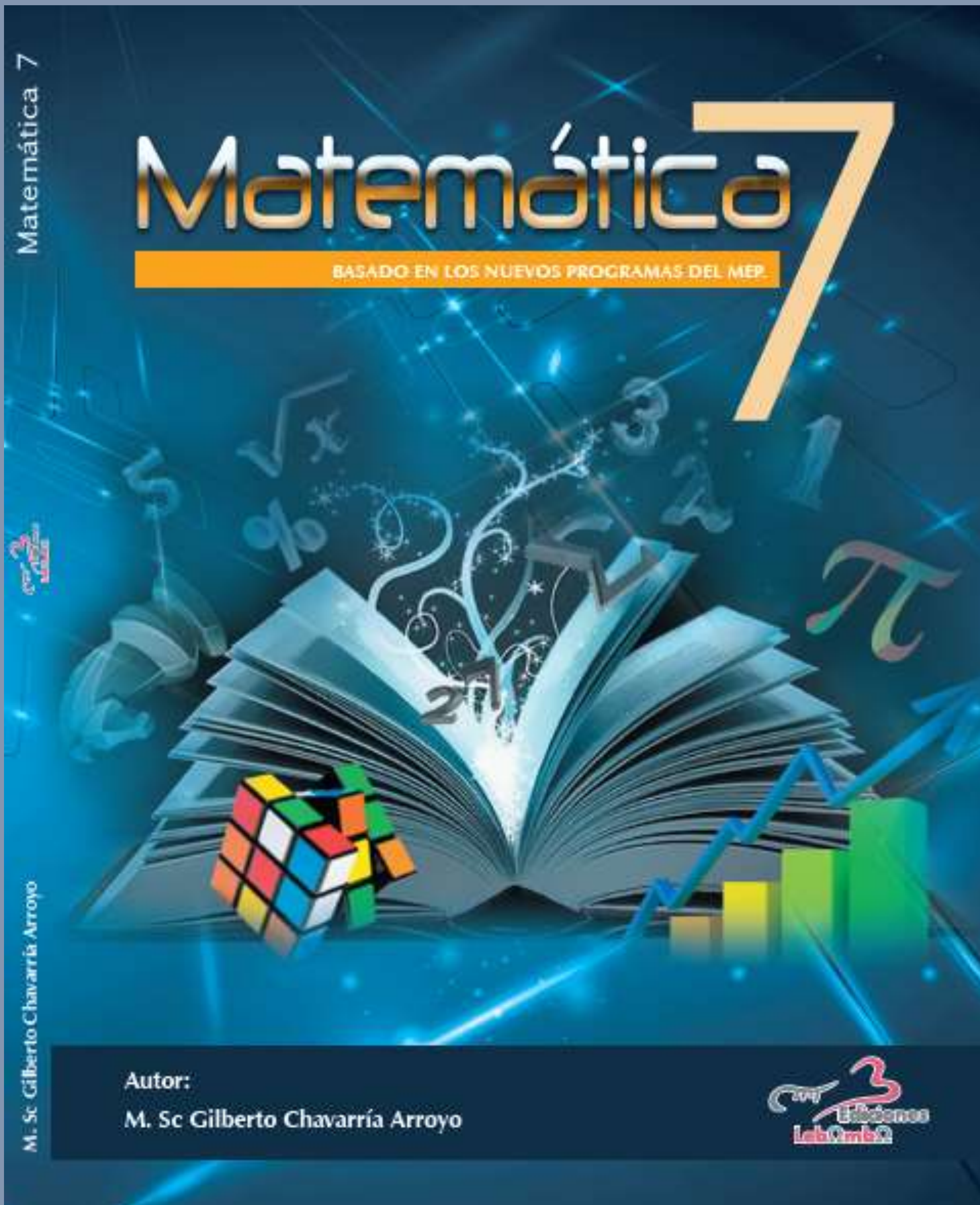

Matemática 7
BASADO EN LOS NUEVOS PROGRAMAS DEL MEP.
Autor:
M. Sc Gilberto Chavarría Arroyo
Ediciones
Matemática 7
M. Sc Gilberto Chavarría Arroyo

Tabla de contenidos

NÚMEROS

Conocimiento: Potencias

Escenario de aprendizaje

Cuenta la historia que el inventor del ajedrez, lo creó para su rey, como una estrategia de guerra. El rey agradecido le indica que pida lo que quiera y se lo concederá, a lo que el inventor solicita: -Quiero un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta… y así sucesivamente hasta llegar a la casilla sesenta y cuatro. El rey no entendió el motivo de tal petición y creyó que bastaría un puñado de trigo para satisfacer ese deseo. ¿Será eso cierto?

¿Cuántos granos de trigo tendrá la casilla 10 del tablero?

¿Cómo puedo expresar la cantidad de granos que habrá en la casilla 64?

La potenciación es una forma abreviada de escribir un producto formado por factores iguales.

Por ejemplo, si se desea multiplicar cuatro veces por sí mismo el cinco, se resuelve:

$$5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 5^4 = 625$$

La **base** de una potencia es el número que se multiplica por sí mismo, y el **exponente**, la cantidad de veces que se hace ese producto. En el ejemplo, el 5 es la base y el cuatro el exponente.

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}}$$

$$7^3 = 7\cdot 7\cdot 7 = 343$$

$$6^4 = 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 1296$$

$$1^5 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$0^7 = 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0 = 0$$

La expresión **a^n** se lee **"a" a la enésima potencia**

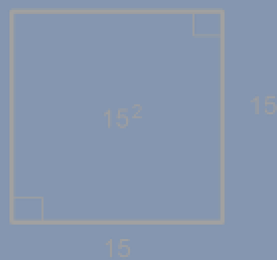
En el ejemplo del ajedrez se logran extraer dos resultados muy importantes:

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2$$

Esto se puede generalizar de la siguiente manera:

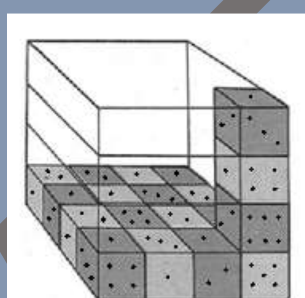
$$\boxed{\begin{array}{c} a^0 = 1,\ a \neq 0 \\ a^1 = a \end{array}}$$

- Cuando usamos potencias con exponente dos, las mencionamos como **"base al cuadrado",** esto porque se originan del cálculo del área de un cuadrado.



En este ejemplo 15^2 se lee: *quince al cuadrado.*

- La expresión a^3 se lee **"a" al cubo,** porque proviene del cálculo del volumen de un cubo de arista "a"



Tal como se logró verificar anteriormente, en la suma y resta, la igualdad **no** se cumple, sin embargo, en la multiplicación y división **sí.**

Estas propiedades de las potencias se resumen así:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \\ (a \div b)^n = a^n \div b^n\end{array}}$$

Ejercicio contextualizado

Un edificio tiene 10 pisos, en cada uno hay 10 habitaciones y en cada habitación hay 10 pinturas típicas. ¿Cuántas pinturas típicas hay en el edificio?

Resuelva cada operación e indique si se cumple la igualdad

$(3 \cdot 5)^2$ $\square$ $3^2 \cdot 5^2$

$(3 + 5)^3$ $\square$ $3^3 + 5^3$

$(12 \div 6)^2$ $\square$ $12^2 \div 6^2$

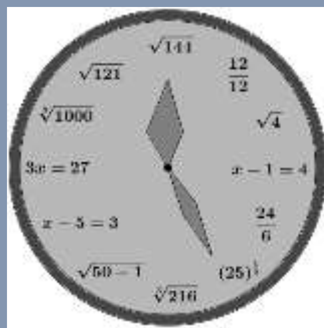
$(5 - 2)^4$ $\square$ $5^4 - 2^4$

Reto de lógica:

Una determinada especie de amebas se reproduce dividiéndose en dos cada día. Es decir, si hoy tenemos una ameba, mañana tendremos dos, pasado mañana cuatro, y así sucesivamente. Si se inicia con una ameba, se tarda 30 días en llenar una cierta superficie con amebas. ¿Cuánto se tarda en cubrir la misma superficie si se inicia con dos amebas?

Tiempo para practicar 1.1

Habilidad: Calcular las expresiones numéricas aplicando el concepto de potencia y la notación exponencial.



1. Obtenga el resultado de:

(a) 8^3 _____ (b) 13^2 _____

(c) 10^5 _____ (d) 3^7 _____

(e) 1^{100} _____ (f) 3^{2+3} _____

2. Exprese en potencias cada multiplicación.

(a) $18 \cdot 18 \cdot 18$ _____

(b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ _____

(c) $11 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11$ _____

(d) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ _____

3. Resuelva las siguientes operaciones.

(a) $4^2 - 2^3 + 1^3$ (b) $(8-2)^3 - (1+5)^2$

(c) $7^0 + 14^2 + 10^1 + 2^5$ (d) $(3 \cdot 2)^3 - (8 \div 4)^5$

(e) $5^3 - 6^2 - 4^2 + 8^2$ (f) $(15 \cdot 7)^0 + (15-9)^2$

4. Siete estudiantes de sétimo nivel tienen siete cajas, en cada caja, tienen siete bolsas, en cada bolsa, tienen siete estuches y en cada estuche, tienen siete lápices. ¿Cuántos lápices hay en total? Expresa la operación en forma de potencia.

5. El salón de actos de un centro escolar tiene forma cuadrada. Si su lado mide 140 decímetros, y cada azulejo del piso, que también es cuadrado, mide 7dm ¿cuántos azulejos hay el salón?

6. La cara de un cubo de madera tiene 32 cm de perímetro. Exprese el volumen del cubo en forma de potencia y calcule el resultado.

7. La explanada de un colegio tiene forma cuadrada y mide 20 metros de lado. Calcula el número de personas que pueden ir a escuchar una charla sobre el cuidado del medio ambiente, si en cada metro cuadrado caben 4 personas.

8. Los terrenos de dos milpas miden 3^8 y 3^4 metros cuadrados, respectivamente. Pancracio duda si el área de la primera milpa es el doble de la segunda o no. ¿Lo es? De no ser doble, ¿cuántas veces es mayor la primera que la segunda?

Resuelva las operaciones, y complete el cuadro mágico.

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)
(g)	(h)	(i)

(a) $2^3 - 3^1$
(b) $3^3 - 5^1$
(c) $2 + 4^2$
(d) $4^3 - 6^2$
(e) $4^2 - 5^0$
(f) $2^3 - 2^2 - 2$
(g) $6^2 \div 3$
(h) 2^3
(i) 5^2

Conocimiento: Operaciones combinadas

Escenario de aprendizaje

Con tan solo cuatro cuatros y las operaciones básicas, es posible obtener diversos números. Por ejemplo, el número 15 puede ser expresado como

$$15 = 4 \cdot 4 - 4 \div 4$$

Pero para ello, es necesario conocer la prioridad de operaciones que fue aprendida en la escuela, en este caso, resolver primero la multiplicación y división, para luego operar la resta.

Ahora, es su turno para obtener los números del uno al diez, con cuatro cuatros y las operaciones básicas necesarias en cada caso.

1 = _______ 2 = _______

3 = _______ 4 = _______

5 = _______ 6 = _______

7 = _______ 8 = _______

9 = _______ 10 = _______

Al obtener cada número, es importante observar cómo puede cambiar un resultado, dependiendo del orden de prioridad de las operaciones y del uso del paréntesis.

Por ejemplo, las dos operaciones que aparecen a continuación, dan resultados diferentes:

$(a)\ \ 4 - 4 \div 4 + 4 \qquad (b)\ \ (4-4) \div 4 + 4$

Veamos

$(a)\ \ 4 - 4 \div 4 + 4$	$(b)\ \ \underbrace{(4-4)} \div 4 + 4$
$= \underbrace{4 - 1} + 4$	$= \underbrace{0 \div 4} + 4$
$= \underbrace{3 + 4}$	$= \underbrace{0 + 4}$
$= 7$	$= 4$

Recordemos el orden para resolver operaciones:

- Paréntesis.
- Potencias.
- Multiplicación y división, según el orden en que aparezca.
- Suma y resta.

Ejercicios para ser desarrollados con el docente

Resuelva cada una de las siguientes operaciones.

$(a)\ 15 - 7 \cdot 2 + 3^0 \qquad (b)\ (18-5) \div (11+2) + 3$

_______________ _______________

_______________ _______________

_______________ _______________

_______________ _______________

$(c)\quad 3[4-8\div 4+8]$ $\qquad (d)\quad 12+15\div 3-2\bullet 4$

$(e)\quad 16-10\div 5+3^3\bullet 2$ $\qquad (f)\quad 2^4(17-5\bullet 2)\div 4$

$(g)\quad 45\div\left(4\bullet 4-6^0\right)-2+(9-2\bullet 4)$

(h) En el 2012, Costa Rica entrenó la nueva familia de billetes, de 1 000, 2 000, 5 000, 10 000, 20 000 y 50 000 colones. Rómulo cuenta con ₡703 000 con diversas denominaciones. Tiene 15 billetes de ₡ 20 000, 7 de ₡ 1 000, 6 de ₡ 50 000, 8 de ₡5 000, 2 de ₡10 000 y otra cantidad de billetes de ₡2 000.

¿Cuántos billetes de ₡ 2 000 tiene Rómulo?

Símbolo para la multiplicación

En la educación primaria, era común, para representar una multiplicación, usar el símbolo X, pero este puede ser confundido con la letra equis que se usa generalmente como incógnita en el ámbito matemático. En sustitución, se usa un punto • tal como ya se ha utilizado en ejemplos anteriores. Además, si en entre un número y un paréntesis no se indica ningún símbolo, se sobreentiende que existe una multiplicación.

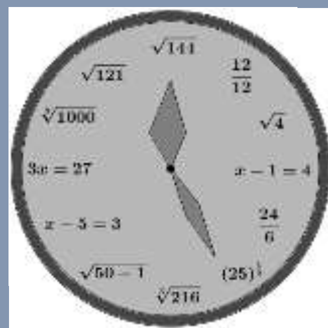
El símbolo más usado para multiplicación era la de la cruz de San Andrés (el aspa). Sin embargo el matemático Leibniz (1698) no era partidario de usar ese símbolo. Incluso en una carta le escribe a Johann Bernoulli: *"no me gusta como símbolo para la multiplicación, pues se confunde demasiado fácilmente con la x, a menudo relaciono dos cantidades con un punto interpuesto, e indico la multiplicación mediante ZC•LM"*

Reto de lógica:

Si una camisa tarda en secarse 15 minutos. ¿Cuánto tardarán en secarse 3 camisas, bajo las mismas condiciones?

Tiempo para practicar 1.2

Habilidad: Aplicar la prioridad de las operaciones en expresiones que presenten combinación de operaciones con paréntesis o sin ellos.



1. Resuelva las siguientes operaciones.

(*a*) $15-7\div 6^0+4\cdot 8^2$

(*b*) $18+343\div 7^2-9+2\cdot 3$

(*c*) $21\div 3\cdot 5+4\cdot 5\div 2^2$

(*d*) $(5+6\cdot 7)-(9^2-70)+3(7+3)$

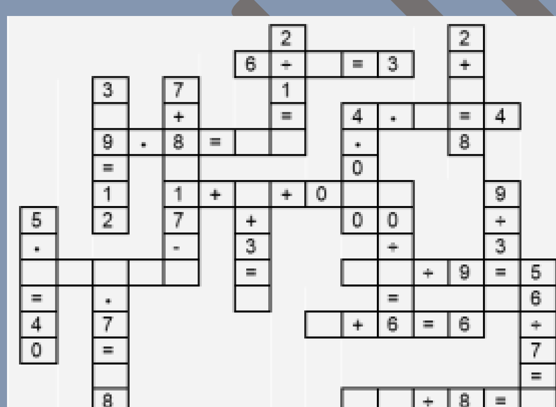
(*e*) $30-4(2^3-1)+(12+8)\div 5$

(*f*) $7+3^2(24\div 6-1)-2(5^1-2\cdot 2)$

(*g*) $2^4(10-6)\div(5\cdot 0+2\cdot 2)+9$

(*h*) $(6^2-7\cdot 5)(13\cdot 14-13^2)5^2$

2. Complete siguiente crucigrama



3. Emiliano compra verduras al por mayor para revenderlas. En esta ocasión compró 32 kg de zanahoria a ₡250 el kilogramo, y las vendió a ₡300 el kilogramo. Sin embargo, durante el traslado de las verduras, perdió 3 kg. Represente la cantidad de dinero que ha ganado mediante una operación combinada y obtenga el resultado.

4. Un comerciante ha comprado cierta cantidad de camisetas con el dicho "Pura Vida Costa Rica" en ₡43 200 y las vende en ₡52 800. En esa venta, se gana ₡400 por cada camiseta. Represente, mediante una operación combinada, la cantidad de camisetas que el comerciante compró, y obtenga el resultado.

5. El tren que comunica Heredia con San José lleva 5 vagones de pasajeros. En el primero van 16 personas, en el segundo, van 8 viajeros más que en el primero, en el tercero van 7, el cuarto lleva el doble de pasajeros que el primero y en el quinto vagón, llevan la mitad de pasajeros que el segundo. Represente la cantidad de pasajeros que lleva el tren, mediante una operación combinada y obtenga el resultado.

6. La tarifa para ingresar a un museo es de ₡ 2 400 por adulto y ₡1 550 para los niños. Don Aproniano, un señor que vive en Guanacaste, lleva a sus tres sobrinos (a quienes les cobran como niños) a dicho museo, y paga con un billete de ₡10 000. ¿Cuánto vuelto recibe don Marco?

7. Un automóvil recorre 36 kilómetros por cada galón de combustible. Si el tanque de ese automóvil tiene 12 galones, ¿Cuántos kilómetros puede recorrer sin reabastecerse?

Reto de lógica:

¿Cuántas cifras tiene el Número $2^{15}\cdot 5^{17}$?

Conocimiento: Algoritmo de la división

Escenario de aprendizaje

Para un viaje al Monumento Guayabo, los estudiantes de un centro educativo disponen de autobuses con capacidad para 62 pasajeros. Si asistirán 450 estudiantes: (a) ¿Cuántos autobuses se necesitarán?

(b) ¿Cuánto pasajeros van en el autobús que va más desocupado, si todos los demás llevan 62 pasajeros?

(a)

(b)

Algoritmo de la división

Recordemos las partes de una división.

Dividendo	Divisor
450	62
− 434	7 → Cociente
16 residuo	

Esta división nos indica que se necesitan 7 autobuses de 62 personas y sobran 16 espacios. Simbólicamente:

$$450 = 62 \bullet 7 + 16$$

Esta expresión representa el algoritmo de la división, el cual indica que dados dos números "a" y "b", existen "c" y "r", r < b tal que:

$$\boxed{a = b \bullet c + r, \quad r < b}$$

Ejercicios para ser desarrollados con el docente

⌗ Exprese 27 ÷ 4, mediante el algoritmo de la división

⌗ Exprese 450 ÷ 15, mediante el algoritmo de la división

⌗ Para la fiesta de fin de año de la sección 7-B, se compró 215 caramelos, los cuales serán repartidos de manera igualitaria entre los 30 estudiantes. ¿Cuántos caramelos le corresponden a cada uno como máximo? ¿Cuántos caramelos sobran en la repartición?

Conocimiento: Divisibilidad

Escenario de aprendizaje

Materiales:

- *Cuerda (o similar) de 36 cm*
- *Tijeras*
- *Regla*

Corte en partes iguales la cuerda de 36cm.

Analice las diversas posibilidades para hacer los cortes.

Comparta con el grupo

Como se pudo apreciar en la discusión y reflexión de grupo, hay diversas maneras de cortar la cuerda que mide 36cm, de modo que cada parte tenga la misma medida.

Para ello basta con efectuar una división donde el dividendo es 36 y el residuo 0.

Las posibilidades son:

- __2__ piezas de 18cm
- _____ piezas de 12 cm
- _____ piezas de 9 cm
- _____ piezas de 6 cm
- _____ piezas de 4 cm
- _____ piezas de 3 cm
- _____ piezas de 2 cm

Cada uno de esos valores que dividen a 36, reciben el nombre de **divisores.**

Un factor o divisor de un número natural n, es un número, también natural, menor o igual que n que lo divide (residuo cero)

Ejemplos

- Los factores de 42 son 1, 2, 3, 6, 7, 14 y 21.
- Los factores de 200 son 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100
- Los divisores de 36 son 1, 2 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Divisibilidad

Se dice que un número "*a*" es divisible por otro "*b*" si existe un tercer número natural "*c*" tal que $a = b \cdot c$

De esta definición se concluye que "*a*" es divisible por "*b*", si al dividir "*a*" entre "*b*", el residuo es cero. En este caso, se indica que: "*b*" divide a "*a*".

Retomando el escenario de aprendizaje, deducimos, por ejemplo que 36 es divisible por 9, ya que $36 = 4 \cdot 9$. Esto equivale al algoritmo de la división, pues si dividimos 36 entre 9, el residuo es cero

36	9
0	4

Ahora bien, 36 no es divisible por 5. Veamos:

36	5
1	7

Si este resultado se expresa mediante el algoritmo de la división se tiene: $36 = 5 \cdot 7 + 1$

Criterios de divisibilidad

Existen algunas reglas que permiten conocer si un número es divisible por otro, sin necesidad de efectuar toda la división, lo cual agiliza la resolución de problemas cotidianos. A estas reglas se les llama criterios de divisibilidad.

Divisibilidad por 2 (pares) Un número es divisible por 2, si termina en un dígito par, es decir, si termina en 0, 2, 4, 6, 8.

Ejemplos:

- 56 827 no es divisible por 2, pues no termina en cifra par.
- 36 es divisible por 2, ya que termina en una cifra par.

Divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3, si al sumar sus dígitos, el número que resulta es divisible por 3.

Ejemplos

- 57 921 es divisible por 3, ya que la suma de sus cifras es 5 + 7 + 9 + 2 + 1 = 24, el cual es divisible por 3 $(24 = 8 \cdot 3)$
- 35 no es divisible por 3, pues si se suman los dígitos 3 + 5 = 8, resulta un número que no es divisible por 3.

Divisibilidad por 4: Un número es divisible por 4, si el número formado por sus dos últimos dígitos es divisible por 4.

Ejemplos

- El número 4 345 328 es divisible por 4, ya que 28 es divisible por 4.
- El número 765 334 no es divisible por 4, ya que el número 34 no es divisible por 4.

Divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5 cuando su último dígito es 5 o 0.

Ejemplos

- 379 875 es divisible por 5, así como 76 290
- 5 551 no es divisible por 5.

Divisibilidad por 6: Un número es divisible por 6, si es a la vez, divisible por 2
y por 3.

Ejemplos

- 2 724 es par y la suma de sus dígitos es 15, por lo cual es divisible por 3. Se concluye entonces que es divisible por 6.
- 356 no es divisible por 6, ya que es divisible por 2, pero no es divisible por 3.

Divisibilidad por 7: Para verificar si un número es divisible por 7, se toma el último dígito y se multiplica por dos. Luego al número formado por los dígitos sobrantes se le resta ese resultado. Esa cantidad deber ser divisible por 7

Ejemplo

- 4 606 es divisible por 7, ya que al tomar su último dígito (6) y duplicarlo, se obtiene 12. Luego, a 460 se le resta 12 y resulta 448. Como no se sabe si 448 es divisible por 7, se repite el proceso:

$$448 \to 8 \cdot 2 = 16 \to 44 - 16 = 28$$

.

Ahora, es fácil reconocer que 28 es divisible por 7, por tanto, 4 606 también lo es.

Divisibilidad por 9: Un número es divisible por 9, si al sumar sus dígitos, el número que resulta es divisible por 9.

Ejemplo

- 33 282 es divisible por 9, ya que la suma de sus cifras es 3+3+2+8+2 = 18

Divisibilidad por 10: Un número es divisible por 10 cuando su último dígito es 0.

Ejemplo

- 259 970 es divisible por 10.

Conocimiento: Múltiplos

Escenario de aprendizaje

Juegue con un compañero. Cada uno elija un número entre 60 y 100. Al número escogido resten 8 todas las veces que sea necesario. Gana si llegan justo al 0.
Si no hay ganador, seguir intentando

¿Qué condición debe tener el número escogido, con respecto al 8 para que pueda ganar el juego?

____

____

____

Múltiplo de un número

Un múltiplo de *"n"* es aquel número natural que resultan de multiplicar "*n*" por otro número natural.

En otras palabras, un múltiplo de *n* es un número tal que, dividido por *n*, su residuo es cero.

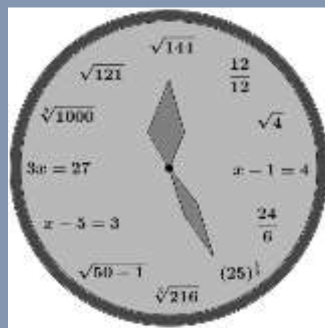
De este modo, el 120 es múltiplo de 8, ya que $120 = 8 \cdot 15$, o bien, $120 \div 8 = 15$

Ejemplos:

- Algunos múltiplos del 15 son: 15, 30, 45, 90, 150
- 56, 483, 6 902, 21 y 343 son múltiplos de 7

Tiempo para practicar 1.3

Habilidad: Aplicar el algoritmo de la división en la resolución de problemas.



1. Encuentre q y r en el algoritmo de la división $a = b \bullet q + r$, donde $0 \leq r < b$.

   (a) a = 20 b = 3
   (b) a = 87 b= 5
   (c) a = 84 b= 7
   (d) a = 63 b= 4

2. A un colegio le donan 170 pupitres. La directora desea equipar la mayor cantidad de aulas, de modo que todas queden con 28 pupitres.
   (a) ¿Cuántas aulas podrá equipar?
   (b) ¿Cuántos pupitres sobrarán?

3. Se tiene 524 litros de agua que deben ser almacenados en envases con una capacidad de 13 litros cada uno. ¿Cuántos envases se necesitan y cuántos litros quedarían sin ser envasados?

4. Para una fiesta de fin de año, la sección 7C dispone de ₡184 025. Si en el grupo hay 32 estudiantes, ¿con cuánto dinero cuenta cada estudiante? ¿cuánto dinero sobra?

5. En un ascensor, el número máximo de personas permitido es 12. Tres grupos de sétimo nivel necesitan subir por dicho ascensor para llegar a tiempo a una conferencia sobre Calentamiento Global. Los grupos de sétimo son de 32, 30 y 33 estudiantes. Se desea llegar lo más rápido posible a la conferencia. ¿Cuál es la mínima cantidad de veces que se debe usar el ascensor (en una sola dirección)?

6. Sabiendo que 12 • 5 = 60, determine los resultados de los siguientes cálculos, sin hacer la cuenta y usando el resultado que se da como información.
   (a) 24 • 5 = ________
   (b) 12 • 15 = ________
   (c) 12 • 50 = ________
   (d) 60 ÷ 5 = ________
   (e) 60 ÷ 12 = ________
   (f) 600 ÷ 12 = ________

7. En una recta numérica si se está en el número 857 y da saltos de 5 en 5 hacia atrás, ¿cuál es el último número mayor que 0 al que llega?

Habilidad: Aplicar los conceptos de divisibilidad, divisor, factor y múltiplo de un número natural en la resolución de problemas en diferentes contextos

8. Complete el cuadro de modo que indique si el número es divisible por 2, 3, 4 5, 6, 7, 9, 10. Puede guiarse con el ejemplo.

Divisibilidad / Número	2	3	4	5	6	7	9	10
1 323		√				√	√	
450								
210								
216								
121								
1 715								
2 835								

9. Determine los valores de “a” para los cuales, el número 37a825 es divisible por 3.

10. ¿Cuántos números divisibles por 5 hay entre 1 y 99?

11. Sea “m” un número natural. ¿Existe un número que sea múltiplo y divisor de “m” simultáneamente? Justifique

12. Utilice los criterios de divisibilidad para verificar que
(a) 4 305 es divisible por 35.
(b) 3 240 es divisible por 60.
(c) 945 es divisible por 45.

13. Un número par es aquel número natural divisible por 2, de no serlo, es impar.
(a) ¿La suma de dos números pares es par o impar? Justifique
(b) ¿Si se suma un número par con otro impar, el resultado es par o impar? Justifique
(c) ¿Al multiplicar un número impar con otro impar, el resultado es par o impar? Justifique
(d) Si en una potencia, la base es par y el exponente impar, ¿cómo será el resultado, par o impar?

14. Sin hacer cálculos, y sabiendo que 96 = 12 • 8, analice cada proposición, con el fin de indicar si es verdadera o falsa.

- ☐ 96 es múltiplo de 12.
- ☐ 96 es múltiplo de 8.
- ☐ El cociente al resolver 96 ÷ 12 es 0.
- ☐ El cociente al resolver 96 ÷ 8 es 12.
- ☐ Como 96 = 12 • 8, y 8 = 2 • 4, entonces, 96 es múltiplo de 4.
- ☐ Todos los múltiplos de 8 son múltiplos a la vez de 2 y de 4.
- ☐ Todos los múltiplos de 12 son múltiplos a la vez de 2 y de 10.

15. Escriba tres múltiplos de 12 mayores a 2 000

16. Dé dos ejemplos de números que sean simultáneamente divisibles por 5, 7 y 3.

17. ¿Existe un número que sea divisible por 10, pero que no sea divisible por 5? Justifique

18. ¿Existe un número que sea divisible por 3, pero que no sea divisible por 9? Justifique

19. Complete la secuencia de números divisibles por 7:

91, ___, ___, ___, ___,126

20. Un estudiante desea guardar 4 015 canicas en 11 bolsas, de modo que en cada bolsa haya la misma cantidad de canicas. ¿Es posible efectuar esa repartición? Justifique.

21. **Un truco muy interesante…**

Propóngale a un amigo que escriba cualquier número de tres cifras, pero con la condición de que las cifras extremas se diferencien una de otra en la cantidad que usted le indique. Después solicite que en este número permute las cifras extremas (intercambie de posición). Resultará otro número. Proponga que de los dos números así obtenidos, reste el menor del mayor. La diferencia de esta resta siempre se dividirá por 9 y usted siempre podrá decir, por adelantado, cuál será el cociente de esta división. ¿A qué es igual el cociente?

22. **Otro truco…**

Ahora, propóngale a un amigo que piense en un número par, luego triplíquelo. Luego pídale que determine la mitad del número obtenido y triplíquela también. Cuando el amigo le indique a qué es igual el cociente de la división de este último número por 9, se podrá adivinar el número pensado. ¿Cómo adivinará ese número? ¿Por qué funciona para cualquier número?

23. Un campesino recoge con entusiasmo una cosecha de naranjas. Luego de contarlas piensa:

- Si las almaceno por docenas, me sobran 5.
- Si tuviera una más, podría guardarlas exactamente, en cajas de 10
- Casi he recogido 100 naranjas.

¿Cuántas naranjas tiene?

24. Társila está feliz, ya que su madre le ha regalado una cantidad de cromos con los que ella jugaba en su época de niña. Társila juega con 10 amigas y les dice que regalará algunos cromos si logran determinar la cantidad que tiene. Para ello ofrece las siguientes pistas:

- Hay menos de cinco docenas.
- Están ordenados en filas de nueve.
- Si se repartieran entre las amigas presentes, sobrarían seis cromos

¿Cuántos cromos tiene Társila?

25. Si se cuenta ascendentemente de 3 en 3 partiendo del 0, ¿se podrá llegar justo al número 225? ¿Y al 403? Justifique

26. Quiliano debe presentar a su madre una factura de unas compras realizadas en la pulpería del pueblo. Sin embargo, jugando con el papel se le borró un dígito (el último). Lo que recuerda es que la cantidad por pagar fue divisible por 6. Si la factura se lee 395x, donde x es la cifra borrada. Utilizando los criterios de divisibilidad, ¿cuánto fue el monto cobrado? Justifique

Reto de lógica:

1. El número de 5 dígitos 24X8Y es divisible entre 4, 5 y 9. ¿Cuál es la suma de los dígitos X y Y?

Conocimiento: Números primos

Escenario de aprendizaje

Guntero, un joven que está en sétimo nivel, hizo una recolecta, y logró reunir 101 cuadernos para llevarlos a una zona donde hay serios problemas económicos. Él desea empacar esos cuadernos en cajas, de modo que en cada una haya una misma cantidad. ¿En cuántas cajas podrá llevarlos, y cuántos cuadernos deberá acomodar en ellas?

Una manera de abordar el escenario, es buscar un divisor de 101:

Divisibilidad	Razonamiento
Por 2	Termina en 1, por tanto no es un número par
Por 3	
Por 4	
Por 5	
Por 6	
Por 7	
Por 9	
Por 10	

¿Cuáles son los únicos divisores de 101?

Para separar los cuadernos en cajas, solo podría hacerlo colocando un cuaderno en cada caja, para lo cual necesitaría 101 cajas, o todos los 101 cuadernos dentro de una sola. Es de imaginar que cambiara de opinión y repartiera 100 cuadernos en cajas (podrían ser 10 de 10) y el sobrante llevarlo en la mano, por ejemplo.

La situación de Guntero se originó porque el 101 es un número que solo es divisible por uno y por sí mismo, y a esos números se les llama **números primos.**

Un natural "p" es llamado **primo** si sus únicos divisores son p y 1.

Un natural "c" que no es primo es llamado **compuesto.**

Ejemplos

- El número 37 es primo
- El número 27 es compuesto, tiene como divisores al 1, 3, 9 y 27

Escriba "p" si es un número primo, y "c" si es compuesto

¿Sabías que...?

Curtis Missouri, profesor de la Universidad de Missouri, es quien ha descubierto el número primo más grande hasta el momento, de más de 17 millones de dígitos (17 425 170), con lo que recibió el premio de 3 000 dólares.

Este descubrimiento servirá en el futuro para el desarrollo en la mejora de códigos de seguridad y criptografía de mensajes

Ese número se obtiene al resolver $2^{57\,885\,161} - 1$

Descomposición prima

El Teorema Fundamental de la Aritmética establece que todo número natural *n* se puede representar de forma única como el producto de factores primos, excepto por el orden en que aparecen estos factores. A esta representación se le conoce **como la factorización o descomposición prima de un entero.**

Escriba el número 36 como un producto de potencias que tengan como base números primos.

____

____

____

____

____

Para esto, podemos descomponer el 36 de la siguiente manera:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Al utilizar las leyes de potencias antes deducidas, podemos expresar ese número así:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

Observe que tanto el 2 como el 3 son números primos.

Un mecanismo sencillo para determinar la descomposición prima de un número, se presenta en los siguientes ejemplos.

⌗ 400

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Por tanto $400 = 2^4 \cdot 5^2$

⌗ 2 100

2100	2
1050	2
525	5
105	5
21	3
7	7
1	

Por tanto

$$2100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7$$

Tal como se desarrolló en el ejemplo, 400 se representa como $2^4 \bullet 5^2$.

Teniendo esta información, podemos conocer **la cantidad de divisores** del número. Esto se obtiene sumándole 1 a cada exponente de los factores primos y hallando su producto. Por ejemplo, en este caso, el número de factores de 400 es:

$$(4 + 1)(2 + 1) = 15 \text{ divisores}$$

Además existe un proceso sencillo para determinar cada uno de esos 15 divisores. Seguidamente se detalla, para el caso del 400:

- Escriba todos los factores de 2^4. Estos quedarán en una primera fila:

$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$

- Coloque cada factor de 5^2 en la columna del $2^0 = 1$, sin incluir el 5^0, pues también da 1.

1	2	4	8	16
$5^1 = 5$				
$5^2 = 25$				

Ahora, multiplique cada término de la primera columna por los términos de la primera fila (excepto el 1), así:

1	2	4	8	16
5	$5 \bullet 2 = 10$	$5 \bullet 4 = 20$	$5 \bullet 8 = 40$	$5 \bullet 16 = 80$
25	$25 \bullet 2 = 50$	$25 \bullet 4 = 100$	$25 \bullet 8 = 200$	$25 \bullet 16 = 400$

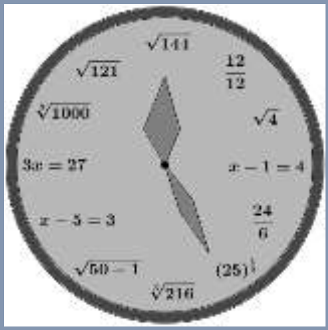
De este modo, todos los divisores de 400 son: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200 y 400. Efectivamente, son quince divisores, tal como se concluyó con anterioridad.

Criba de Eratóstenes

Reto de lógica:
Si estás participando en una carrera y adelantas al que va en segundo lugar, ¿en qué posición terminarás la carrera?

Tiempo para practicar 1.4

Habilidades:
Identificar números primos y compuestos.
Descomponer un número compuesto en sus factores primos.



1. Determine los números primos entre 105 y 130.

2. ¿Cuántos divisores primos tiene el número 150?

3. ¿Cuántos divisores primos tiene el número 143? ¿Cuáles?

4. Determine la factorización prima de los siguientes números (a) 540 (b) 550 (c) 676 (d) 950 (e) 184 (f) 851 (g) 2 187 (h) 3 087

5. Determine los divisores primos de cada número:
(a) 66 (b) 255 (c) 280 (d) 252 (e) 6650

6. Raveriano tiene 72 azulejos que desea colocar en un espacio dentro del colegio para hacer una decoración. ¿De cuántas formas puede colocar esos azulejos de modo que forme un rectángulo?

7. Un profesor quiere hacer grupos para un trabajo de matemática. El grupo total consta de 36 estudiantes. ¿Cuántas posibilidades hay para hacer los grupos de modo que queden del mismo número de estudiantes?

8. Gaciano debe empacar, en bolsitas, 90 pines que dicen ¡DIAY!, de modo que en cada caja haya la misma cantidad de pines. ¿De cuántas formas puede empacar Gaciano los pines dentro de las bolsitas? Describa todas las posibilidades

9. (a) ¿Cuál es el único número par que es primo?
(a) ¿Todo número impar es primo?
(b) ¿La suma de dos números primos es prima?
(c) ¿Cuántos números primos hay entre el 100 y el 110?

10. Calcular, mediante una tabla, todos los números primos comprendidos entre 450 y 500.

11. Para diseñar un juego, se deben colocar 240 fichas cuadradas de modo que cubran un rectángulo. Una posibilidad es armar un rectángulo que tenga 120 cuadraditos de largo y 2 de ancho. ¿Cuáles son todos los otros rectángulos que se pueden armar con las 240 fichas sin partir ninguna?

12. Determine cuántos divisores tiene cada número.

(a) 540 (b) 550 (c) 676 (d) 950
(e) 184 (f) 851 (g) 2 187 (h) 3 087

13. Determine todos los divisores de cada número

(a) 56 (b) 675 (c) 600 (d) 211

Conocimiento: Mínimo Común Múltiplo

Escenario de aprendizaje

Clímaco y Medardo son estudiantes que van a Alta Talamanca a investigar el valiosísimo legado de nuestros ancestros. Clímaco va cada 18 días y Medardo cada 24 días. Hoy, ambos se encontraron en Alta Talamanca. ¿Dentro de cuántos días se volverán a ver en tan hermoso lugar?

Para lograr resolver este reto, es necesario buscar los días que va Clímaco a Talamanca, y de igual manera aplicar el procedimiento con Medardo.

Como Clímaco va cada 18 días, si contamos hoy como el día inicial, entonces este estudiante irá los días: 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, 198, 216, 234, 252,….

Es importante observar que lo que realmente se ha determinado son algunos **múltiplos de 18.**

De igual forma, Medardo irá los días 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, 240…

Ahora bien, es fácil determinar, al ver los múltiplos de 18 y 24 obtenidos anteriormente, que hay tres múltiplos comunes: el 72, 144 y 216. Si se siguen sacando más múltiplos, se irán obteniendo otros que se repiten en ambas listas.

Como se desea obtener el día más próximo en que los estudiantes se encontrarán en Alta Talamanca, este será el 72, que es el múltiplo común más pequeño.

A este número se le llama **mínimo común múltiplo de 18 y 24.**

El mínimo de todos los múltiplos comunes positivos de a y b se denomina mínimo común múltiplo de a y b, el cual se denota por mcm(a, b).

Existe una técnica más eficiente y sencilla para encontrar el mínimo común múltiplo de dos números, y es obteniendo simultáneamente divisiones de ambos números, a pesar de que no es necesario que los divisores sean comunes. Veamos:

18	24	2
9	12	2
9	6	2
9	3	3
3	1	3
1	1	

De este modo el

mcm (18, 24) = $2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 3 = 72$

Este 72 representa un número que es múltiplo tanto de 18 como de 24, y es el más pequeño con esa característica:

72	18
0	4

Ejercicios para ser desarrollados con el docente

A. Determine:

(a) El m.c.m (21,14)

(b) El m.c.m (12,15,3)

(c) El m.c.m (11,7)

B. La alarma de un reloj suena cada 9 minutos, y otra cada 21 minutos. Si acaban de coincidir las dos ¿Cuánto tiempo pasará para que ambas alarmas vuelvan a coincidir?

Conocimiento: Máximo Común Divisor

Escenario de aprendizaje

Tres secciones de octavo nivel de un colegio, realizan una recolecta para ayudar a compañeros de sétimo nivel de escasos recursos, que necesitan cubrir el almuerzo de un convivio. El 8A, recoge 240 dólares, el 8B, 225 dólares y el 8C, 180 dólares. La condición a la que llegaron, es que a cada estudiante se le dé la misma cantidad de dinero. ¿Cuál es la mayor cantidad de dólares que podrán dar a cada estudiante de sétimo nivel y cuántos serán los estudiantes beneficiados?

Reto de lógica:

Una señora llevaba naranjas al mercado cuando se le cayó la cesta.
- ¿Cuántas naranjas llevaba? - le preguntaron,
- No lo sé, recuerdo que al contarlas en grupos de 2, 3, 4 y 5, sobraban 1, 2, 3 y 4 respectivamente. Además, no tenía más de 90 naranjas
¿Cuántas naranjas tenía la señora?

Para este caso, es necesario encontrar un número que sea divisor simultáneamente de 240, 225 y 180.

Por ejemplo, podemos verificar que dichas cantidades son divisibles por tres:

$\begin{array}{r|l} 240 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 80 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 225 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 75 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 180 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 60 \end{array}$

Sin embargo el 3 no es el mayor divisor que cumple esta condición. Por ejemplo, el 5 también es divisor de 240, 225 y 180. Veamos:

$\begin{array}{r|l} 240 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 48 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 225 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 45 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 180 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 36 \end{array}$

Como el 3 y el 5 cumplen la condición, entonces el 15 es también divisor común de 240, 225 y 180:

$\begin{array}{r|l} 240 & 15 \\ \cline{2-2} 0 & 16 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 225 & 15 \\ \cline{2-2} 0 & 15 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 180 & 15 \\ \cline{2-2} 0 & 12 \end{array}$

Así que son 15 dólares la máxima cantidad que pueden dar a cada estudiante como ayuda económica, y los estudiantes beneficiados serán

$$16 + 15 + 12 = 43$$

Este valor se conoce como **máximo común divisor**, y en este caso se simboliza MCD (240, 225,180) = 15

Para determinar más fácilmente el MCD, se puede seguir un proceso similar al realizado para obtener el mcm, solo que en este caso, es necesario dividir por un número que sea divisor de todos los valores dados de manera simultánea.

Así:

240	225	180	3
80	75	60	5
16	15	12	

$$\text{MCD } (240, 225,180) = 3 \cdot 5 = 15$$

El máximo común divisor, es el mayor número por el que se pueden dividir dos o más cantidades.

⌗ Cuando el MCD de dos o más números es UNO, se dice que esos números son **primos relativos**. Por ejemplo, 16 y 25 son primos relativos, ya que el MCD (16, 25) = 1

Ejercicios para ser desarrollados con el docente

A. Determine:

(a) El M.C.D (21,14)

(b) El M.C.D (12,15,3)

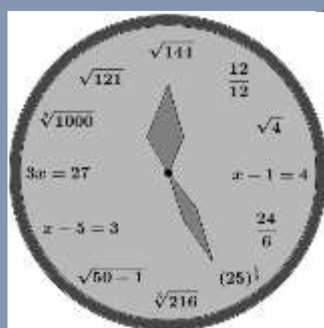
(c) El M.C.D (11,7)

B. Se quieren armar bolsas que contengan la mayor cantidad posible de confites y chupas. ¿Cuántos confites y cuántas chupas se podrán poner en cada bolsa si en cada una debe haber la misma cantidad de cada producto y no debe quedar nada sin colocar en las bolsas?

____
____
____
____

Tiempo para practicar 1.5

Habilidades:
Obtener el mínimo común múltiplo de dos números aplicando el algoritmo correspondiente.
Obtener el máximo común divisor de dos números aplicando el algoritmo correspondiente.
Plantear y resolver problemas donde se utilice el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.



1. Determine el mcm y MCD en cada caso.
   (a) 15, 45, 90 (b) 12, 24, 8
   (c) 7, 15 (d) 3, 1, 39
   (e) 169, 13 (f) 49, 84
   (g) 27, 45, 18 (h) 6, 6, 12

2. Determine el MCD en cada grupo de números.

   (a) (21, 33, 12) (b) (130, 45, 90)
   (c) (7, 12) (d) (8, 64, 36)

3. Determine el mcm en cada grupo de números.
   (a) (49, 7, 2) (b) (30, 10, 15)
   (c) (125, 25) (d) (11,3, 121)

4. Para los desfiles del 15 de setiembre, los estudiantes participantes, podrán agruparse de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25, pero no pueden hacerlo ni de 4 en 4 ni de 9 en 9. ¿Cuántos estudiantes van a participar, si se sabe que son menos de 400 y más de 170?

5. A un estudiante de sétimo nivel le dan unos volantes informativos sobre el peligro del consumo de drogas, para que los reparta a sus compañeros y amigos. El joven logra contar de manera exacta dichos volantes, de 3 en 3, 5 en 5 y 7 en 7. Si son más de 150 volantes y menos de 300, ¿cuántos volantes debe repartir?

6. En la casa de Reginaldo, están tomando unas pastillas de vitaminas. Para ello, cada miembro de la familia pone una alarma en su reloj para recordar cuándo debe tomarla. No todos la deben tomar a las mismas horas, pues depende de sus edades. Una alarma suena cada 6 horas, otra cada 8 horas y otra cada 12 horas. Si acaban de coincidir las tres alarmas ¿Cuánto tiempo pasará para que las tres alarmas vuelvan a coincidir?

7. Para una actividad de ayuda social a una escuela con niños de escasos recursos, se cuenta con 3 envases muy grandes de leche, con capacidades de 240, 360 y 540 litros. Su contenido se desea envasar en cierto número de recipientes iguales. Determine las capacidades máximas que deben tener esos recipientes y cuántos se necesitan.

8. Para la celebración del 11 de abril, se cuenta con tiras para hacer decoraciones. Estas miden 60 cm, 80 cm y 100 cm. Se desea cortar las tiras en pedazos de la misma longitud, sin que sobre ni falte nada. ¿Cuál es la máxima longitud de los pedazos?

9. Si los números a y b son primos relativos, entonces ¿cuál es el mcm (a, b)?

10. Tres personas corren alrededor de un lago. Una tarda 4 minutos en dar la vuelta; otra tarda 6 minutos; y la tercera, 3 minutos. Si comienzan las tres a la misma hora, ¿cuántos minutos pasan hasta que se vuelven a encontrar las tres por primera vez? Si corren durante una hora, ¿cuántas veces coinciden?

11. Para un cumpleaños, se van a armar bolsitas con golosinas. Si ponen 5 golosinas en cada bolsita, no sobra ninguna. Si ponen 4 golosinas en cada bolsita, tampoco sobra ninguna. ¿Cuántas golosinas se han comprado en total, si se sabe que fueron más de 50 pero menos de 100? ¿Hay una sola posibilidad?

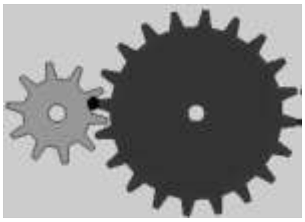
12. ¿Cuál es la menor cantidad de nísperos que se necesita, de manera tal que, al repartirlos entre 8 partes iguales, no sobre ninguno y al repartirlos entre 6, en partes iguales, tampoco sobre ninguno?

13. Determine un número mayor que 50 de manera tal que al dividirlo por 5 el cociente sea 0; al dividirlo por 3, el cociente sea 0; y al dividirlo por 15, el cociente también sea 0.

14. Si el número "a" es múltiplo de "b", entonces:
   (a) ¿cuál es el mcm (a, b)?
   (b) ¿cuál es el MCD(a, b)?

15. Si el número "a" es par y "b" es impar, ¿entonces será cierto que MCD(a, b) = 1? Justifique

16. Considere el dibujo



¿Cuántos dientes de cada rueda deben pasar para que vuelvan a coincidir los puntos señalados en color negro? ¿Cuántas vueltas habrán dado cada una de las ruedas?

17. Hay 120 bolitas azules, 160 rojas y 200 blancas para hacer collares del mismo tamaño, de modo que no sobre nada. Además, cada collar debe ser de un solo color y lo más grande posible. ¿Cuántas bolitas se deben emplear en cada collar? ¿Cuántos collares se pueden hacer de cada color?

18. Un ebanista quiere cortar una madera de 60dm de largo y 42dm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?

19. Hay dos cajones, en cada uno de ellos una misma cantidad de ligas. Estas ligas están guardadas en bolsas. En el primer cajón están en bolsas de 27 ligas cada una, mientras que en el segundo, en bolsas de 45. ¿Cuál es la mínima cantidad de ligas que puede haber en cada cajón?

20. Anacleto tiene gripe, por lo cual toma un jarabe cada 8 horas y una pastilla cada 6 horas. A las 9am se tomó ambos medicamentos. ¿A qué hora más próxima volverá a tomar al mismo tiempo ambos remedios?

21. Se desea plantar 18 matas de café y 54 de caña. Para ello se harán filas con un solo tipo de plantas y con la misma cantidad de plantitas. ¿Cuál es el mayor número de plantas que se puede sembrar por cada fila?

22. En un centro cultural se reúne un grupo de danza cada 4 días y otro de canto cada 6 días. Si hoy coincidieron los dos grupos, ¿cuándo volverán a coincidir?

23. Un árbol de navidad tiene luces de tres colores: rojas, amarillas y verdes. Cada 12 segundos se encienden las rojas, las amarillas cada 18 segundos y las verdes cada 32. Si al conectar el juego de luces se encienden todas a la vez, ¿cuántos segundos pasarán hasta que vuelvan a coincidir todas encendidas?

24. Las instrucciones de mantenimiento de cierto vehículo especifican que debe cambiarse el aceite del motor cada 7500 km, el filtro del aire cada 15000 km y las bujías a los 20000 km. Si se compra un automóvil nuevo, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido al momento que deban realizarse todos los cambios a la vez?

25. Una empresa que fabrica bombillas de dos colores tiene en el almacén 315 de color amarillo y 270 rojas. Se quieren distribuir en cajas de manera que cada caja contenga el mismo número de bombillas del mismo color, que todas las cajas contengan el mismo número de unidades y, además, que este número sea el mayor posible. ¿Cuántas bombillas debe contener cada caja?

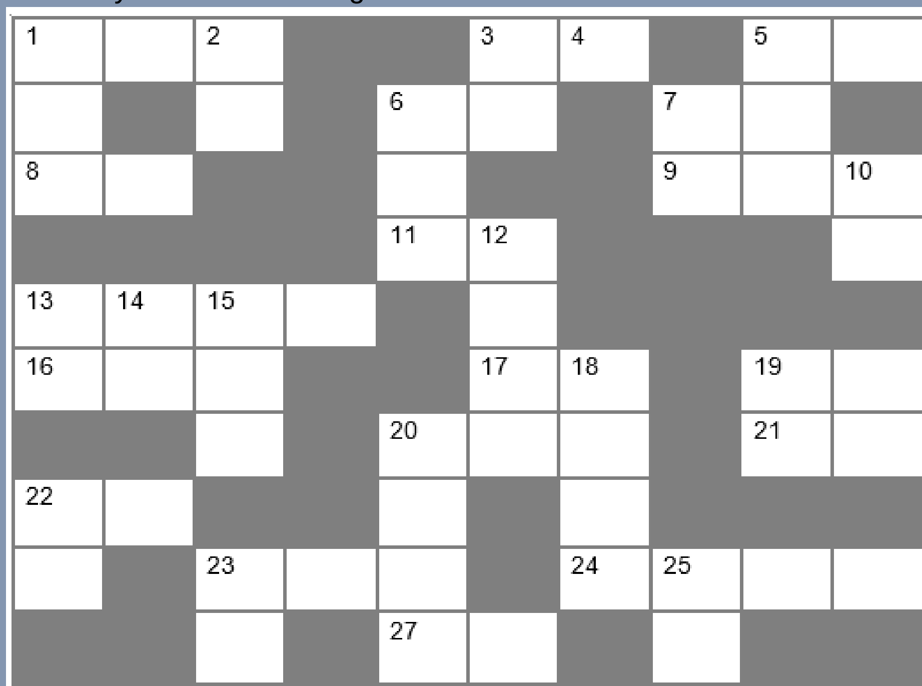
Trabajo cooperativo

Indicaciones: Forme grupos de 6 estudiantes. Cada uno, deberá tener una de las 6 pistas que se proporcionan y determinar los números que cumplen la condición que se presenta. Luego, entre los 6, buscarán cuál número cumple todas las condiciones.

1. Determine el número de Ruperto **Pistas**	**2. Determine el número de Riquilda** **Pistas**
(a) La suma de los dígitos del número de Ruperto es un número par.	(a) El número de Riquilda es múltiplo de siete.
(b) El número de Ruperto es múltiplo de 5	(b) El número de Riquilda no es impar.
(c) El número de Ruperto es el número más grande, menor que 100 que cumple todas las condiciones	(c) La suma de los dígitos del número de Riquilda es mayor que diez.
(d) Cuando se multiplican los dígitos del número de Ruperto juntos, se obtiene un número impar	(d) El primer dígito del número de Riquilda es mayor que el segundo.
(e) El número de Ruperto es mayor a 50	(e) Los dos dígitos del número de Riquilda son pares.
(f) El número de Ruperto es un múltiplo de tres.	(f) La diferencia de los dos dígitos del número de Riquilda es mayor que tres.

¡A desempeñar nuestras habilidades!

Repasa la materia y resuelva el crucigrama



Horizontales

1. mcm (25, 7)
3. número de divisores de 200
4. número primo y par
5. mcm (3,7)
6. número divisible por 7
7. múltiplo de 9
8. primo menor de 2 cifras
9. 15^2
11. número divisible por 5
13. resultado de $3^6(5+1)+5^2$
16. múltiplo de 100
17. resultado de $5^2 \bullet 2+3$
19. mayor número primo de dos cifras
20. segundo número primo menor de tres cifras
21. MCD (30, 45)
22. mcm (8,10)
23. resultado de $3+40 \bullet 3$
24. resultado de 525 (7+3)
27. número par divisible por 9

Verticales

1. número cuya factorización es $37 \bullet 3$
2. MCD (50, 100)
3 número primo
5. triple de 94
6. resultado de 6^3
7. MCD (72, 60)
10. múltiplo de 11
12. mitad de 11 100
13 número divisible por 11
14. número divisible por 3
15. resultado de 30^2
18. volumen de un cubo de arista 15
19. resultado de 9^2+10
20. volumen de un cubo de arista 11
22. múltiplo de 9
23. número compuesto cuya última cifra es prima.
25. número divisible por 8

Conocimiento: Números negativos

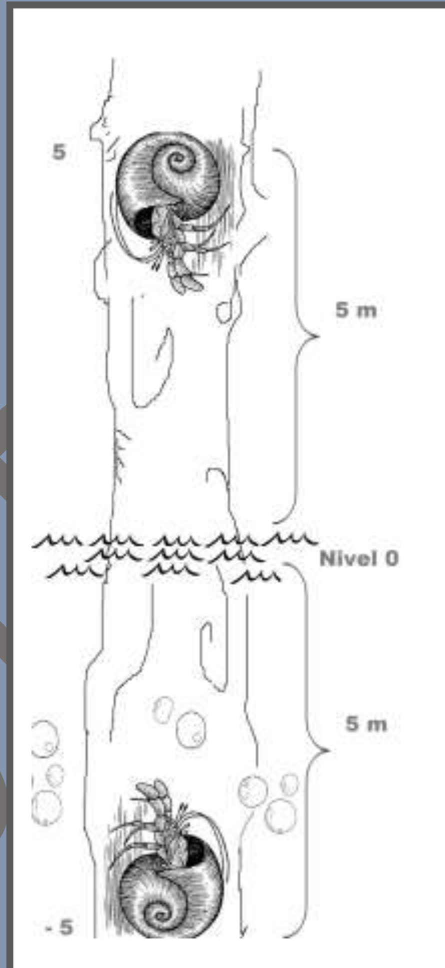
Escenario de aprendizaje

Un joven asiste a un paseo familiar y visita el muelle de Puntarenas. Ahí observa la diversa fauna y focaliza su atención en unos cangrejos. Un primer cangrejo está en el muelle, a una distancia de 5 metros sobre el nivel del mar y se dirige a un segundo cangrejito que está a 5 metros debajo del nivel del mar, bien agarrado de uno de los pilotes (las columnas) del muelle.

(a) ¿A qué distancia está un cangrejo del otro?

(b) ¿Si numeramos con un 5 la posición del primer cangrejito (por la distancia que está sobre el nivel del mar), habrá confusión al numerar también con 5 la posición del segundo cangrejo?

(c) ¿Están a la misma distancia los dos cangrejos del nivel del mar?



⌗ En esta situación, vamos a numerar el nivel del mar con el 0. De esta forma, la distancia a la que estarán los cangrejos entre sí es de 10, pues, por ejemplo, si el primer cangrejo va hacia el segundo, debe recorrer los 5 metros que hay hasta el nivel del mar y luego seguir bajando 5 metros más. Esto responde la primera interrogante.

⌗ Ahora bien, si numeramos con 5 la posición del primer cangrejo, puede provocar confusión llamar con 5 a la posición del segundo, ya que no podríamos saber cuál de los dos está sobre el nivel del mar, o debajo de este.

En este contexto, para numerar la posición del cangrejo que está debajo del nivel del mar, es necesario utilizar otros números que no son naturales, a los que llamamos **números negativos** y que representamos con el signo **"*menos*".**

En la situación anterior, la posición del segundo cangrejo la expresamos con el número **– 5** y se lee **cinco negativo** o **menos cinco.**

Las expresiones referidas a la **izquierda (oeste)** o **abajo (sur)** de un punto determinado, se expresan con cantidades negativas. De igual forma, las **deudas, temperaturas bajo cero**, **las pérdidas y los años antes de Cristo**.

Ejemplos:

- Clotilde debe ₡15 000 por pago del recibo de electricidad. Esa deuda se indica con el número – ₡15 000
- Belisario fue a pasear a Estados Unidos y se enfermó, pues su cuerpo no estaba acostumbrado a soportar una temperatura de 6° C (Celsius) bajo cero. Esa cantidad es expresada como – 6°C (Celsius)

⌗ Los números negativos son **opuestos** a los positivos y viceversa. Por ejemplo, en el escenario de aprendizaje anterior, la posición del primer cangrejo (5) es opuesta a la del segundo cangrejo (– 5)

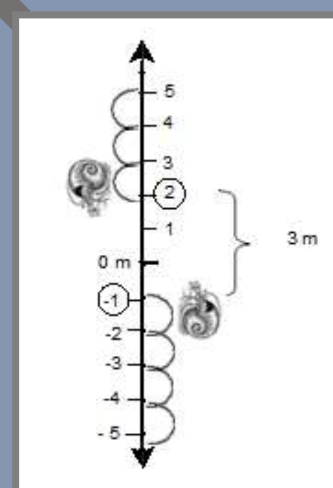
De este modo, el **opuesto** de un número "a" es " – a ".

El **cero** no se considera positivo ni negativo, sino **neutro**, por lo cual su opuesto es él mismo.

Ejemplos:

- El opuesto de – 3 es – (– 3) = 3.
- El opuesto de 21 es – 21
- El opuesto de 5 es – 5
- El opuesto de – 5 es – (–5) = 5
- El opuesto de 0 es 0
- El opuesto de deuda, es ganancia.
- El opuesto de norte es sur

⌗ En la pregunta (c) del caso de los cangrejos, se necesita conocer la distancia a la que están ambos crustáceos del nivel del mar (de la posición 0). En este caso, se debe recordar un principio fundamental: **Toda distancia es positiva.** Por consiguiente, ambos cangrejos están a la misma distancia del nivel del mar, a cinco metros cada uno.



Lo anterior, dentro de la Matemática, recibe el nombre de **valor absoluto.**

El valor absoluto de "a" se define como la distancia a la que se encuentra el número "a" del cero. Al ser una distancia, este valor es **positivo.** Simbólicamente se representa:

$$|a|$$

Con la información del escenario de aprendizaje se tiene que:

$$|5| = 5$$
$$|-5| = 5$$

De manera más rigurosa, se define el valor absoluto de x como:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si aplicamos esta definición, tenemos que:

- $|9| = 9$ ya que $9 \geq 0$
- $|-7| = -(-7) = 7$ ya que a $-7 < 0$
- $|0| = 0$

Como el valor absoluto es positivo, su opuesto debe ser negativo. Esto se puede apreciar en los siguientes ejemplos:

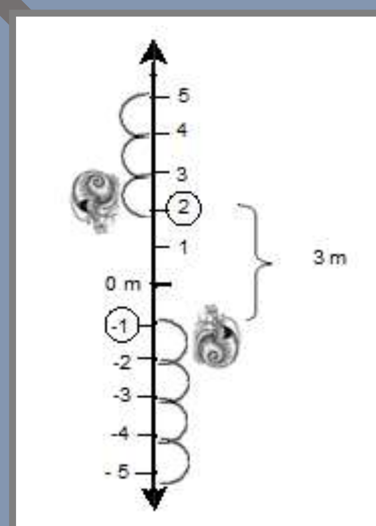
- $-|14| = -14$
- $-|-8| = -8$

Conocimiento: Recta numérica

Escenario de aprendizaje

Un cangrejo está en el muelle, a una distancia de 5 metros sobre el nivel del mar y se dirige a un segundo cangrejito que está a 5 metros debajo del nivel del mar.
Si el primer cangrejo baja 3 metros en dirección al segundo cangrejo, y el segundo sube 4 metros en dirección al primero, ¿a qué distancia estará un cangrejo del otro?

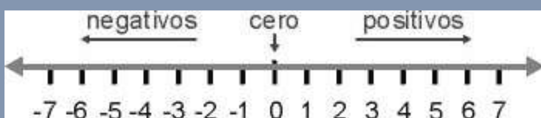
Para darle respuesta, podemos ilustrar la situación planteada mediante **una recta numérica**.



Todos los números pueden ordenarse en una **recta numérica** y así determinar si un número es mayor o menor que otro, dependiendo del lugar que ocupa en esta. Si la recta tiene una orientación horizontal, los números a la derecha del cero son positivos, y a su izquierda negativos. Si la recta se ubica de modo vertical, los negativos estarán debajo del cero.

Tal como queda evidenciado en la recta numérica adjunta, al bajar el primer cangrejo, queda en la posición 2, y el segundo cangrejo, al subir 4 metros, termina en la posición - 1.

La distancia que hay entre la posición 2 y -1 es de 3. Esto se puede representar como $2-(-1)=3$



Este escenario nos ha mostrado la existencia de los números negativos y ha permitido que estudiemos algunas propiedades que los relacionan.

Los números estudiados en la educación primaria, utilizados para contar reciben el nombre de **números naturales**, y se representan con IN, debido a su inicial: IN = {0, 1, 2, 3, 4, 5,…}

Si a este conjunto le unimos los números negativos exactos (sin decimales) se forma el conjunto de **números enteros** simbolizado con $\mathbb{Z}$, que proviene de la inicial de la palabra en alemán de "número": *Zahlen*

$$\mathbb{Z}=\left\{\underbrace{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1}_{\mathbb{Z}^-},\ \overbrace{0,\ \underbrace{1,2,3,4,5\ldots}_{\mathbb{Z}^+}}^{IN}\right\}$$

Conocimiento: Relaciones de orden. Suma y resta de números enteros

Escenario de aprendizaje

En la pulpería de don Pancho, todavía se usan las llamadas "libretas", donde se lleva una cuenta de los "mandados" que se fían y los abonos respectivos.

Damasceno, el hijo menor de los Ramírez, va a hacer algunas compras a la pulpería, junto con su primo Cleto.

Don Pancho le indica a Damasceno que debe ₡4 000 de unos abarrotes que había comprado la semana anterior, y que Cleto debía ₡ 3 500

(a) *¿Cuál de los dos primos está en mejor situación económica, de acuerdo con las deudas que tienen? ¿Por qué?*

(b) *Damasceno compra 1 caja de leche a ₡ 510 y paga con un billete de ₡ 5 000. ¿cómo quedan sus cuentas en la libreta de don Pancho? ¿con qué número entero se puede representar esa cantidad?*

(c) *Cleto compra dos helados a ₡400 cada uno y paga ₡4 100 ¿cómo quedan sus cuentas en la libreta de don Pancho? ¿con qué número entero se puede representar esa cantidad?*

(d) *Suponga que Cleto debe ₡8 000 y paga los ₡8 000, ¿cuál será su saldo con Pancho?*

Este escenario nos permite descubrir importantes propiedades de los números entero. Veamos:

⌗ Al analizar el inciso (a), se torna más ventajoso deber ₡3 500 y no ₡4 000, por lo cual, la mejor situación la presenta Cleto. Si esto lo representamos como números enteros, tenemos que:

$$-4000 < -3500$$

Esta relación de orden es muy importante en los números enteros, y se debe tener cuidado al comparar cantidades negativas, pues si "a" y "b" son números positivos tales que $a < b$, entonces $-a > -b$

Ejemplos:

- $-8 < -6$
- $-15 > -200$
- $-8 < 8$
- $0 > -12$
- $9 < 17$
- $|-18| = |18|$
- $-|-89| < |89|$
- $-|18| > -|-21|$

⌗ Siguiendo con el escenario de aprendizaje, en su inciso (b), Damasceno compra una caja de leche a ₡ 510, lo cual es una deuda. Además debe ₡4 000, por lo cual su deuda total es de ₡4 510.

Esta operación se puede expresar así:

$$-510 + -4000 = -4510$$

Note que al **sumar dos cantidades negativas,** se suman los valores absolutos de cada cantidad y se mantiene el signo negativo, que corresponde a la deuda.

Ahora bien, Damasceno paga con un billete de ₡5 000, con lo cual logra cancelar la deuda y le sobran ₡490. Al considerar el pago de los ₡5 000 como una expresión positiva, se tiene que:

$$-4510 + \mathbf{5000} = \mathbf{490}$$

Note que al **sumar una cantidad positiva a otra negativa**, se restan los valores absolutos de cada cantidad de modo habitual y se mantiene el signo del mayor valor absoluto

⌗ En el caso de Cleto, él tiene una deuda de ₡3 500 y compra dos helados a ₡400 cada uno y paga ₡4 100.
Para saber la deuda total, se resuelve:

$$-400 + -400 + -3500 = -4300$$

De esta forma, la deuda es de ₡4 300.

Se puede observar, al resolver el proceso anterior, que

$$-400 + -400 = 2 \cdot -400 = -800$$

Pero Cleto abona ₡4 100, ante una deuda de ₡4 300, por lo tanto, sigue debiendo ₡200.

⌗ En el punto (d), Cleto debe ₡8 000 y paga los ₡8 000. En efecto habrá quedado "en paz" con don Pancho. Es decir, el saldo será de ₡0. Esto se puede representar:

$$-8\,000 + 8\,000 = 0$$

De esta forma, llegamos a otra conclusión muy importante:

La suma de un número entero con su opuesto da como resultado cero.

$$-a + a = 0$$

Mediante este sencillo caso, hemos podido deducir la forma en que se ***suma con números enteros***. Seguidamente se resumen esos resultados.

1. Si los sumandos son del mismo signo, se suman los valores absolutos y al resultado se le mantiene el signo común.

Ejemplos.

a) $345+89$

$=\left(\ |345|+|89|\ \right)$

$=434$

b) $-76+-45$

$=-\left(\ |-76|+|-45|\ \right)$

$=-(76+45)=-121$

c) $25+98+2$

$=125$

d) $-8+-5+-27$

$=-40$

2. Si los sumandos son de diferente signo, se restan los valores absolutos (al mayor le restamos el menor) y al resultado se le asigna el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplos.

a) $-24+57$

$=\left(\ |57|-|24|\ \right)=33$

Positivo pues el signo de 57 es positivo y $|57|>|24|$

b) $-70+30$

$=\left(\ |-70|-|30|\ \right)=-40$

Negativo pues el signo de 70 es negativo y $|-70|>|30|$

c) $36+-48$

$=-12$

d) $12+-9$

$=3$

3. Cuando se realizan sumas con cantidades positivas y negativas, se pueden agrupar los sumandos de acuerdo con su signo, así:

a) $-2+5+-6+7+8$

$=(-2+-6)+(5+7+8)$

$=-8+20$

$=12$

b) $15+-6+-22+2+-1$

$=(-6+-22+-1)+(15+2)$

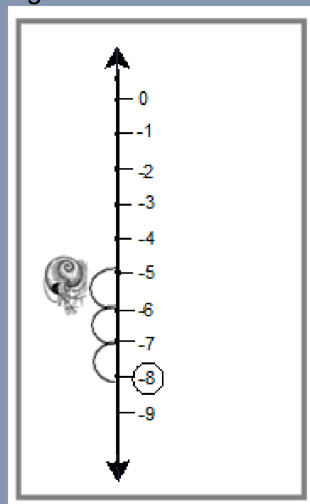
$=-29+17$

$=-12$

Operando con la recta numérica.

¡Retomemos el escenario de aprendizaje de los cangrejos! Para ello recordemos que había dos cangrejos, el primero, ubicado en la posición 5 y el segundo en la -5.

Ahora bien, ¿en qué posición se ubicará el segundo cangrejo si baja tres metros más?



El hecho de bajar, lo podemos asociar con **la resta.** De tal modo que debemos operar: $-5-3$

La recta adjunta, nos indica que la respuesta es -8.

Este resultado puede determinarse así:

$$-5-3=-5+-3=-8$$

Es decir, operar la resta a – b equivale a resolver la suma de a con el opuesto de b. Así:

$$a - b = a + -b$$

Así entonces para resolver $4 - {}^{-}3$, se efectúa la suma de 4 con el opuesto de – 3 (que es 3), es decir, 4 + 3, con lo que se obtiene 7.

De modo general:

$$a - b = a + -b$$
$$a - {}^{-}b = a + b$$

Ejemplos.

- **a)** $3 - 7 = 3 + -7 = -4$
- **b)** $8 - 9 = 8 + -9 = -1$
- **c)** $2 - -5 = 2 + 5 = 7$
- **d)** $-6 - {}^{-}1 = -6 + 1 = -5$

¿Sabías que...?

Los números negativos también resultan importantes en el deporte, particularmente en el fútbol. La diferencia de goles es uno de los métodos utilizados en el fútbol para realizar desempates entre equipos en una competición, cuando estos poseen igual cantidad de puntos.
El sistema de diferencia de goles calcula una cifra que corresponde a la resta entre goles anotados por el equipo y los goles que ha recibido. Cuanto mayor sea la diferencia de goles, mejor es la posición que el equipo obtiene. Si un equipo ha anotado 12 goles y ha recibido 7, la diferencia de goles será de 12 – 7 = 5. Ahora bien, si los goles a favor de otro equipo es de 5 y los goles en contra 8, la diferencia se obtendrá al resolver 5 – 8 = - 3

COSTA RICA EN LOS MUNDIALES

Año	Ronda	Posición	GF	GC	Dif.
1990	Octavos de final	13°	4	6	-2
2002	Primera ronda	19°	5	6	-1
2006	Primera ronda	31°	3	9	-6
2014	Cuartos de final	8°	5	2	+3
Total	**3**	**14°**	**17**	**23**	-6

Fuente: Federación Costarricense de Fútbol.

Observe que la diferencia de goles total (al tomar en cuenta las cuatro participaciones de la tricolor en mundiales de fútbol) se puede obtener de dos formas:

Sumando el resultado de cada mundial

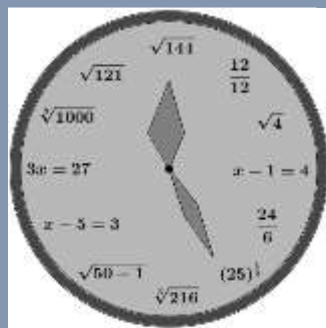
$$-2 + -1 + -6 + 3 = -6$$

Resolviendo la diferencia en los totales

$$17 - 23 = -6$$

Tiempo para practicar 1.6

Habilidades:
Identificar números enteros negativos en contextos reales.
Ubicar números enteros en la recta numérica.
Determinar el opuesto y el valor absoluto de un número entero.



1. Represente con un número entero cada situación que se plantea. Puede guiarse con la primera pregunta que se da resuelta.

(a) La Odisea fue escrita alrededor del año 800 antes de Cristo ___- 800___.

(b) La temperatura más baja registrada en la historia, se dio en Antártida, con aproximadamente 89° C bajo cero _____________

(c) Con 3 819 metros de altura, el cerro Chirripó constituye la más alta montaña de Costa Rica _____________

(d) El déficit fiscal de Costa Rica alcanzó 1 324 millones de dólares en agosto del 2012 _____________

(e) Según una noticia emitida por La Nación, la Isla del Coco es el único punto emergido, de una cordillera volcánica que resguarda sus secretos bajo las aguas del océano Pacífico. Algunas de sus montañas están a 1 000 metros bajo el nivel del mar. _____________

(f) Adelaida necesita solicitar un bono en el BANHVI, para lo cual se dirige a una agencia que se ubica 50 metros sur de la Iglesia La Dolorosa en San José _____________

(g) Costa Rica firmó el Acta de Independencia en el año 1821 d.C _____________

(h) El aula de Artes Plásticas se encuentra 15 metros a la derecha del salón de cómputo. _____________

(i) La campaña "Fuerza Costa Rica" recaudó en un primer corte ₡250 000 000 para reparar algunos centros educativos que fueron afectados por el terremoto que sacudió Guanacaste. _____________

(j) Aristóteles fue un gran filósofo y matemático que nació en el 384 a. C _____________

(k) Eulalia está feliz porque cada vez está más cerca de cumplir su sueño: tener su casita. Para ello se endeuda de diez millones de colones _____________

2. Un tiburón martillo, animal en peligro de extinción y capaz de comer un pez escorpión venenoso, está a una profundidad de 35 metros y observa precisamente a dicho pez, por lo cual, dispuesto a alimentarse, desciende 5 metros. Sigue al pez, para lo cual, sube 7 metros y termina bajando 10 metros, hasta dar con su presa. ¿Qué número entero representa la profundidad a la que atrapó el tiburón martillo al pez?

3. El Partenón es un templo de arquitectura helénica, dedicado a glorificar a su Partenos, sobrenombre que se daba a la diosa Atenea. Su construcción se inició en el año 447 antes de Cristo. Su construcción tardó 15 años. ¿En qué año se terminó de construir este monumento arquitectónico? Escriba el número entero que representa ese año.

4. El cerro Chirripó, punto más alto de Costa Rica, registró la temperatura más baja en Costa Rica, de sorprendentes 9° C bajo cero. En contraposición, la temperatura más alta registrada fue de 42°C, en Puntarenas. ¿Cuál es la diferencia entre esas temperaturas?

5. Se cree que Arquímedes inventó el tornillo. Después de 2146 años se inventó la computadora, en el año 1946. ¿En qué año inventó Arquímedes el tornillo? ¿Cuál número entero representa ese año?

6. Jovencio le compra a un “polaco” un pantalón en ₡ 25 000 y abona el primer día ₡ 2000. La segunda semana, hace otro abono de ₡ 7 000. La tercera semana abona ₡ 3500 y compra una camisa en ₡9 000. ¿Cuál número entero representa el saldo que tiene Jovencio?

7. Un buzo debe hacer unos trabajos en un artefacto que ha sido colocado en el mar. Para ello, se prepara en una base que se encuentra a 5 m sobre el nivel del mar. Baja 20 m para llegar al artefacto. Baja 2 metros más para hacer un arreglo en la tubería. Luego, asciende 7 metros para asegurar una pieza. Finalmente, vuelve a subir a la base. ¿Cuántos metros ascendió el buzo en el último desplazamiento hasta la plataforma?

8. He salido de mi casa hacia un café Internet, para lo cual me he dirigido 200 metros a la derecha. Al llegar al lugar, lo encuentro cerrado, así que busqué otro sitio que se encuentra a 675 metros a la izquierda de ese primer local.
   (a) ¿A cuántos metros me hallo de mi casa y que número entero lo representa?
   (b) ¿Cuántos metros recorrí desde que salí de mi casa hasta llegar al segundo café Internet?
   (c) Segismundo, mi compañero de colegio, me llama por teléfono para reunirnos y compartir la información que hemos obtenido de la Web. Si él vive a 1 kilómetro a la izquierda del café Internet en el que me ubicaba. ¿A cuántos metros se encuentra la casa de mi amigo, con respecto a la mía y qué número entero representa?

9. Telémaco tiene una deuda de ₡7 898 y abona ₡5 628. Su amiga Sedofa debe ₡ 9 786 y logra pagar ₡6 940. ¿Quién está en mejor situación económica?

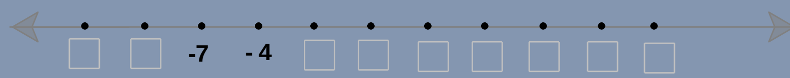
10. Complete el cuadro con la información que se le solicita. Puede guiarse con la primera pregunta que se muestra resuelta.

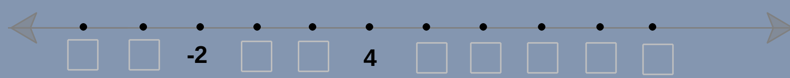
Situación	Número entero que la representa	Situación opuesta	Número entero que representa la situación opuesta.
Una ave ascendió 15 metros	15	Una ave descendió 15 metros	-15
Majencio caminó 3 km al sur de su lugar de trabajo			
Una construcción arquitectónica data del año 500 a. C			
Nemesio tuvo una ganancia de ₡2 000 000 en un negocio			
La temperatura en Canadá fue de los 0° C			

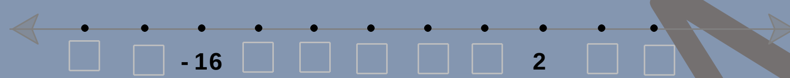
11. Represente cada situación mediante un número entero utilizando los conceptos (operaciones) vistos sobre números enteros. Se puede guiar la primera pregunta que aparece resuelta.

Situación	Operación	Resultado
Tabita anda en bicicleta y se dirige 5 km al Sur de su casa. ¿Cuál es la distancia a la que se encuentra de su casa?	$\lvert -5 \rvert$	5 km
Un pez se encuentra a 11 metros bajo el nivel del mar. Una tortuga se encuentra 20 metros más abajo. A qué distancia está la tortuga del nivel del mar		
La temperatura en cierta región de Canadá es de 10° C bajo cero. En ese momento, en México, la temperatura es opuesta. ¿Cuál es la temperatura en México?		
El opuesto de la distancia que hay entre el número – 8 y el cero		
El valor absoluto del sucesor de – 172		
El valor absoluto de – 9 aumentado en 15		
El opuesto de – 17 disminuido en 25		

12. Complete las siguientes rectas numéricas.

(a)


(b)


(c)


13. Considere la siguiente recta numérica.

De acuerdo con la información proporcionada, determine el valor numérico de cada expresión.

(a) Opuesto de A ____________________
(b) D + 5 ____________________
(c) C + E ____________________
(d) $|G|$ ____________________
(e) $-|A|$ ____________________
(f) F – H ____________________
(g) H – 7 ____________________
(h) J – 4 – H ____________________
(i) Sucesor de C ____________________
(j) Antecesor de B ____________________

14. Escriba en los espacios respectivos $>$, $=$, $<$ según sea

(a) -87 _____ -78 (b) $-|45|$ _____ $|-45|$
(c) $-(-15)$ _____ 15 (d) -98 _____ 0
(e) 0 _____ $|-65|$ (f) $-7+6$ _____ $6-5$
(g) $|-2+-3|$ _____ $|-2|+|-3|$ (h) $11-{}^{-}10$ _____ $23+{}^{-}2$
(i) $-(2+8)$ _____ $-5-5$ (j) -9 _____ $|-9|$

15. Resuelva las siguientes operaciones.

(a) $-7+-9=$

(b) $-3-{}^{-}7=$

(c) $-(-19)+28=$

(d) $-5-0=$

(e) $0-8=$

(f) $|-8-9|+-8=$

(g) $11-89=$

(h) $14-12=$

(i) $14\ -{}^{-}87=$

(j) $-{}^{-}87-9=$

(k) $-8-19-3=$

(l) $12-45-34=$

(m) $-34+3-89=$

(n) $-{}^{-}13-12-1=$

(ñ) $-20-78+23-1=$

(o) $-56\,489+679\,983+234\,452=$

(p) $-4-7+3-7-8+2=$

(q) $9-{}^{-}7+2-{}^{-}1-13-23+3-2=$

Reto de lógica:

Dos padres y dos hijos van a viajar en el tren hacia San José.
Compran sólo tres tiquetes y pasan sin problemas al tren y sin cometer ningún delito, ¿cómo lo hicieron?

Conocimiento: Multiplicación y división

Escenario de aprendizaje

La madre de Ponciano le enseñó que el que paga lo que debe sabe lo que tiene. Es por eso que Ponciano se dirige a Cayetano, el polaco de la familia, para hacer algunas cuentas y buscar arreglo a sus deudas.

Cayetano le indica a Ponciano que le adeuda ₡8 000 por cada camisa y en total, adquirió 5.

Ponciano le comenta que desea hacer 20 abonos (uno por semana) de igual cantidad de dinero para pagar la deuda.

(a) *¿De cuánto es la deuda total de Ponciano? Represente la cantidad con un número entero*

(b) *¿Cuánto deberá pagar en cada abono Ponciano? Represente la cantidad con un número entero*

(c) *¿Cuántos meses deberán pasar para que Ponciano haya pagado toda la deuda?*

Nos encontramos nuevamente en un escenario de pagos y deudas. Veamos cómo lo analizó Ponciano.

En la primera pregunta, se solicita conocer la deuda total de Ponciano, sabiendo que él debe 5 camisas cuyo costo unitario es de *₡8 000. Una posible estrategia de solución para Ponciano puede ser plantear una multiplicación, así:* $5 \cdot -8000$

Sin embargo, Ponciano no ha visto en clase todavía cómo resolver multiplicaciones con números negativos, solo se recuerda que la semana anterior había terminado de comprender la suma y resta de cantidades enteras.

Procede a extrapolar sus conocimientos previos, ya que le urge saber su deuda. Piensa cuál es la definición de multiplicación y recuerda lo que le dijo su maestra de escuela: ***"multiplicar es realizar sumas reiteradas"*** Así que decide usar esa experiencia y deduce que:

$$\begin{aligned} & 5 \cdot -8000 \\ &= -8000 + -8000 + -8000 + -8000 + -8000 \\ &= -40\,000 \end{aligned}$$

De este modo la deuda es de ₡40 000. Además, como es un joven muy analítico se percata de que resolver $5 \cdot -8000$ equivale a obtener $5 \cdot 8000$ y mantener el signo negativo. ¿Será esa observación cierta en otros casos?

Para ello, junto con su amigo Cayetano, revisa otras multiplicaciones, donde se involucran dos factores con diferente signo para analizar el comportamiento de dichas operaciones:

- $-7 \cdot 3 = -7 + -7 + -7 = -21$
- $5 \cdot -4 = -4 + -4 + -4 + -4 + -4 = -20$

En efecto, el razonamiento de Ponciano es correcto, y este resultado se puede resumir así:

+	•	+	=	+
+	•	−	=	−
−	•	+	=	−

⌗ Para la segunda pregunta, ya sabemos que Ponciano debe ₡40 000 y desea hacer 20 abonos. En este caso, la operación que ayuda al joven a dar con la respuesta es la división:

$$-40\ 000 \div 20$$

Es evidente que lo que debe dar como resultado es una deuda (cantidad negativa), ya que equivale a lo que debe pagar Ponciano en cada abono. Por tanto, se procede de modo similar a la multiplicación, resolviendo:

$$\begin{aligned} &-40\ 000 \div 20 \\ &=-\left(40\ 000 \div 20\right) \\ &=-\left(2\ 000\right)=-2\,000 \end{aligned}$$

Por tanto, el número entero que representa la deuda que debe ser pagada por cada abono es – 2 000.

⌗ La tercera pregunta, se trabaja tal como se había aprendido en primaria, puesto que las cantidades son positivas. Basta con resolver:

$$20 \div 4 = 5$$

Por lo que Ponciano necesitará 5 meses para pagar toda la deuda. De manera análoga, tenemos para la división el siguiente resumen:

+	÷	+	=	+
+	÷	−	=	−
−	÷	+	=	−

Es de imaginar que en este momento se tendrá la duda de cuál será el resultado de resolver una multiplicación en la que los dos factores son negativos.

No por casualidad ha quedado de última esta propiedad. De hecho, el resultado de esta multiplicación confundió y puso en debate a muchos matemáticos a través de la historia. Algunos tildaban de “disparate” el pretender tan siquiera realizar una multiplicación así.

Para entender la regla de la multiplicación analicemos un segundo escenario de aprendizaje.

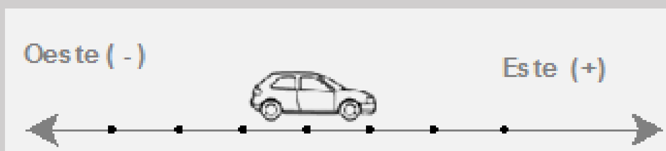
Escenario de aprendizaje

Silvina conduce un vehículo a 60 km/h hacia el este. Suponga que en este momento se encuentra en el kilómetro cero (esto solo para facilitar la comprensión)

(a) ¿En qué kilómetro se ubicará Silvina al cabo de 3 horas?
(b) ¿En qué kilómetro estaba hace 2 horas?

Suponga ahora, que Silvina conduce hacia el oeste con la misma velocidad.

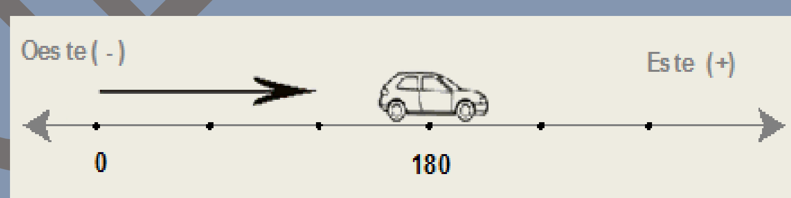
(c) ¿En qué kilómetro estará dentro de 4 horas, si en este momento está en el kilómetro cero?
(d) ¿En qué kilómetro se ubicaba hace 4 horas, si en este momento está en el kilómetro cero?



Para este escenario, relacionaremos el este con cantidades positivas y el oeste negativas. De esta forma, podremos dar respuesta a cada interrogante:

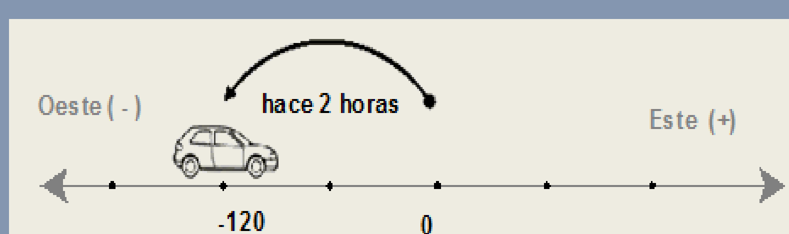
- Como Silvina conduce a *60 km/h* hacia el este, dentro de 3 horas estará en el kilómetro 180.

$$60 \bullet 3 = 180$$
$$(+) \bullet (+) = (+)$$



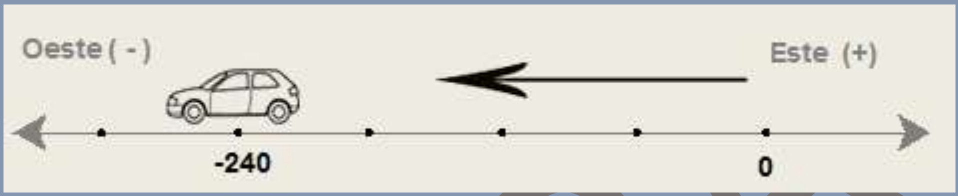
- En el segundo caso, Silvina, quien estaba ubicada en el kilómetro cero, dos horas antes debería estar en el kilómetro – 120.

$$60 \bullet -2 = -120$$
$$(+) \bullet (-) = (-)$$



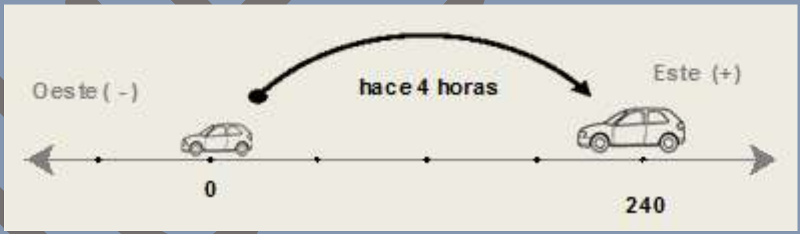
- Ahora Silvina conduce a *60 km/h* pero hacia el oeste. Por tanto, dentro de 4 horas, estará en el kilómetro – 240

$$-60 \bullet 4 = -240$$
$$(-) \bullet (+) = (-)$$



- En el cuarto caso, Silvina conduce a *60 km/h* hacia el oeste, por lo cual 4 horas antes estaba más hacia el este. Es decir, si en este momento Silvina ha recorrido en dirección oeste (negativa) y ha llegado al cero, hace 4 horas, debió estar en el kilómetro positivo 240.

$$-60 \bullet -4 = 240$$
$$(-) \bullet (-) = (+)$$



Con este último caso, se logró deducir la ansiada ley de signos: En una multiplicación, cuando dos factores son negativos, el resultado es positivo.

Incluso, se pueden usar las habilidades adquiridas anteriormente para deducir este resultado. Por ejemplo, si se desea efectuar $-3\cdot-4$ se puede resolver:

$$\begin{aligned} & -3\cdot-4 \\ &= -(3\cdot-4) \quad \text{Asociatividad} \\ &= -(-12) \end{aligned}$$

Pero la expresión $-(-12)$ representa el opuesto de -12, que es en efecto 12, por tanto

$$-3\cdot-4=-(3\cdot-4)=-(-12)=12$$

Ahora, ya podemos completar la Ley de signos para la multiplicación y división así:

+	•	+	=	+
+	•	−	=	−
−	•	+	=	−
−	•	−	=	+

+	÷	+	=	+
+	÷	−	=	−
−	÷	+	=	−
−	÷	−	=	+

Estas leyes de signos pueden generalizarse para más factores. Analicemos los siguientes ejemplos:

(*a*) $\underbrace{-5\cdot-3}\cdot 9\cdot-2$

$= \underbrace{15\cdot 9}\cdot-2$

$= 135\cdot-2$

$= -270$

⌗ ¿Cuántos factores negativos hay en esta multiplicación? ______________

(*b*) $\underbrace{-4\cdot-1}\cdot-6\cdot-3$

$= \underbrace{4\cdot-6}\cdot-3$

$= -24\cdot-3$

$= 72$

⌗ ¿Cuántos factores negativos hay en esta multiplicación? ______________

En el ejemplo (a) la cantidad de **factores negativos fue impar**, y el resultado **negativo**, en contraposición, en el ejemplo (b) había una cantidad **par de factores negativos**, por lo cual el resultado dio **positivo.**

Al conocer esta propiedad, si hay varios factores en una multiplicación, basta con resolver el producto con los valores absolutos, luego contar la cantidad de factores negativos y asignar el signo según lo analizado anteriormente.

(*c*) $-5\cdot-3\cdot 3\cdot-2$

Se resuelve $5\cdot3\cdot3\cdot2=90$ y se contabiliza tres factores negativos, por tanto, al ser un número impar, el resultado final es negativo: $-5\cdot-3\cdot3\cdot-2=-90$

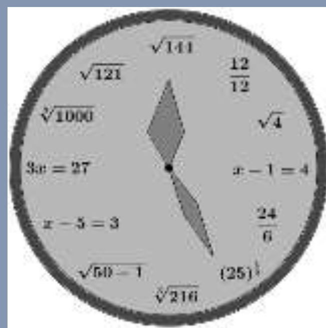
Todas estas leyes son también trasladadas al efectuar divisiones:

(*d*) $-100\div-2\div1\div5=10$

(*e*) $-8\cdot3\div-2\div4\cdot-5=-15$

Tiempo para practicar 1.7

Habilidades:
Resolver problemas aplicando multiplicaciones y divisiones de números enteros.



1. Resuelva las siguientes operaciones:

(a) $-7 \cdot -15 =$

(b) $-9 \cdot - \,^{-}4 =$

(c) $6 \cdot -8 =$

(d) $-4 \cdot -10 \cdot 9 =$

(e) $14 \cdot -30 \cdot 0 =$

(f) $|-6| \cdot -12 =$

(g) $63 \cdot -1 \cdot 4 \cdot 2 =$

(h) $-3 \cdot -5 \cdot -7 \cdot 2 \cdot -1 =$

(i) $225 \div -5 =$

(j) $-105 \div -15 =$

(k) $0 \div -3 =$

(l) $-465 \div 5 =$

(m) $-10000 \div -100 =$

(n) $54 \div -6 \div 3 =$

(ñ) $-45 \div 1 \cdot -2 =$

(o) $-169 \div -13 \cdot -4$

(p) $-4 \cdot 7 \div -2 \cdot 9 =$

(q) $-8 \cdot - \,^{-}7 \cdot 2 \div 4 \cdot -13 \cdot 0 \div -3 =$

2. Sin resolver la operación, indique el signo de su resultado

(a) $-8 \div -8 \cdot -4$

(b) $14 \cdot -9 \cdot 32$

(c) $1 \cdot -8 \cdot 65 \cdot -1 \cdot 7$

(d) $-3 \div -3 \cdot 2 \cdot 12$

(e) $14 \cdot -30 \cdot 2 \div 2 \cdot 12$

(f) $|-13| \cdot -|-7| \cdot |13|$

3. Un cangrejito en Jacó, se entierra a dos centímetros de profundidad en la arena por cada segundo. ¿A cuántos metros de profundidad estará en 5 segundos? Plantee una operación y exprese la respuesta con número entero.

4. La temperatura del aire baja, según se asciende en la atmósfera, a razón de 9 ºC cada 300 metros. Si la temperatura al nivel del mar en un punto determinado es de 0°C, ¿a qué altura vuela un avión si la temperatura del aire es de −99 ºC?

5. Medardo tiene una deuda con su hermano de ₡85 000. Si va a hacer los pagos en 25 abonos iguales, ¿cuánto deberá pagar en cada abono?

6. Un depósito de agua potable de 20 000 litros está lleno. Cada día salen 4000 litros y entran 3000 litros. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el depósito?

7. Un barco está hundido a unos 375 metros de profundidad. Con una maquinaria pesada se reflota (se pone a flote) a una velocidad de 3 metros por minuto. ¿A qué profundidad estará al cabo de dos horas?

8. Gualberto tiene una deuda y decide pagar ₡8 000 cada mes. ¿Cuál será el importe de la deuda si tarda dos años en saldarla? Exprese una operación que permita llegar a la respuesta.

9. Un repartidor de comida rápida gana ₡700 por cada entrega realizada, y gasta en combustible ₡120 (casi no varía este gasto pues solo atiende una zona relativamente pequeña). ¿Cuándo dinero le queda en un día que hizo 25 reparticiones?

10. Ladislao se dedica en vacaciones a confeccionar mesitas de madera para venderlas. Los gastos por cada 10 mesitas se resume:

Materiales	Costos unitarios
5 tablas de madera	₡ 4 000 por tabla
100 clavos	₡ 50 por clavo
2 tarros de pegamento	₡ 3 000 por tarro

Además gasta ₡200 en la fabricación de cada mesa por concepto de electricidad. Si cada mesita la vende a ₡ 9 000, ¿cuánto dinero gana Ladislao al vender 12 mesitas?

Reto de lógica:

El producto de dos números es 72 y su suma 73 ¿Cuál es su diferencia?

Conocimiento: Potencias

Potencias de números enteros

En el primer apartado, se brindó la definición de potencia, ejemplificada con el caso del trigo y el ajedrez.

En esta sección, se profundizará sobre el tema, mediante el estudio de potencias que incluyan bases enteras (tanto positivas como negativas).

Para ello, analicemos los siguientes ejercicios:

- $7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2\ 401$
- $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

En este caso se indica con paréntesis, el número negativo, para aclarar que el – 2 es la base.

Nótese que al ser el **exponente par y la base negativa**, se efectuará una multiplicación con una cantidad de factores negativos también pares, por tanto, el **resultado será positivo.**

Si la base **no tiene el paréntesis**, el significado de la operación cambia, puesto que se estaría solicitando **el opuesto de la potencia indicada**. Seguidamente se ejemplifica:

- $-2^4 = -\left(2^4\right) = -\left(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\right) = -\left(16\right) = -16$
- $-5^3 = -\left(5^3\right) = -\left(5 \cdot 5 \cdot 5\right) = -\left(125\right) = -125$
- $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$
-

Para esta operación, **el exponente es impar y la base negativa**, por tanto, se resolverá un producto con una cantidad impar de factores negativos, lo que da como **resultado** un número entero **negativo.**

- $-1^4 = -1$
- $-5^1 = -5$
- $\left|-8\right|^3 = 8^3 = 512$

Propiedades de potencias

La simplificación, de modo general, toma gran importancia en diversos campos del saber. Buscar expresiones más sencillas que la original, pero que sean equivalentes, es el objetivo de simplificar. Por ejemplo, un ingeniero busca simplificar un circuito eléctrico, de modo que logre ahorrar tiempo y espacio.

Al trabajar con potencias, resulta de gran trascendencia conocer algunas propiedades que nos permitan resolver simplificaciones. Por ejemplo, si se desea resolver $\frac{7^{15} \cdot 7^{35}}{7^{47}}$, es poco práctico resolver cada potencia, efectuar el producto y luego realizar el cociente. Esto nos demandaría muchísimo tiempo y los valores obtenidos en cada proceso serán tan grandes, que ni en una calculadora cabrían las cifras.

Veamos:

7^{15} = 4 747 561 509 943

7^{35} = 378 818 692 265 664 781 682 717 625 943

7^{47} = 5 243 338 316 756 303 634 461 458 718 861 951 455 543

$7^{15}\bullet 7^{35}$ = 1798 465 042 647 412 146 620 280 340 569 649 349 251 249

$\left(7^{15}\bullet 7^{35}\right)\div 7^{47} = 343$

Este ejemplo nos sugiere la búsqueda de métodos más efectivos, con los cuales evitemos resolver cada potencia por aparte.

Para ello, analicemos los siguientes cálculos, con exponentes más pequeños:

- $2^3\bullet 2^2$

Al usar el razonamiento anterior, calculamos:

$$2^3 = 2\bullet 2\bullet 2 = 8$$
$$2^2 = 2\bullet 2 = 4$$

Por lo cual $2^3\bullet 2^2 = 8\bullet 4 = 32$

Sin embargo, también se puede expresar dicho producto así:

$$2^3\bullet 2^2 = (2\bullet 2\bullet 2)\bullet(2\bullet 2)$$

Ahora bien, la expresión $(2\bullet 2\bullet 2)\bullet(2\bullet 2)$ en notación de potencia equivale a 2^5, que en efecto es igual a 32.

Es decir $2^3\bullet 2^2 = 2^5$

¿Logras ver alguna relación en esta última igualdad?

Es observable que:

$$2^3\bullet 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

Este resultado se puede generalizar así:

$$\boxed{a^m\bullet a^n = a^{m+n}}$$

Es importante destacar que este resultado es válido únicamente si las bases son iguales. Esta propiedad se expresa:

Para multiplicar potencias de igual base, se conserva la base y se suman los exponentes.

Verifique este resultado con las siguientes multiplicaciones

(a) $3^3\bullet 3^4 = 3^{\square}$

(b) $(-5)^2\bullet(-5)^3 = (-5)^{\square}$

- $5^5\div 5^3$

En este caso, podemos realizar un razonamiento similar al anterior, con lo cual obtenemos que:

$$\frac{5^5}{5^3} = \frac{5\bullet 5\bullet 5\bullet 5\bullet 5}{5\bullet 5\bullet 5}$$

Y se aplica la cancelación:

$$\frac{5^5}{5^3} = \frac{5\bullet 5\bullet \cancel{5}\bullet \cancel{5}\bullet \cancel{5}}{\cancel{5}\bullet \cancel{5}\bullet \cancel{5}} = 5\bullet 5 = 5^2$$

Se concluye que $\frac{5^5}{5^3} = 5^{5-3} = 5^2$

Esta propiedad, de modo general, se indica de la siguiente manera:

$$\boxed{a^m\div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Para dividir potencias de igual base, se conserva la base y se restan los exponentes.

- $\left(2^3\right)^2$

Ahora, se presenta una potencia cuya base también es una potencia. Si resolvemos primero el paréntesis, se tiene:

$$\left(2^3\right)^2 = \left(8\right)^2$$

Luego se resuelve la potencia resultante, obteniendo que $\left(2^3\right)^2 = \left(8\right)^2 = 64$

Pero, se podrá expresar el 64 de modo que se relacione con $\left(2^3\right)^2$.

Veamos:

Si factorizamos el 64, se obtiene:

$$\begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$64 = 2^6$

¿Existirá alguna relación entre $64=2^6$ y 2^6?

Efectivamente, $2^6 = 2^{3 \cdot 2}$

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}}$$

Para resolver potencia de una potencia, se conserva la base y se multiplican los exponentes.

Con estas propiedades, el ejercicio inicial resulta muy sencillo. Analicemos:

$$\frac{7^{15} \cdot 7^{35}}{7^{47}} = \frac{7^{15+35}}{7^{47}} = \frac{7^{50}}{7^{47}} = 7^{50-47} = 7^3 = 343$$

- $\dfrac{9 \cdot 27^6}{\left(243\right)^3 \cdot 3}$

Para simplificar esta expresión, sin necesidad de resolver cada potencia, es recomendable factorizar cada una de las bases, y luego aplicar las propiedades estudiadas:

$$\frac{9 \cdot 27^6}{\left(243\right)^3 \cdot 3} = \frac{3^2 \cdot \left(3^3\right)^6}{\left(3^5\right)^3 \cdot 3^1}$$

$$= \frac{3^2 \cdot 3^{18}}{3^{15} \cdot 3^1} = \frac{3^{20}}{3^{16}} = 3^4 = 81$$

- $\dfrac{\left[\left(-7^3\right)^2\right]^8 \cdot -7^2}{\left(-7^2 \cdot -7^3\right)^2 \cdot \left(\left(-7\right)^2\right)^{20}}$

Analice la resolución:

$$\frac{\left[\left(-7^3\right)^2\right]^8 \cdot -7^2}{\left(-7^2 \cdot -7^3\right)^2 \cdot \left(\left(-7\right)^2\right)^{20}}$$

$$= \frac{7^{48} \cdot -7^2}{\left(7^5\right)^2 \cdot \left(7^2\right)^{20}}$$

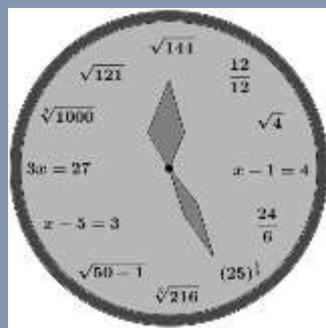
$$= \frac{-7^{50}}{7^{10} \cdot 7^{40}}$$

$$= \frac{-\left(7^{50}\right)}{\left(7^{50}\right)}$$

$$= -\left(7^0\right) = -1$$

Tiempo para practicar 1.8

Habilidades:
Calcular potencias cuya base sea un número entero y el exponente sea un número natural.
Utilizar las propiedades de potencias para representar el resultado de operaciones con potencias de igual base



1. Dé el resultado de cada expresión.

(a) $(-6)^3 =$

(b) $(-9)^2 =$

(c) $1^{25} =$

(d) $-10^4 =$

(e) $(-11)^2$

(f) $-2^7 =$

(g) $-1^{100} =$

(h) $(-325)^0$

(i) $(225 \div -25)^2 =$

(j) $(-105 \div 15)^3 =$

2. Escriba en los espacios en blanco los símbolos >, = , <, según sea

(a) $(-9)^{15}$ ______ -9^{15}

(b) $(-17)^{10}$ ______ -17^{10}

(c) $(-24)^8$ ______ 24^8

(d) -10^4 ______ -100^2

(e) $(-1)^{45}$ ______ -1^2

(f) $|-2|^7$ ______ 2^7

(g) $(-97)^0$ ______ $(-7)^0$

(h) -1^9 ______ -56^0

3. Exprese como una sola potencia cada expresión. Puede guiarse con el ejemplo resuelto.

(a) $6^3 \cdot 6^6 = 6^9$

(b) $-15^3 \cdot -15^5 \cdot -15^9 =$

(c) $-7^5 \cdot 7^9 \cdot -7 =$

(d) $-5^9 \cdot -4^9 \cdot 5^{11} \cdot -4^2 =$

(e) $8^3 \cdot 8 \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 3^9 =$

(f) $(23^4)^5 =$

(g) $17^{34} \div 17^{23} =$

(h) $-9^{12} \div 9^{9} \bullet -9 =$

(i) $-5^{10} \div 5^{9} =$

(j) $(-11)^{20} \div (-11)^{17} =$

(k) $-13^{12} \bullet 13^{9} \div -13^{21} =$

(l) $\left(14^{-4}\right)^{-5} =$

(m) $\left(-9^{5}\right)^{9} =$

(n) $\left(-11^{3}\right)^{8} =$

(ñ) $\left(-3^{3}\right)^{2} \bullet \left(-3^{7}\right)^{3} =$

(o) $\left(7^{8}\right)^{5} \div \left(-7^{5}\right)^{7}$

(p) $\left(-4^{3} \bullet 4^{7} \div 4 \bullet 4^{3}\right)^{7} =$

(q) $\left[\left(-29^{3}\right)^{3} \div \left(-29^{2}\right)^{4}\right]^{11}$

4. Exprese cada producto en notación de potencia.

(a) $9 \bullet 9 \bullet 9 =$

(b) $-7 \bullet -7 \bullet -7 \bullet -7 =$

(c) $-(11 \bullet 11) =$

(d) $-6 \bullet -6 \bullet -6 =$

(e) $-8 \bullet 8 \bullet -8 \bullet 8 \bullet 8 =$

5. Simplifique al máximo cada expresión, desarrollando la potencia final.

(a) $\left[\left(2^{15} \bullet 2^{7}\right)^{5}\right] \div \left[\left(2^{5}\right)^{10} \bullet 2 \bullet 2^{55}\right]$

(b) $\dfrac{11 \bullet \left(11^{2}\right)^{5} \bullet \left[\left(-11^{2}\right)^{3}\right]^{4}}{\left(11^{2} \bullet -11^{3}\right)^{7}}$

(c) $\dfrac{(125)^{3} \bullet (25)^{4}}{(625)^{2} \bullet 5}$

(d) $\dfrac{\left(8^{7} \bullet 2\right)^{5}}{\left[(64)^{2} \div 2 \bullet 8\right]^{7}}$

Reto de lógica:
Todos los enteros positivos de 4 dígitos que tienen los mismos cuatro dígitos que el número 3210, son escritos en la pizarra en orden ascendente. ¿Cuál es la diferencia más grande posible entre dos números vecinos en la pizarra?

Conocimiento: Radicación

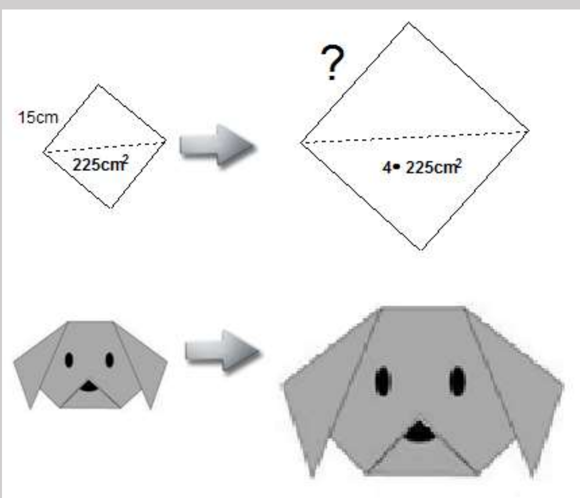
Escenario de aprendizaje

Cirilo sabe hacer un perrito de origami. Para lo cual necesita una hoja de lado 15cm

Resulta que su creación le gustó tanto a su amiga, que ella le pidió que construyera varios modelos similares, para una campaña de castración de animales, que están promoviendo en el barrio.

Sin embargo el modelo que hizo Cirilo de $225cm^2$ de área (del cuadrado), era muy pequeño para tales fines, por lo que su amiga le pide que cuadruplique esa área.

¿Cuánto debe medir el lado de la hoja para realizar el perrito, según la petición de la amiga?



Lo primero que se debe tener presente, es el área que está solicitando la amiga de Cirilo, la cual es el cuádruplo de 225. Esto es $225 \cdot 4 = 900cm^2$, por lo tanto, Cirilo conoce el área de la hoja; pero necesita saber la longitud de lado para poder medir y recortar los cuadrados.

Él recuerda que para hallar el área de $225cm^2$ resolvió la multiplicación de $15 \cdot 15$, pero ahora el proceso es inverso.

Cirilo debe buscar dos números iguales, cuyo producto dé 900 cm^2

Luego de muchos intentos, logró determinar que la longitud del lado debía ser de 30 cm, ya que $30 \cdot 30 = 900$. Sin embargo, le comentó a su amiga que "tantear" valores para llegar a esa respuesta le consumió mucho tiempo.

Realmente lo que hizo Cirilo fue un proceso **inverso** a la potenciación, al que se le llama **RADICACIÓN.**

La radicación es la operación inversa a la potenciación. Consiste en que dados dos números, llamados subradical e índice, se halle un tercero, llamado raíz, tal que, elevado al índice, sea igual al subradical

$$\sqrt[índice]{subradical} = raíz$$

$$Si \quad \sqrt[b]{a} = c \quad \text{entonces} \quad c^b = a$$

Mediante este proceso, el valor del lado del cuadrado puede ser calculado mediante:

$$\sqrt[2]{900} = 30$$

Esta expresión se lee **la raíz cuadrada de 900 es 30,** ya que como se logró apreciar en el escenario de aprendizaje, geométricamente representa la medida del lado de un cuadrado de área 900.

Como se indicó en la definición, $\sqrt[2]{900}$ representa la operación inversa de la potenciación, así:

$\sqrt[2]{900} = 30$ puesto que $30^2 = 900$

De este modo $\sqrt[2]{900}$ indica el número que multiplicado dos veces por sí mismo da como resultado 900

En general $\sqrt[m]{n} = a$ indica que a es un número que al multiplicarse m veces por sí mismo da como resultado n.

Ahora bien, puede que el valor de a no sea único. Incluso en otros contextos no geométricos, podría haber dos valores para a. Por ejemplo, acabamos de determinar que $\sqrt[2]{900} = 30$ ya que $30 \bullet 30 = 900$, sin embargo, hay otro número que cumple esa condición, el - 30, pues efectivamente $-30 \bullet -30 = 900$.

Por tanto $\sqrt[2]{900} = 30 \;\; y - 30$

La raíz cuadrada tiene tanto uso en la Matemática, que por comodidad se prescinde escribir su índice, de tal manera que por ejemplo $\sqrt[2]{900}$ se puede expresar como $\sqrt{900}$.

Ejemplos

- $\sqrt[2]{5^2} = 5$
- $\sqrt[3]{(-7)^3} = -7$
- $\sqrt[4]{(-9)^4} = \sqrt[4]{9^4} = 9$
- $\sqrt[7]{1} = 1$
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt[6]{7^6 \bullet 3^6} = 7 \bullet 3 = 21$

Hasta el momento, a pesar de que se resolvió el caso de Cirilo, no se ha dado un mecanismo más eficiente para encontrar el valor de una raíz determinada. Sin embargo, los ejemplos anteriores dan una luz de cómo lograrlo, pues si el exponente del subradical y el índice coinciden, se puede hacer la extracción respectiva.

Al siguiente proceso, se le conoce como **extracción de factores de la raíz**, y consiste en realizar la factorización prima del subradical y formar potencias cuyo exponente sea igual al índice de la raíz.

- $\sqrt[2]{900}$

900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Como el índice es 2, se deben agrupar potencias cuyo exponente también sea 2

$900 = 2^2 \bullet 3^2 \bullet 5^2$

Por tanto $\sqrt[2]{900} = \sqrt[2]{2^2 \bullet 3^2 \bullet 5^2} = 2 \bullet 3 \bullet 5 = 30$

- $\sqrt[3]{2\,744}$

2744	2
1372	2
686	2
343	7
49	7
7	7
1	

Como el índice es 3, se deben agrupar potencias cuyo exponente también sea 3

$2744 = 2^3 \bullet 7^3$

Se concluye que

$\sqrt[3]{2744} = \sqrt[2]{2^3 \bullet 7^3} = 2 \bullet 7 = 14$.

Es decir, $14^3 = 2744$.

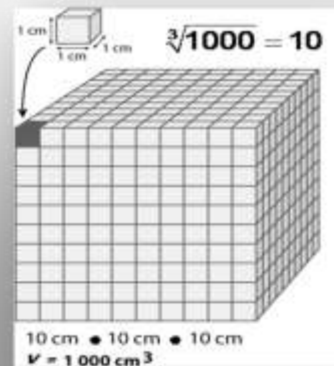
⌗ $\sqrt[5]{-243}$

- 243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Como el índice es 5, se deben agrupar potencias cuyo exponente también sea 5

$$-243 = -\left(3^5\right)$$

Cuando el índice es 3, se lee **raíz cúbica**, pues proviene de calcular el lado de un cubo dado su volumen.



Entonces $\sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{-(3)^5} = -3$

⌗ $\sqrt[2]{-16}$

En este caso, si nos vamos a la definición, debemos buscar un número que multiplicado por sí mismo dos veces dé como resultado – 16.

Sin embargo esto es imposible, pues siempre que multipliquemos dos números con igual signo, el resultado será positivo:

$4 \bullet 4 = 16 \neq -16, \qquad -4 \bullet -4 = 16 \neq -16$

Por tanto se dice que $\sqrt[2]{-16}$ no existe en los números enteros. Esto se expresa con el símbolo $\nexists$

- **Si el subradical es negativo y el índice es par, la raíz no existe en los números enteros.**

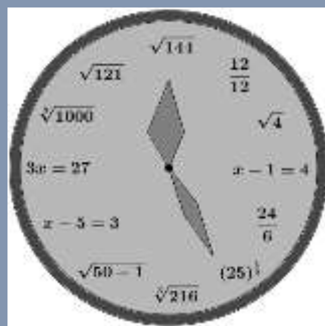
$\sqrt[6]{-64}$ no existe en los números enteros

- **Si el subradical es negativo y el índice es impar, la raíz será negativa**

$\sqrt[3]{-125} = -5$

Tiempo para practicar 1.9

Habilidades:
Identificar la relación entre potencias y raíces como operaciones inversas.
Calcular la raíz de un número entero cuyo resultado sea entero.



1. Exprese en notación radical, cada potencia.

(a) $5^3 = 125$ (b) $6^2 = 36$

(c) $7^2 = 49$ (d) $1^7 = 1$

(e) $(-4)^5 = -1024$ (f) $0^4 = 0$

2. Exprese en notación de potencia, cada radical.

(a) $\sqrt[5]{32} = 2$ (b) $\sqrt[3]{729} = 9$

(c) $\sqrt{225} = 15$ (d) $\sqrt[7]{-78125} = -5$

(e) $\sqrt[4]{1} = 1$ (f) $\sqrt{0} = 0$

3. Obtenga el valor en cada expresión. Si no está definida en los números enteros, justificar la razón.

(a) $\sqrt[8]{(-6)^8} =$ (b) $\sqrt{11^2} =$

(c) $\sqrt[5]{3^5 \cdot 7^5} =$ (d) $\sqrt[3]{9^3 \cdot 2^6} =$

(e) $\sqrt[4]{-8^4} =$ (f) $\sqrt[7]{-4^7} =$

(g) $\sqrt[9]{0} =$ (h) $\sqrt[8]{-1} =$

(i) $\sqrt[3]{512} =$ (j) $\sqrt{196} =$

(k) $\sqrt[7]{-2187} =$ (l) $\sqrt[4]{10\,000} =$

(m) $-\sqrt[3]{-3375} =$ (n) $\sqrt[5]{243} =$

(ñ) $\sqrt{121} - \sqrt{225} =$ (o) $\sqrt{25 + 144} =$

Reto de lógica:

Tengo 3 primos; el mayor se llama Valentiano, el del medio, Venancio y el menor, Verecundo. La suma de sus edades me da 30 años. Además, por ser primos, la edad de cada uno de ellos es un número primo.

Sabiendo que ninguno de ellos tiene más de 21 años, ¿cuál es la edad de cada uno de mis primos?

Conocimiento: Operaciones combinadas

Escenario de aprendizaje

El señor Justino va con toda su familia en diciembre a recoger café, para ayudarse con los gastos de la entrada a clases del año siguiente.

El pago de la cajuela está a ₡650. El día martes don Justino logró recolectar 10 cajuelas, su hijo 8 y su esposa 4.

El día anterior, Justino compró un copo de los que venden en las cercanías de la medición de café, a un costo de ₡400. Su esposa e hijo también se antojaron, pero de los que venden con doble leche, por lo que les costó ₡500 cada uno. El copero anotó esa deuda, la cual sería pagada el martes.

Los tres unen las ganancias del martes y pagan juntos las deudas. El dinero que les queda se lo dividen en partes iguales.

Expresé mediante una operación combinada la ganancia final que recibió cada miembro de la familia el día martes, luego de pagar sus deudas al copero.

Las operaciones combinadas con números enteros, se resuelven de modo similar a las que se desarrollaron en los primeros temas de esta unidad.

Según el escenario de aprendizaje, la familia de don Justino recibe *₡650* por cada cajuela de café. La ganancia total se puede obtener así: $650(10+8+4)$

La deuda que tiene la familia con el copero, está dada por $-400+2\bullet-500$

De modo que el dinero que le queda a la familia será de:

$$650(10+8+4)+-400+2\bullet-500$$

Ahora bien, al dividir el dinero entre los tres, a cada uno le corresponde:

$$\left[650(10+8+4)+-400+2\bullet-500\right]\div 3$$

El orden para resolver operaciones combinadas es:

- Paréntesis.
- Potencias y radicales, según el orden en que aparezca.
- Multiplicación y división, según el orden en que aparezca.
- Suma y resta.

Por tanto, la resolución del caso de don Justino es:

$$\left[650\underbrace{(10+8+4)}+-400+2\bullet-500\right]\div 3$$

$$=\left[\underbrace{650\ \bullet\ 22}+-400+\underbrace{2\bullet-500}\right]\div 3$$

$$=\left[14\,300\ \underbrace{+-400\ +-1000}\right]\div 3$$

$$=\left[\underbrace{14\,300\ +\ -1400}\right]\div 3$$

$$=\underbrace{12\,900\div 3}$$

$$=4\,300$$

Así a cada miembro de la familia de Justino le corresponden ₡ 4 300

Ejemplos de operaciones combinadas

1) $3-5\cdot 2+4\div -2$
$=3-10+-2$
$=3-12=\ -9$

2) $40\div 20\cdot -5-8\div -4$
$=2\cdot -5+2$
$=-10+2=-8$

3) $4\cdot 3^2\div 2-\sqrt[3]{512}$
$=4\cdot 9\div 2-8$
$=36\div 2-8$
$=18-8=10$

4) $\dfrac{-6-{}^{-}3+2\cdot 5-4\cdot 7}{10-7}$
$=\dfrac{-6+3+10-28}{10-7}$
$=\dfrac{-34+13}{3}$
$=\dfrac{-21}{3}=-7$

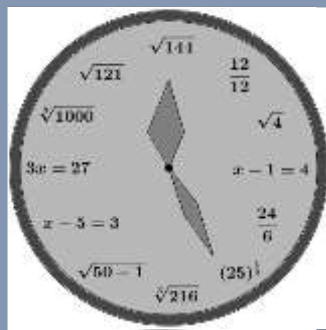
5) $3+\left[(3--5)+\left(4\cdot\sqrt{9}\right)-(5+2\cdot 1)\right]$
$=3+\left[8+(4\cdot 3)-(5+2)\right]$
$=3+\left[8+12-7\right]=3+13=16$

6) $\left\{\left[1+5\left(3-{}^{-}4\right)+\sqrt[4]{(-2)^4}\right]-1\right\}$
$=\left\{\left[1+5\bullet 7+2\right]-1\right\}$
$=\left\{\left[1+35+2\right]-1\right\}$
$=\left\{38-1\right\}=37$

7) $(11\cdot 2\div -1)\div\left\{\left[3^2+\left(-7\cdot 2+\sqrt{100}\right)\right]-3\right\}$
$=(-22\div -1)\div\left\{\left[3^2+(-14+10)\right]-3\right\}$
$=-22\div\left\{\left[9+-4\right]-3\right\}$
$=-22\div\left\{5-3\right\}=-22\div 2=-11$

Tiempo para practicar 1.10

Habilidades:
Calcular resultados de operaciones con números enteros en expresiones que incorporen la combinación de operaciones con paréntesis o sin ellos.



1. Simplifique al máximo cada expresión.

(a) $-12+8\cdot-3-18\div6+4$

(b) $2-(5-{}^{-}8)-3(9-4)$

(c) $6+(12-48\div8)-1$

(d) $(9-25)\div(16-12\cdot-2\cdot-1)$

(e) $-\{5[18\div(13-4)]+6\}$

(f) $108\div\{8-[3(-3-2)]+4\}$

(g) $[(-7+2)\cdot5-9]-2$

(h) $9-26\div13-7\cdot-3$

(i) $\sqrt[3]{27}+3\cdot-\sqrt[5]{32}-27\div(-3)^2-{}^{-}1$

(j) $(4-7)\left(\sqrt[3]{729}-2^4\right)-8-{}^{-}5$

(k) $-25+16\div\sqrt[3]{8}-(-1)^3\cdot-7$

(l) $\dfrac{4^{12}\div4^{10}+1}{5-\sqrt[3]{216}\cdot-2}$

(m) $-(5-{}^{-}7)\div\sqrt[4]{256}+-7(-2^3+7)$

(n) $-4^3\div\sqrt{20-4}-(-12-{}^{-}8)\cdot7$

(ñ) $-3-5\cdot\sqrt[5]{(-11)^5}-6^3\div-9^1-7^0$

(o) $5-\{-3+[-2(4^2-30)\div\sqrt{49}]\div-3^0\}$

Reto de lógica:

Un señor compra 50 candelas. Cada día quema una candela y le sobra un pedacito. Siempre hace una nueva de la cera sobrante de siete candelas usadas. ¿Después de cuántos días tendrá que comprar candelas nuevamente?

¡A desempeñar nuestras habilidades!

1. Juego de dados y cálculos.

Al final del libro, hay modelos para que construya dos dados, o bien, puede conseguir dos dados cualesquiera y les coloca con un papel los números que se indican.

Cada estudiante, por turno, lanza los dos dados. Realiza alguna operación (suma, resta, multiplicación, división o potencia) de modo que logre obtener como resultado un número de los que están en el cuadro.

Se obtiene un punto, cada vez que un estudiante logre tener tres números consecutivos del cuadro; ya sea de modo horizontal, vertical o diagonal (como cuando se juega gato). A estos tres números les llamaremos línea de tres.

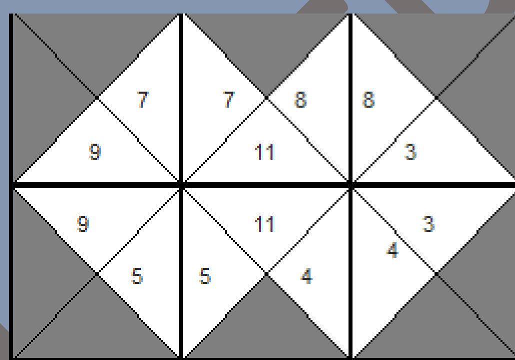
Es conveniente usar lapicero de diferente color para diferenciar a cada estudiante. El juego se termina cuando alguno de los dos estudiantes tenga ya 8 líneas de tres.

-2	7	-5	0	3	-8	-25	12	-1	4	-9	-6	21	20	16
-1	12	33	-22	35	-1	-3	4	-7	-13	22	17	31	30	-21
1	32	-13	-49	21	28	16	2	16	22	28	8	-22	-8	7
-4	-5	-30	18	49	-12	2	-5	3	-6	-32	-7	26	-2	0
18	21	11	-32	-10	-8	-11	-17	7	-5	9	-25	10	4	6
-14	5	-20	-7	0	-25	15	-10	-31	1	14	1	-1	-19	-12
-25	0	-24	-3	-2	7	-5	10	90	0	-5	-8	8	-5	-4
-3	7	-2	9	25	15	21	5	14	24	9	-5	-9	-50	-17
-3	20	-7	-4	30	-11	-8	36	27	3	14	5	11	-8	-35
-5	40	-90	36	-18	16	24	20	6	-33	13	-40	-10	40	2
-16	-8	50	5	40	-6	3	-6	-5	2	4	6	21	23	17
-50	15	26	-8	-26	3	-15	-33	7	50	-8	7	12	49	35
8	0	-11	-1	0	-6	14	13	-16	-9	6	-20	13	-10	-15
-9	3	0	-30	24	-19	2	-14	4	0	9	1	-40	50	10
16	25	18	10	1	16	19	12	11	-9	-18	-9	12	-8	24

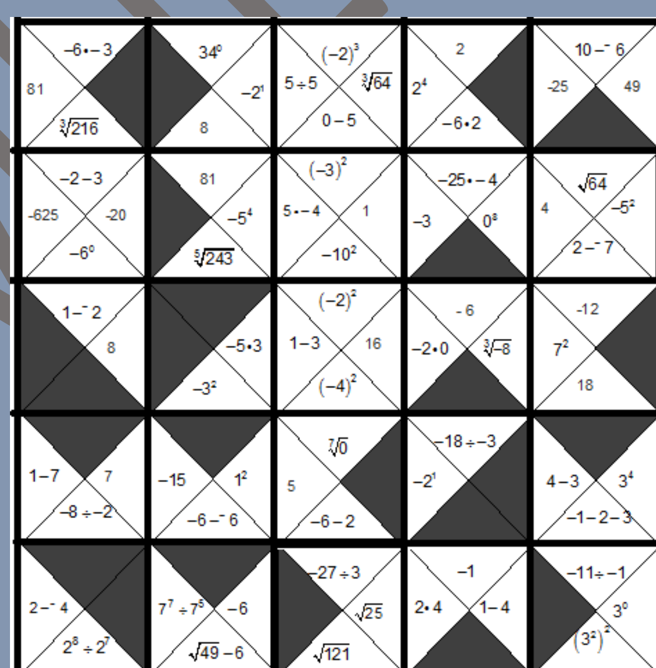
¡A desempeñar nuestras habilidades!

Rompecabezas operacional.

1. Recorte el rompecabezas que se anexa al final del libro de modo que resulten 25 cuadrados.
2. Resuelva cada operación que aparece.
3. Construya con los cuadros pequeños, un nuevo cuadrado de 5 x 5, de tal forma que, estando todos los números hacia arriba, queden en todos los bordes valores equivalentes.
4. Pegue el cuadrado en el cuaderno.
5. Un ejemplo de cómo podrían quedar unas piezas del cuadrado:



Ver la versión ampliada al final del libro



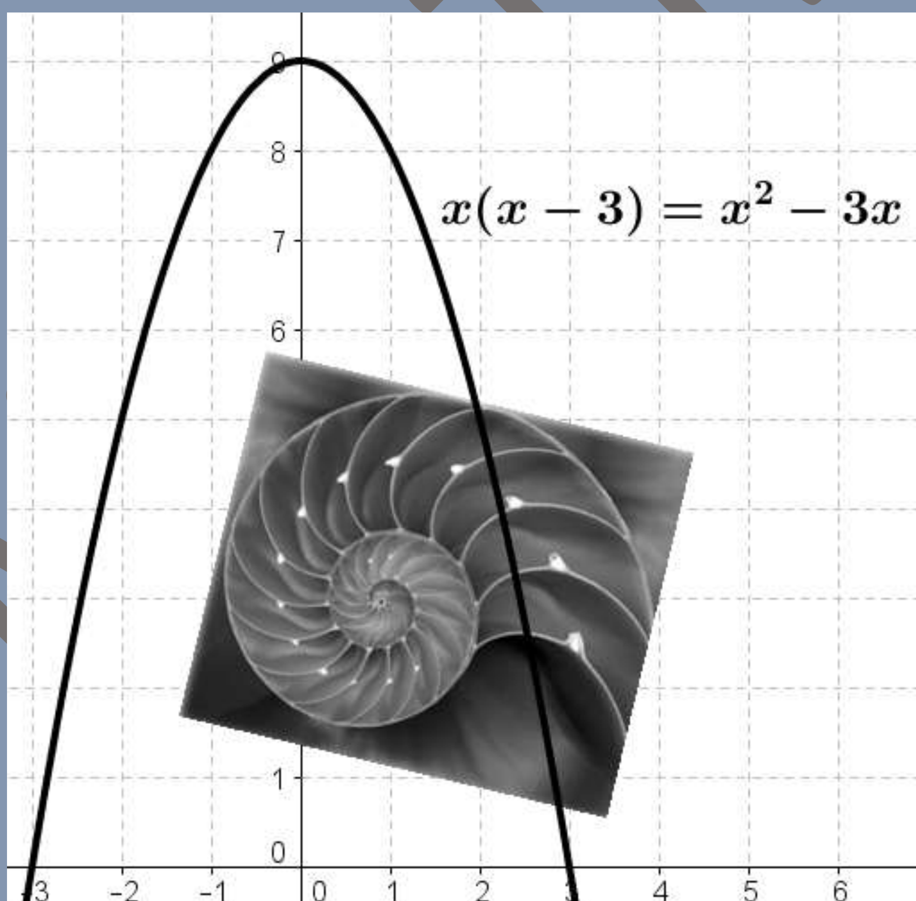
Ejercicios adicionales

Resuelva lo que se le solicita y complete el cuadro mágico con las respectivas respuestas.

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.
9.	10.	11.	12.
13.	14.	15.	16.

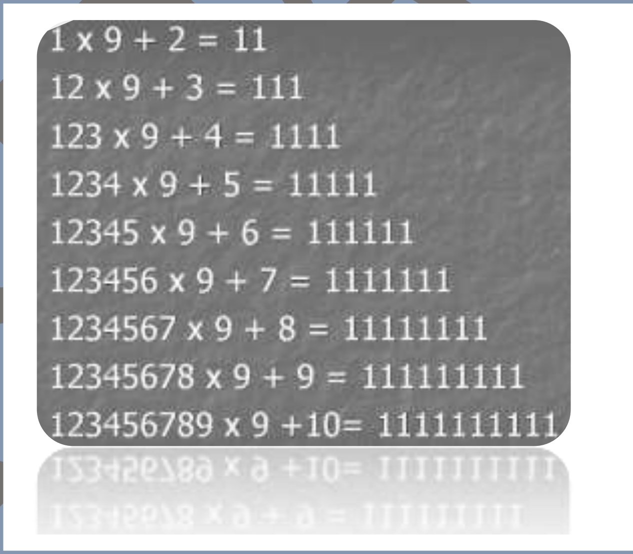
1) La temperatura que resulta luego de haber subido 6°C a partir de -10°C
2) El resultado de $\left|-4-3\right|$
3) El opuesto de 7
4) El resultado de sumar un numero entero con su opuesto
5) $-24 \div 12$
6) $2-3+5-8-1$
7) $10 \bullet -3 \div 15$
8) $5^2 - 2 \bullet 5$
9) $4(3-6)+13$
10) $-3^3 \div 3^2$
11) El piso del que salió el ascensor que llegó a la planta -2, bajando 8 pisos
12) $-2-3 \bullet 2$
13) $(-9)^0$
14) Año que nació una persona que murió en el 38 a.C a los 41 años.
15) $-7^0 \div (-6)^0$
16) $-15-3-{}^{-}7+2 \bullet 5$

RELACIONES Y ÁLGEBRA



La humanidad siempre se ha sorprendido por las relaciones numéricas y geométricas que existen en la naturaleza. Por ejemplo, el científico Kepler, creía en la existencia de un orden matemático oculto en la naturaleza, el cual se manifestaba mediante armonías del Universo.

Por su parte, Leonardo Da Vinci, plasmaba en sus obras un conocimiento matemático de la naturaleza que sorprende aún en nuestros días. También existen patrones matemáticos que modelan actividades humanas. Por ejemplo, al tomar un taxi, existe una relación entre el precio por pagar, la distancia recorrida, el tiempo en espera y el valor del primer kilómetro. La misma estatura de una persona y su masa corporal ideal están relacionadas con expresiones matemáticas.



En este capítulo nos introduciremos en el mundo de esas relaciones y fórmulas matemáticas, que nos darán los conocimientos necesarios para resolver situaciones que se pueden presentar en el diario quehacer.

Conocimiento: Sucesiones

Escenario de aprendizaje

En una fábrica de camisetas, por día, hay un gasto de ₡60 000 que incluye el alquiler del local y la planilla (pago a los empleados), por cada camisa que se fabrique, se gasta ₡1000 en materiales y electricidad.

(a) ¿Cuál es el gasto en colones en un día por la confección de: 1 camiseta, 2 camisetas, 3 camisetas, 200 camisetas?

Para visualizar la situación expuesta, se puede usar una tabla

Número de camisas	Costo
1	1000 + 60 000 = 61 000
2	$1000 \cdot 2 + 60000 = 62000$
3	$1000 \cdot 3 + 60000 = 63000$
….	….
200	$1000 \cdot 200 + 60000$ $= 260000$

En este escenario, existe una relación entre el gasto y el número de camisetas que se confeccionan.

Se puede apreciar que hay un término que es fijo, es decir, que sin importar la cantidad de camisas fabricadas, hay que pagarlo. En este caso, ₡60 000. A este valor se le conoce como **constante**

Con esta información, se puede deducir una fórmula general para determinar los gastos de la fábrica. Estos quedan modelados por:

$$g_c = 1000 \cdot c + 60000$$

De modo, que para calcular los gastos por producir 200 camisetas, simplemente se resuelve:

$$g_{200} = 1000 \cdot 200 + 60000 = 260000$$

Por tanto, el gasto para confeccionar 200 camisas es de ₡260 000,

Observaciones:

En la relación $g_c = 1000c + 60\,000$ existen **cantidades fijas**, es decir, que no cambian. Por ejemplo los ₡60 000 por planilla y alquiler. A estas cantidades se les llama **constantes.**

Si por el contrario, la cantidad puede tomar distintos valores, se le conoce como **variable.** En el escenario que estamos analizando, existen dos variables: el gasto y el número de camisetas producidas.

Entre las variables, unas dependen de otras. En este caso, el gasto depende de la cantidad de camisetas, por tanto, se dice que el gasto corresponde a una **variable dependiente,** mientras que el número de camisetas producidas es **una variable independiente.**

Definiciones

- Un símbolo que representa un valor fijo, se llama **constante**.
- Un símbolo que puede representar distintos valores se llama **variable.**
- Una **variable independiente** es aquella cuyo valor no depende del de otra variable.
- Una **variable dependiente** es aquella cuyos valores dependen de los que tomen otra variable.

Con el mismo escenario de aprendizaje, si la fábrica tuvo un gasto de ₡210 000 en un día, ¿cuántas camisetas se elaboraron ese día?

Como el gasto ahora es conocido, podemos reemplazarlo en la fórmula que determinamos anteriormente:

$$g_c = 1000c + 60\,000$$
$$210\,000 = 1000c + 60\,000$$

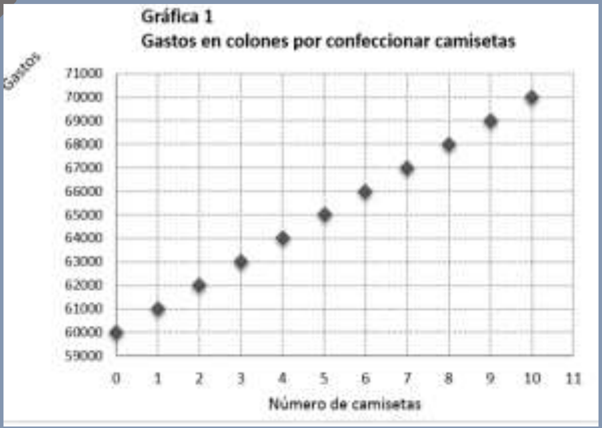
Ahora bien, para determinar la cantidad de las camisas, se debe realizar el proceso inverso al que se efectuó en el punto (a)

Es decir: a los 210 000 le restamos el gasto fijo de 60 000, con lo cual obtenemos que $150\,000 = 1000c$

Luego, ese valor lo dividimos entre 1000 (que es el gasto por cada camiseta), con lo que se concluye que la cantidad de camisetas elaboradas es de:

$$\frac{150\,000}{1000} = c = 150$$

Otra forma de presentar la información de este escenario, es mediante una gráfica. Así:



Ejemplos

- El área de un rombo está dada por $A = \frac{D \bullet d}{2}$, donde *D* es la medida de la diagonal mayor y *d* la de la menor.

  En este caso, el área *A* depende de las magnitudes *D* y *d.* El $\frac{1}{2}$ es una constante.

  A: variable dependiente
  D y *d*: variables independientes.

  Si las medidas de las diagonales son 10 y 8, entonces el área será de:

  $$A = \frac{10 \bullet 8}{2} = 40$$

Si la diagonal mayor mide 6cm y el área del rombo es de 12cm^2, para determinar la longitud de la diagonal menor, se plantea:

$$12 = \frac{6 \bullet d}{2} \Rightarrow 12 = 3 \bullet d$$

En esta igualdad, cuál debe ser el valor de *d* para que al multiplicarse por 3 dé 12. Para dar respuesta, se resuelve la operación inversa:

$$12 \div 3 = 4 = d$$

- El volumen de un cubo está dado por $V = a^3$, donde "*a*" es la medida de la arista.
  En este caso la variable independiente es "*a*" y la dependiente V.
  Si el volumen del cubo es de 343, para determinar la longitud de la arista, se plantea:

  $$343 = a^3$$

Al usar un razonamiento similar al ejemplo anterior, se aplica la operación inversa de la potencia:

$$\sqrt[3]{343} = a = 7$$

- Determinar el valor de m para que se cumpla la igualdad. Para ello, aplique la operación inversa

$m - 5 = 7$	➡	$m = 7 + 5 = 12$
$21 + m = 3$	➡	$m = 3 - 21 = -18$
$14 \bullet m = 98$	➡	$m = 98 \div 14 = 7$
$\frac{m}{6} = 60$	➡	$m = 60 \bullet 6 = 360$
$\frac{18}{m} = 3$	➡	$m = 18 \div 3 = 6$
$m^5 = 243$	➡	$m = \sqrt[5]{243} = 3$
$\sqrt[4]{m} = 5$	➡	$m = 5^4 = 625$

Escenario de aprendizaje

Taciana va con sus compañeros del colegio a ver una obra de teatro. El anfiteatro tiene 50 sillas en la primera fila y 70 filas en total. Si cada fila tiene dos sillas más que la fila anterior, ¿cuántas sillas hay en la fila 70 del anfiteatro?

Muchos retos matemáticos pueden realizarse mediante intentos repetitivos; sin embargo, es una estrategia poco eficiente en los casos para los cuales las cantidades son considerablemente grandes.

Para resolver este escenario se puede calcular la cantidad de sillas que hay por fila, pero sería poco práctico hacerlo hasta llegar a la septuagésima. Se espera que al ir calculando los primeros datos, se logre conjeturar una posible relación entre la fila y la cantidad de sillas que hay en ella. Veamos:

Número de fila	Cantidad de sillas
1	50
2	52
3	54
4	56
5	58
6	60
….	….
N	¿?
70	¿?

La idea es buscar algún patrón que ayude a Taciana a determinar cuántas sillas tiene la fila 70, sin necesidad de completar la tabla.

Conviene hacerse preguntas como: ¿qué relación existe entre la fila 1 y 50? ¿Entre la fila 2 y 52? ¿Cuánto aumenta de una fila a otra? ¿Con qué cantidad de sillas inicia el anfiteatro?

Al ir respondiendo a estas inquietudes, se puede encontrar la siguiente relación:

Número de fila	Cantidad de sillas
1	50
2	52= 50 + 2
3	54= 50 + 2 + 2
4	56 = 50 + 2 + 2 +2
5	58 = 50 + 2 + 2 +2 +2
6	60 = 50 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2

Ahora, se puede observar que la cantidad de sillas por fila se relaciona con la cantidad de la primera fila (50) y va aumentando de dos en dos. Esas sumas reiterativas se pueden sustituir por multiplicaciones.

Por ejemplo: 2 + 2 +2 = $2 \bullet 3$.

De este modo, queda la siguiente relación:

Número de fila	Cantidad de sillas
1	50= 50 + $2 \bullet 0$
2	52= 50 + $2 \bullet 1$
3	54= 50 + $2 \bullet 2$
4	56 = 50 + $2 \bullet 3$
5	58 = 50 + $2 \bullet 4$
6	60 = 50 + $2 \bullet 5$

En esta tabla, se aprecia mejor la relación que existe entre la fila y la cantidad de sillas. Incluso, de modo general, la fila “*n*” tendría 50 + $2 \bullet (n-1)$ sillas.

Esto se puede expresar:

$$s_n = 50 + 2 \bullet (n-1)$$

Y se interpreta así:

La cantidad de sillas de la fila "*n*" se determina mediante $50 + 2 \bullet (n - 1)$

Esta relación, al estar indicada de modo general, permite calcular la cantidad de sillas de cualquier fila. Particularmente, en el escenario de aprendizaje, se solicita la información sobre la fila 70, por lo que se resuelve:

$$\begin{aligned} s_{70} &= 50 + 2 \bullet (70 - 1) \\ &= 50 + 2 \bullet 69 \\ &= 188 \end{aligned}$$

Se concluye que hay 188 sillas en la septuagésima fila.

Sucesión

Una sucesión es un conjunto ordenado

A relaciones como esta, en las que se permite determinar una serie de valores numéricos mediante una ley de formación, se les conoce como **sucesiones matemáticas.**

Existen tres formas en las que se pueden expresar las sucesiones, seguidamente se detallan.

Descripción de los términos: se escriben los primeros términos de la sucesión.

Ejemplos:

- Los números naturales divisibles por 5: 0, 5, 10, 15, 20, . . .
- Los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,..
- Los números impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,. . .

Una fórmula: se establece una fórmula general para los términos, tal y como se realizó en el escenario de aprendizaje y en el caso de la suma de los primeros números de Gauss.

Ejemplos:

- $a_n = 2n + 1$. Esta fórmula expresa los números impares, pues al reemplazar "n" por valores naturales, se obtiene 1, 3, 5, 7, 9, 11….
- $a_n = n^2$. Con esta relación, se determinan los cuadrados de un número: 1, 4, 9, 16, 25, 36….

Ley de recurrencia: se designa la relación entre un término cualquiera y los anteriores.

Ejemplo:

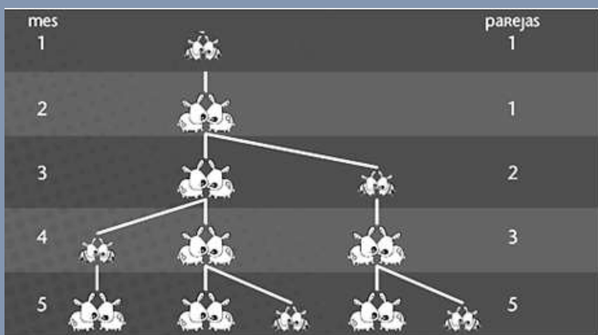
- La sucesión de recurrencia más conocida, se describe a continuación:

Sucesión de Fibonacci

El matemático italiano Leonardo Pisano, conocido como Leonardo Fibonacci (hijo de Bonacci), propuso una sucesión que hoy día ha cautivado a gran cantidad de personas. Esta sucesión se originó como producto de un experimento hipotético, el cual se detalla seguidamente.

"Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, a partir de ese momento cada vez engendra una pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles engendrarán cada mes una pareja de conejos. ¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?"

Para facilitar la comprensión, veamos este diagrama:



Ahora analicemos el crecimiento de la población de estos conejitos con la siguiente tabla:

Mes	Parejas en edad de procrear	Parejas que no pueden procrear	Número de parejas
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Al analizar la tabla, podemos apreciar un patrón que relaciona la cantidad de parejas de conejos, con sus predecesores. Por ejemplo, el número de parejas en el mes 8 es de 21, que equivale al número de parejas del mes 6 más la cantidad de parejas del mes 7.

Es decir, para conocer cuántas parejas hay en el mes "n", basta con obtener el número de parejas de los meses n – 1 y n – 2 y efectuar la suma.

De este modo, la sucesión se expresa:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Un término de la sucesión de Fibonacci es igual a la suma de los dos que le preceden, es decir:

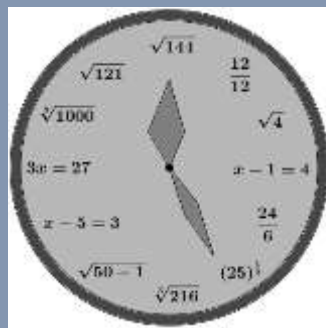
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, donde $a_0 = 1$, y $a_1 = 1$.

¿Sabías que...?

La cantidad de pétalos de ciertas flores coincide con un número de la sucesión de Fibonacci. En la naturaleza hay gran cantidad de evidencias de esta sucesión.

Tiempo para practicar 2.1

Habilidades:
Identificar la ley de formación de una sucesión utilizando lenguaje natural, tabular y algebraico.
Plantear y resolver problemas relacionados con sucesiones y patrones.
Distinguir entre cantidades variables y constantes.
Determinar relaciones de dependencia entre cantidades.
Determinar el valor desconocido en una ecuación matemática dada



1. En cada caso, escriba los primeros 6 términos de la sucesión.

(a) $a_n = 3^n + 1, \quad n \geq 0$

n	0	1	2	3	4	5
a_n						

(b) $b_h = h^2 - h, \quad h \geq 0$

n	0	1	2	3	4	5
b_n						

(c) $c_a = \dfrac{1}{a^2} \quad a \geq 1$

a	1	2	3	4	5	6
c_a						

(d) $m_k = (-1)^k \quad k \geq 0$

k	0	1	2	3	4	5
m_k						

2. Exprese de forma general (algebraica) la sucesión que origina los términos que se presentan:

(a)

n	0	1	2	3	4
a_n	1	4	7	10	13

(b)

n	0	1	2	3	4
a_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

(c)

n	1	2	3	4	5
a_n	-2	4	-8	16	-32

(d)

n	0	1	2	3	4
a_n	3	4	5	6	7

(e)

n	0	1	2	3	4
a_n	0	4	8	12	16

(f)

n	1	2	3	4	5
a_n	1	8	27	64	125

(g)

n	1	2	3	4	5
a_n	3	9	27	81	243

(h)

n	1	2	3	4	5
a_n	5	10	15	20	25

3. Indique cuál término sigue en cada sucesión

(a)

49	64	81	100	?

(b)

1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$	?

(c)

12	$\frac{22}{3}$	$\frac{32}{5}$	$\frac{42}{7}$	?

(d)

2	8	26	80	242	?

Mediante Ley de Recurrencia

(e)

Valores iniciales						
1	3	4	7	11	18	?

(f)

Valores iniciales					
2	3	6	18	108	?

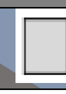
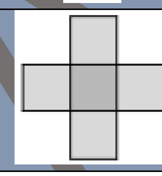
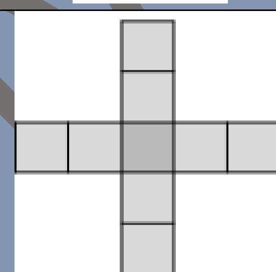
(g)

Valores iniciales						
4	7	-3	10	-13	23	?

(h)

Valores iniciales					
-4	6	2	8	10	?

4. La siguiente tabla muestra una sucesión con figuras geométricas, que relaciona la cantidad de cuadrículas.

Posición	Dibujo	#
1		1
2		5
3		9

(a) ¿Cuántas cuadrículas hay en la posición 4, 5 y 6?

(b) Represente mediante una fórmula, la cantidad de cuadrículas, según la posición de la sucesión.

(c) ¿Cuántas cuadrículas hay en la posición 45?

5. Complete la sucesión que se presenta en la tabla, donde se relaciona la figura, con el número de cintas que las forman.

Figura	Dibujo	Cintas
1		
2		
3		

(a) Escriba una fórmula algebraica que represente la sucesión

(b) Cuántas cintas se ocupa para formar la figura 22

6. Régulo va de vacaciones a Playa del Coco. En gasolina gastó ₡22 000 y cada día que pasaba tenía un gasto de ₡15 000.

(a) Exprese en una tabla los gastos de Régulo, si se queda de 1 a 6 días en la Playa del Coco.

Días	1	2	3	4	5	6
Costo						

(b) Exprese algebraicamente los gastos de Rémulo, según la cantidad de días que vacacionó.

(c) ¿Cuánto dinero llevaba Rémulo si le cubrió exactamente 10 días de estadía?

7. En un grupo comunitario, tienen una estrategia para comunicar algún recado. Usan un estilo de cadena, donde el dirigente llama a tres miembros del grupo (primer enlace), quienes, a su vez, deben llamar a tres miembros más (segundo enlace), y así sucesivamente.

(a) ¿Cuántas personas fueron comunicadas en el cuarto enlace?

(b) ¿En cuál enlace se comunicó a 729 personas?

8. En un laboratorio se está investigando sobre la cepa de un virus. Para esto, se hace un cultivo de veinte virus (primer día). Cada virus se divide en dos al paso de un día.

(a) Construya una tabla que resuma la cantidad de virus nuevos que habrá hasta el día 6

(b) Compruebe que la expresión algebraica que relaciona la cantidad de virus nuevos "V", según los días transcurridos "d" está dada por $V_d = 20 \cdot 2^{d-1}$.

(c) ¿Cuántos virus tendremos dentro de 7 días? (totalidad)

9. En un pueblito tienen un pozo. El primer día de la semana sacan 10 litros de agua, el segundo veinte, el tercero cuarenta y así sucesivamente.
   (a) Construya una tabla que resuma la cantidad de agua que se saca del pozo durante cada día de una semana.
   (b) Determine una expresión algebraica que relacione la cantidad de agua que se saca del pozo según el día.
   (c) ¿Cuántos litros de agua se habrá sacado en total durante toda una semana?

10. En un grupo de estudiantes, se estaba haciendo costumbre el mal hábito del chisme. Por lo que su profesora les dio este reto matemático: Un alumno se enteró casualmente de un plan sorpresa que planeaba la dirección para el día de su graduación. Como era reservado, en una hora sólo se lo contó a otros cinco compañeros. Cada uno de éstos, a su vez, se lo contó en la hora siguiente a otros cinco, y así sucesivamente.
    ¿Cuántos compañeros estaban al corriente del secreto al cabo de 5 horas (incluido el joven que contó el secreto por primera vez)?

11. Fulgencio compró varios libros usados. El primer libro lo adquirió en ₡800, y por cada uno de los demás pagó ₡300 más que por el anterior.
    (a) Construya una tabla con los primeros 10 valores de la sucesión
    (b) Exprese algebraicamente esta relación.

12. En el primer mes de abrir un negocio, don Telmo ganó ₡400 000 y en el último, ganó ₡ 1 170 000. Si en cada mes ganó ₡70 000 más que el mes anterior, ¿cuántos meses tuvo el negocio?

13. Un celular costó inicialmente ₡320 000. Al cabo de un año, se vendió a la mitad de su precio. Pasado otro año, se volvió a vender a la mitad del precio anterior, y así sucesivamente.
    (a) Construya una tabla donde se muestre el precio del celular transcurridos 5 años.
    (b) ¿Cuánto le costó el celular al sétimo propietario?

14. Una persona tiene 2 padres (primera generación atrás), 4 abuelos (segunda. generación atrás), 8 bisabuelos y así sucesivamente. ¿Cuántos ancestros tuvo desde la primera generación hasta la décima atrás?

15. A un joven vendedor le pagan ₡7000 diarios y un adicional de ₡200 por cada artículo que venda.
    (a) Exprese de modo algebraico la relación anterior.
    (b) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
    (c) Si el joven vende 21 artículos en un día, ¿cuánto dinero gana?
    (d) Si otro día vende 42 artículos, ¿ganará el doble que al vender 21?

16. El costo D en dólares de producir semanalmente m unidades de pulseras está dado por $D_m = 2m + 1$. Determine:

(a) La variable dependiente.
(b) La variable independiente.
(c) El costo por producir 256 pares de pulseras por semana.
(d) La cantidad de pulseras producidas en una semana, si el costo fue de 919 dólares.
(e) El valor constante

17. La ganancia G por producir "y" cuadernos mensuales está dada por $G = -2y^2 + 380y - 12$

(a) ¿Qué ganancias se obtendrán al producir solo dos cuadernos?
(b) ¿Cuánto más es la ganancia se obtiene al producir 60 cuadernos, en lugar de 55?
(c) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
(d) ¿Cuál es el valor constante?

18. La longitud de una circunferencia está dada por $L = 2\pi r$. Determine:
(a) La variable independiente.
(b) La variable dependiente.
(c) La longitud de la circunferencia, si el radio mide 4 cm

19. La tarifa T en colones que cobra un servicio de taxi, según la cantidad de kilómetros recorridos "k", está dada por T(k) = 625 + 115k.

Según la información anterior, determine:

(a) La variable dependiente es la siguiente
(b) El valor constante es el siguiente
(c) Si una persona usa el servicio de taxi y se recorre 10 kilómetros, entonces ¿cuál es la tarifa por pagar?

20. El salario mensual "S" en colones de un comerciante, por vender "x" cantidad de unidades de producto está dado por S(x) = 200x + 40 000
Según la información anterior, determine:

(a) La variable independiente
(b) El valor constante
(c) Si el comerciante vende 300 unidades de producto, ¿cuál es el monto del salario que recibe?

21. Determine el valor numérico de la figura, que haga correcta la igualdad.

(a) 

(b) 

(c) 

22. Determine el valor de la "x" para que se cumpla la igualdad.

(a) $-14x = 28 \quad \Rightarrow x =$ ______
(b) $\dfrac{x}{23} = 11 \quad \Rightarrow x =$ ______
(c) $8 + x = 7 \quad \Rightarrow x =$ ______
(d) $x - 9 = -8 \quad \Rightarrow x =$ ______
(e) $-x + 2 = 11 \quad \Rightarrow x =$ ______
(f) $-x = -19 \quad \Rightarrow x =$ ______
(g) $\dfrac{14}{x} = -7 \quad \Rightarrow x =$ ______
(h) $\dfrac{-x}{3} = -9 \quad \Rightarrow x =$ ______
(i) $6 + x = -4 \quad \Rightarrow x =$ ______
(j) $3x = 33 \quad \Rightarrow x =$ ______
(k) $2x - 5 = 1 \quad \Rightarrow x =$ ______
(l) $5x + 2 = -8 \quad \Rightarrow x =$ ______
(m) $x \div 12 = 3 \quad \Rightarrow x =$ ______

Conocimiento: Proporcionalidad

Escenario de aprendizaje

Quiliano, visita a su abuelo Remigio, quien tiene una finquita con ganado para la producción de leche. Don Remigio aprovecha su instancia y le pide a su nieto que le ayude con ciertos cálculos matemáticos que necesita resolver.

Actualmente, tengo 25 vacas (comenta don Remigio) y quiero comprar 5 más, por tanto necesito que me ayudes a sacar estas cuentas:

(a) Si con esas 25 vacas, se producen 225 litros de leche al día, ¿cuántos litros obtendré si adquiero 5 vacas más?

(b) Tengo suficiente alimento para alimentar las 25 vacas durante 75 días, ¿cuánto durará el alimento si compro las 5 vacas?

Para la primera pregunta de don Remigio, Quiliano se percata que la cantidad de leche aumentará, conforme aumenta el número de vacas. A esta relación se le conoce como **proporcionalidad directa**.

Por tanto, procede a establecer una regla de tres:

$$\frac{25 \, vacas}{225 \text{ litros de leche}} = \frac{30 \text{ vacas}}{?}$$

Y determina que la cantidad de litros de leche que obtendrá su abuelo por 30 vacas (5 más de las que tiene) será de $225 \cdot 30 \div 25 = 270$. Es decir, tendrá 45 litros más.

Ahora bien, Quiliano va más allá de la petición de su abuelo, y le establece una relación de proporcionalidad directa, que le permitirá determinar cuánta leche obtendrá, según la cantidad de ganado que tenga en su finca. Para esto, analiza la razón entre litros de leche y número de vacas:

$$\frac{225 \text{ litros de leche}}{25 \, vacas} = 9 \text{ litros por vaca}$$

El joven le explica a su abuelo que por cada vaca obtendrá 9 litros de leche y lo expresa en una fórmula, así:

$$L(v) = 9 \cdot v$$

Esta manera de representar la relación, se le conoce como **expresión algebraica**, la cual establece una correspondencia entre la cantidad de vacas y su producción de leche. Esta expresión facilita considerablemente los cálculos; por ejemplo, si se desea determinar la producción de leche de 200 vacas, solo basta con resolver: $L(200) = 9 \cdot 200 = 1\,800$

La siguiente tabla resume algunos resultados:

Número de vacas	Días de alimento
10	90
15	135
20	180
25	225
30	270
35	315
40	360
45	405
50	450
55	495

Observe que el cociente entre la cantidad de leche producida y el número de vacas es constante: $\frac{90}{10}=\frac{135}{15}=\frac{495}{55}=9$. A este valor se le conoce como **constante de proporcionalidad directa.**

Don Remigio quedó muy satisfecho con la explicación de su nieto y quiso resolver la segunda inquietud, mediante un raciocinio similar: "con 25 vacas, el alimento rinde 75 días, entonces cuántos días rendirá el alimento para 30 cabezas de ganado".

Procedió a resolver con regla de tres así:

$$\frac{25\,\text{vacas}}{75\,\text{días}}=\frac{30\ \text{vacas}}{?}\Rightarrow\ 75\bullet 30\div 25=90$$

Al analizar la respuesta quedó sorprendido, puesto que lo lógico sería que el alimento rindiera para menos días, al haber más vacas. Por lo cual, le consultó a Quiliano sobre dónde radicaba el error.

Su nieto le explicó que efectivamente el número de días que duraría el alimento iría en descenso (disminuiría), conforme aumentará la cantidad de vacas, y que a esta relación se le llama **proporcionalidad inversa**.

Por lo que la razón se debe realizar de modo inverso:

$$\left.\begin{array}{l}25\,vacas\rightarrow 75\ días\\ 30\,vacas\rightarrow x\ días\end{array}\right\}\quad \frac{25}{30}=\frac{x}{75}$$

$$\Rightarrow\ 25\bullet 75\div 30=62{,}5$$

Se concluye que al incorporar 5 vacas más, el alimento alcanzará para 62, 5 días, esto es 12,5 días menos que al tener 25 vacas.

Esta relación de modo algebraico se puede plantear así:

$$D(v)=\frac{1875}{v}$$

Así, para determinar cuántos días rinde el alimento con 30 vacas, solo se reemplaza:

$$D(30)=\frac{1875}{30}=62{,}5\ \text{días.}$$

Si solo se contase con 15 vacas, el alimento durará:

$$D(15)=\frac{1875}{15}=125\ \text{días.}$$

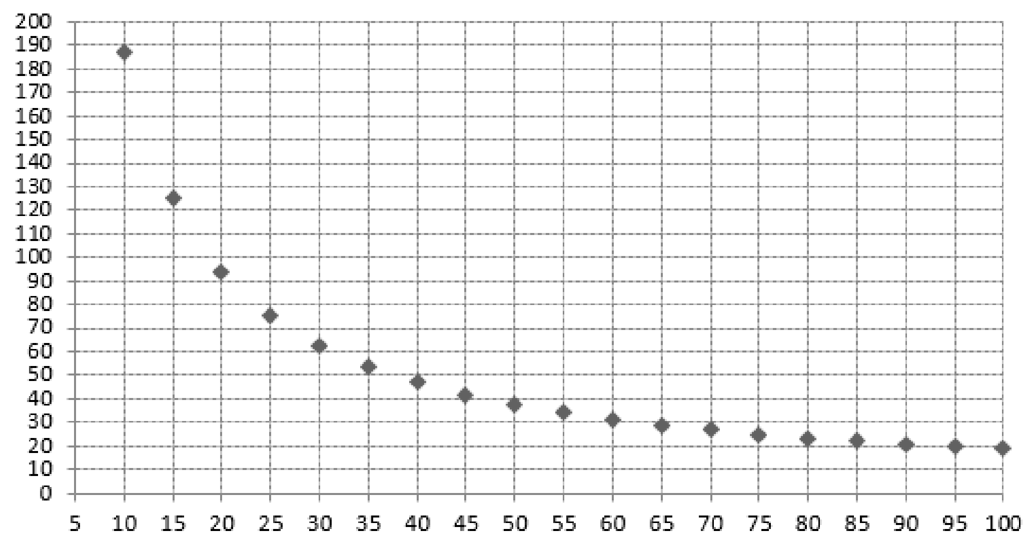
Cuanto más vacas, menos días de alimento, cuanto menos vacas, más días de alimento.

La siguiente tabla resume algunos resultados:

Número de vacas	Días de alimento
10	187,5
15	125
20	93,75
25	75
30	62,5
35	53,57

Ahora, si se realiza la multiplicación del número de vacas y los días de alimento, todos los productos darán 1875. A este valor se le conoce como **constante de proporcionalidad inversa.**

Gráfico 2
Días con alimento de acuerdo con la cantidad de vacas



⌑ Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.
Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el cociente o razón entre estos dos valores es siempre constante. A esta cantidad se le llama **constante o razón de proporcionalidad directa.** Razón de proporcionalidad: $r = \frac{m_2}{m_1}$

⌗ Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número, y viceversa.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el producto de estos dos valores es siempre constante. A este producto se le llama **constante de proporcionalidad inversa.**

Razón de proporcionalidad: $r = m_1 \cdot m_2$

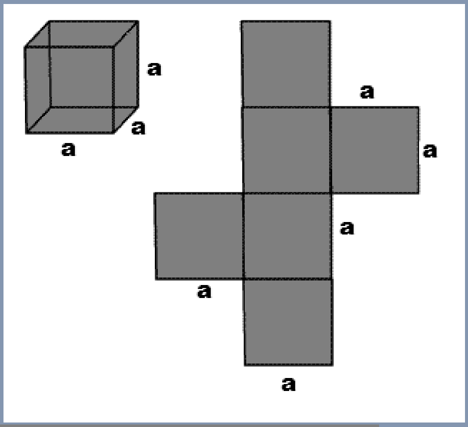
Ejemplos.

⌗ La fuerza de atracción entre dos objetos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Si la distancia entre los objetos es de "d" metros, exprese algebraicamente la relación. Además, construya una tabla con distancias enteras, desde 1 m a 10m.

La proporción queda modelada por: $F(d) = \frac{1}{d^2}$

Distancia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fuerza de atracción	1	0,25	0,11	0,06	0, 04	0,027	0,02	0,015	0,012	0,01

Nótese que para la distancia cero, no tiene sentido la expresión.



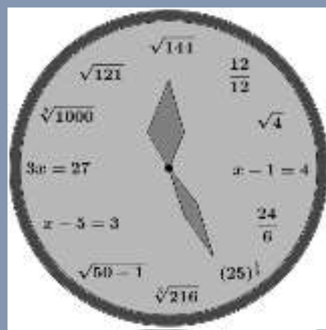
⌗ El área de un cubo es directamente proporcional al cuadrado de la medida de su arista, con constante de proporcionalidad 6.

Esto es $A(a) = 6a^2$

Medida de arista	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Área del cubo	6	24	54	96	150	216	294	384	486	600

Tiempo para practicar 2.2

Habilidades:
Identificar relaciones de proporcionalidad inversa en diversos contextos reales.
Analizar relaciones de proporcionalidad directa e inversa de forma verbal, tabular, gráfica y algebraica.



1. Una hormiga es capaz de levantar 50 veces su propia masa corporal. Suponga que un ser humano también puede hacer un levantamiento como el de las hormigas.

   (a) Exprese algebraicamente esta proporción.

   (b) Si un ser humano tiene 55kg de masa corporal, ¿Cuántos kilogramos podría levantar?

2. Una pulga es capaz de saltar 130 veces su propia estatura. Suponga que un ser humano también puede hacer saltos tan gigantescos como los de las pulgas.

   (a) Exprese algebraicamente esta proporción.

   (b) Si un ser humano mide 1,7 m ¿cuántos metros tendrá su salto?

3. En la feria del agricultor, en una gran oferta de temporada, 5 aguacates cuestan ₡1 500.

   (a) Exprese la proporción de manera algebraica. (Costo según la cantidad de aguacates)

   (b) Si Gaetano compró 40 aguacates, ¿Cuánto pagó?

   (c) La hermana de Gaetano pagó ₡16 500, ¿cuántos aguacates compró?

4. Por cada dos toneladas de papel que se reciclen, se salvan 34 árboles.

   (a) Exprese la proporción de manera algebraica.

   (b) Si un colegio ha logrado recolectar 40 toneladas, ¿cuántos árboles salvaron?

5. Por cada tonelada de papel reciclado, se ahorra veintiún mil litros de agua.

   (a) Exprese la proporción de manera algebraica.

   (b) Con el reciclaje de papel, en un colegio se ahorró 105 000 litros de agua. ¿Cuántas toneladas de papel se recicló en ese colegio?

6. Si reciclamos unas seis latas de aluminio, estaremos ahorrando la energía equivalente que podría mantener un televisor encendido por 18 horas. Esta semana el 7 A de un colegio, ha recolectado 30 latas de aluminio. ¿a cuántas horas de televisión equivale ese ahorro?

7. Si se deja goteando un grifo, se llenaría un balde de 15 litros en tres horas.
(a) Exprese la proporción de manera algebraica.
(b) ¿Cuántos litros de agua se desperdiciarían si se deja goteando el grifo por 12 horas?

8. Dieciocho compañeros pagaron en total ₡36 000 para alquilar una buseta y visitar el Parque Nacional Volcán Poás.

(a) Exprese la proporción de manera algebraica que relacione lo que debe pagar cada persona, según la cantidad de asistentes. ¿Cuánto pagó cada uno?
(b) 6 compañeros más se unieron a la excursión, entonces ¿cuánto debe pagar cada uno?

9. En un centro de fotocopiado ubicado en Limón, 6 fotocopiadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias.

(a) Exprese la proporción de manera algebraica, que relaciona el tiempo según la cantidad de fotocopiadoras utilizadas.
(b) ¿Cuánto tiempo tardarían 4 fotocopiadoras en realizar el mismo trabajo?
(c) ¿Cuánto tiempo tardarían 18 fotocopiadoras en realizar el mismo trabajo?

10. La Comisión Nacional de Emergencias, ha solicitado a un colegio construir un muro de contención. Para ello, la institución ha contratado una cuadrilla de 6 obreros. Culminar con dicha tarea, les llevó un total de 4 semanas. ¿Cuántos obreros hubieran hecho falta para hacer similar trabajo en un total de 3 semanas?

11. Tres pintores tardan 20 días en pintar una tapia. ¿Cuánto tardarán cinco pintores en hacer el mismo trabajo?

12. En una competencia de atletismo se fijaron los premios para los primeros puestos.

Puesto	Premio
1	$7 200
2	$3 600
3	$ 2400
4	?

El monto fijado es inversamente proporcional al puesto obtenido. De ser así, ¿cuál es el premio para el cuarto lugar?

13. Una empresa recibe un contratado para realizar un trabajo y desea saber cuándo puede entregarlo. Un ingeniero, informa que depende de la cantidad de trabajadores y estima una relación inversamente proporcional, la cual la presenta en la tabla siguiente:

Días	2	3	4
Trabajadores	6	4	3

(a) Exprese la proporción de manera algebraica, que relaciona el número de días que tardará la obra, según la cantidad de trabajadores
(b) ¿Cuánto tiempo se tardará de hacer la obra, si se contratan 6 trabajadores?

14. De acuerdo con “*Calories Per Hour*”, correr por 25 minutos a 8 km/h quema 225 calorías. Según esa información, conteste:

(a) ¿La relación entre los minutos corridos, es directa o inversamente proporcional a las calorías quemadas?

(b) Complete la tabla

Minutos	10	15	20	
Calorías				450

15. En cada caso, indique si la situación representa una relación directamente proporcional (DP) o inversamente proporcional (IP)

(a) Para preparar la comida de 180 estudiantes en un comedor, se necesita 20 kg de arroz ¿Cuántos kg de arroz son necesarios para 270 estudiantes? ________

(b) 20 estudiantes de un colegio, necesitan llevar en total 120 sillas al gimnasio (6 sillas cada uno). Si son 60 estudiantes, ¿cuántas sillas deben llevar cada uno? ________

(c) Cuatro albañiles logran terminar una tapia en dos semanas. ¿Cuánto tardarán 6 albañiles haciendo al mismo tiempo ese trabajo? ________

(d) En un aereopuerto aterrizan 4 aviones cada 60 minutos. ¿Cuántos aviones aterrizan en 30 minutos? ________

(e) Un litro de leche tiene un costo de ₡750 ¿Cuánto cuestan 8 litros de leche? ________

Reto de lógica:

Un joven desea colaborar en una finca familiar, en la que se ha sembrado plantitas de café. La familia consciente de cuidar el recurso hídrico, construye un tanque recolector de agua, de donde el joven debe recoger balde a balde el líquido vital para regar las plantitas.
El tanque se ubica a 3 metros de la primera planta de café y entre cada planta hay 1,5 metros. Cada vez que el joven riega una planta debe volver al tanque por más agua. En cada trayecto, solo lleva un balde con agua que riega en una planta a la vez.

Al llegar a la última planta, por el arduo trabajo, se queda ahí descansando y leyendo un buen libro.

Cuántos metros recorre el joven desde que empieza su trabajo de riego y hasta que descansa leyendo el libro, sabiendo que hay 50 plantitas de café sembradas.

ESTADÍSTICA

Estadística

La estadística es la ciencia que estudia la recolección, análisis e interpretación de datos, ya sea para ayudar en la toma de decisiones o para explicar condiciones regulares o irregulares de algún fenómeno o estudio aplicado.

Desde los comienzos de la civilización, han existido formas sencillas de estadística. Hay evidencias de representaciones gráficas en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas, utilizadas para contar el número de personas, animales o siembras. Hacia el año 3000 a.C, los babilonios usaban ya pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola.

Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país, mucho antes de construir las pirámides, en el siglo XXXI a.C. Los libros bíblicos de Números y Crónicas incluyen también trabajos de estadística. El primero contiene dos censos de la población de Israel y el segundo describe el bienestar material de las diversas tribus judías.

En nuestros días, la estadística está presente en una gran variedad de situaciones: estudios de mercadeo, proyecciones a futuro, control de población, informe de investigaciones, entre otros.

La Estadística Descriptiva es la disciplina que se encarga de estudiar las técnicas para la recolección, análisis y descripción de datos. En esta se realiza el estudio sobre la población completa.

La Estadística Inferencial es la que realiza el estudio descriptivo sobre un subconjunto de la población llamado muestra y, posteriormente, extiende los resultados obtenidos a toda la población. Es decir, generaliza los resultados obtenidos en la descripción de una muestra, a una población.

Conocimiento: Conceptos estadísticos

Escenario de aprendizaje

Un helado después de almuerzo

En la soda del Colegio Eudora, realizan una investigación, dirigida a los estudiantes de ese centro educativo, ya que desean vender helados a la hora del almuerzo.

Como no todos los estudiantes están en el mismo horario, realizan un cuestionario únicamente a los sétimos, novenos y quintos años.

En el cuestionario consultan lo siguiente:

1. Sexo
2. Edad
3. Nivel que cursa
4. Número de veces que almuerzan en la soda por semana
5. Satisfacción del servicio de la soda (Excelente, bueno, regular, malo, muy malo)
6. ¿Cuál es el sabor de helado favorito?

¡Realicemos un análisis estadístico!

- Cuando se hace un análisis estadístico, es primordial identificar *a quién* se le dirige la investigación. Puede ser una persona, cosa, espacio, situación tangible o no. Para el caso de nuestro escenario de aprendizaje, se desea conocer la opinión *del estudiante del Colegio Eudora*. A esto se le conoce como **unidad estadística**.

- El conjunto de unidades, forman **la población**, que en este caso son *los estudiantes del Colegio Eudora.*

- Pero no siempre es posible acceder a toda la población, ya sea por falta de tiempo, dinero, recursos humanos, … Por tanto, es necesario indagar solo *a una parte de la población.* En nuestro caso, son los estudiantes de *sétimo, noveno y undécimo del Colegio Eudora.* Esto se conoce como la **muestra.**

Además, cuando la unidad puede sufrir daños, es necesario usar una muestra. Por ejemplo, si una fábrica desea conocer cuántos minutos resisten los platos que fabrican, al colocarse dentro de un horno microondas, escogerán unos cuantos platos para hacer la prueba y no todos, ya que estos serán destruidos en el estudio.

Igual sucede si deseamos que examinen nuestra sangre, se nos toma una muestra en el laboratorio, y con eso los médicos obtienen la información necesaria. ¡Jamás se pretendería tomar toda la población en este caso!

Unidad:

Persona, objeto o situación por observar o estudiar. Se da en singular.

Población:

Conjunto de todos los datos por observar o estudiar.

Muestra:

Parte de una población, la cual tiene por objetivo representarla.

La soda del Colegio Eudora está interesada en investigar ciertos aspectos. Lo *que se desea investigar* es la **variable.**

Para nuestro ejemplo, las variables son: *sexo, edad, nivel que cursa, cantidad de veces que se almuerza en la soda, la satisfacción por el servicio de la soda y el sabor favorito de helado.*

Característica o variable: Es la particularidad de interés que se quiere estudiar de la unidad o dato estadístico.

Cuando se le pregunta a los encuestados sobre el sexo, contestarán masculino o femenino. En este caso, se trata de cualidades o atributos, que reciben el nombre de **variables cualitativas.** Lo mismo sucede con la variable del sabor de helado favorito, algunas posibles respuestas serían: cas, mora, leche condensada, maní…

Variable cualitativa: Cuando corresponde a atributos que no son medibles.

Aquellas variables que pueden ser medibles, reciben el nombre de **variables cuantitativas.** Estas se subdividen en dos:

- **Cualitativas discretas** las cuales solo pueden tomar valores enteros, por ejemplo, la cantidad de veces que se almuerza en la soda (no es válido decir que alguien almorzó 3,5 veces en la soda)
- **Cualitativas continuas,** aquellas que pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo. En el ejemplo que estamos analizando, la edad corresponde a esta clasificación, ya que un estudiante puede tener 15,7 años.

Cuando se le consulta al estudiante sobre el nivel que cursa, podría contestar sétimo, noveno o undécimo, según sea. Esa respuesta se conoce como **observación.**

Seguidamente se clasifican las variables presentes en el escenario de aprendizaje:

Variable	Cualitativa	Cuantitativa Discreta	Cuantitativa Continua	Posibles observaciones
Sexo	√			Femenino
Edad			√	14, 8 años
Nivel que cursa	√			Undécimo
Cantidad de veces que almuerza en la soda por semana		√		2 veces
Satisfacción del servicio de la soda	√			Bueno
Sabor favorito de helado	√			Chicle

Variabilidad: En estadística, si todas las observaciones son iguales, no tiene sentido realizar el estudio. Por ejemplo, si en un colegio, todos los estudiantes usan zapatos negros (es parte de su reglamento de uniforme), carece de importancia realizar un estudio para describir el color de zapatos de esos estudiantes. La variabilidad es la que le da importancia a los estudios, ya que son esas diferencias entre las observaciones, las que interesa reportar.

Ejemplo:

Suponga que al consultar sobre el sabor preferido de helado, se recibieron las respuestas adjuntas.

Cas	Mora	Mora
Fresa	Chocolate	Vainilla
Cas	Maní	Cas
Mora	No responde	No responde
Fresa	Mora	Vainilla
Chocolate	Maní	Maní
Vainilla	Cas	Chocolate
Mora	Vainilla	Vainilla
Chocolate	Vainilla	Cas
Cas	Chocolate	Maní

Y al indicar la cantidad de veces que almorzaban en la soda, por semana, respondieron

5	2	3
0	1	2
4	4	5
1	2	3
5	5	0
3	3	3
1	3	4
4	3	3
3	3	5
0	0	1

El investigador debe dar un informe a los dueños de la soda, para esto tiene varias posibilidades. Un modo de hacerlo es mediante una **tabla de frecuencias**, o bien a través de **un gráfico.**

En estudios formales, se busca unificar la manera de construir las tablas y los gráficos. Para nuestro caso, usaremos los lineamientos del MANUAL APA.

Tabla de frecuencias

La distribución o tabla de frecuencias, es una ordenación en forma tabular de los datos estadísticos, que asigna a cada dato su frecuencia correspondiente.

Para su construcción se toma en cuenta:

- Número de la tabla. Cada tabla va numerada dentro de un reporte investigativo. Deben evitarse redundancias como: Tabla N° 4, ya que es evidente que el 4 es un número. Lo correcto es Tabla 4.

- Título: Va alineado a la izquierda, debe contener información sobre la población, la variable, el lugar, año… Debe ser lo más completo posible, cuidando la claridad y precisión.

- La primera fila de la tabla contiene:
  - **Variable**
  - **Frecuencia absoluta (F_A),** que es el número de veces que se presenta un valor o modalidad de la variable en estudio. La suma de las frecuencias absolutas será el total de datos, y lo simbolizaremos con n .
  - **Frecuencia relativa (F_R),** la cual corresponde al cociente entre la frecuencia absoluta y el total de datos. $\frac{F_A}{n}$
- En la columna de porcentajes evitar colocar el signo de porcentaje, pues ya queda especificado en la primera fila.
- Fuente: se especifica de dónde se obtuvo la información.

Construyamos las tablas según el escenario de aprendizaje; primero, para el sabor favorito, y luego, para la cantidad de veces que almuerzan en la soda por semana:

Tabla 1

Sabor de helado favorito en estudiantes de sétimo, noveno y undécimo del Colegio Eudora.

Sabor de helado	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Porcentaje
Cas	6	6/30= 0,2	20
Chocolate	5	0,16	16
Fresa	2	0,06	6
Maní	4	0,13	13
Mora	5	0,16	16
Vainilla	6	0,2	20
No responde	2	0,06	6
Total	30	1	100

Fuente: Encuesta realizada por la soda del Colegio Eudora.

Tabla 2

Número de veces por semana que almuerzan los estudiantes de sétimo, noveno y undécimo en la soda del Colegio Eudora.

Días que almuerzan en la soda	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Porcentaje
0	4	0,13	13
1	4	0,13	13
2	3	0,1	10
3	10	0,33	33
4	4	0,13	13
5	5	0,16	16
Total	30	1	100

Fuente: Encuesta realizada por la soda del Colegio Eudora.

Con esta tabla, podemos contestar lo siguiente:

i. ¿Cuántas personas almuerzan **al menos** 2 días en la soda por semana?

Significa dos días o más. Se resuelve 3 + 10 + 4+ 5 = 22 personas

ii. ¿Cuántos estudiantes almuerzan **a lo sumo** 1 día en la soda por semana?

Es decir, un día o menos. La respuesta es 4 + 4 = 8 estudiantes

iii. ¿Cuántos alumnos almuerzan **menos de** 3 días en la soda por semana?

No incluye el tercer día. 3 + 4 + 4 = 11 alumnos

iv. ¿Cuántas personas almuerzan **más de** 3 días en la soda por semana?

No incluye los tres días. 4 + 5 = 9 estudiantes.

v. ¿Qué porcentaje de personas almuerzan 2 días **o más** en la soda por semana?

10 + 33 + 13 + 16 = 72%

vi. ¿Qué porcentaje de personas almuerzan los 5 días?
16 %

Gráficos

El formato gráfico consiste en la utilización de puntos, líneas y figuras que sirven para mostrar magnitudes, asociadas a una escala de medición, para facilitar la comparación e interpretación de los datos estadísticos, sin que necesariamente se incluyan los valores numéricos.

Los gráficos constituyen opciones útiles para una consulta ágil de la información. Existe diversos tipos, que responden a la naturaleza particular de estudio; sin embargo, existe el riesgo de no usar el gráfico adecuado.

Seguidamente, se detallan los aspectos más relevantes por considerar, al realizarlos.

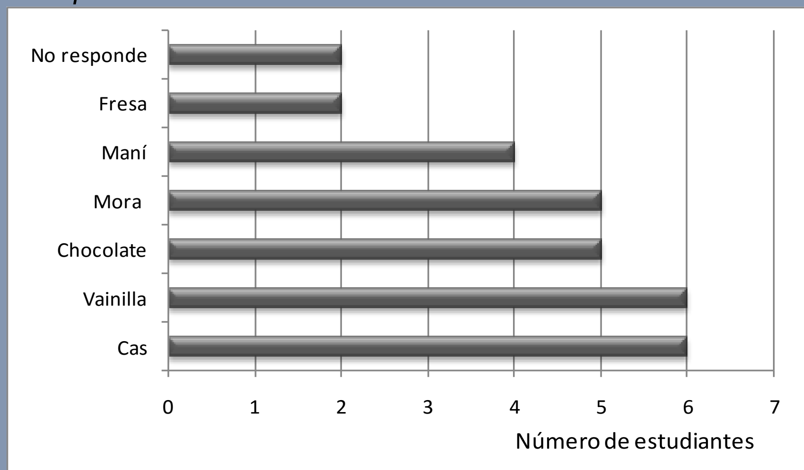
Gráfico de barras:

- Cuando la variable es cualitativa, se construyen las barras de modo horizontal, esto para facilitar la lectura. Las frecuencias absolutas o porcentajes quedan en el eje “x” (horizontal)
- Cuando las variables son cuantitativas, conviene construir un gráfico vertical. En este caso el eje “y” (vertical), corresponde a las frecuencias absolutas o porcentajes.
- El ancho de todas las barras deber ser igual. No hacer distinción de colores entre las barras, salvo si aparece más de una serie (por ejemplo, comparaciones entre hombres y mujeres)
- Las barras deben ir separadas a un espacio de media barra.
- Las barras deben ir ordenadas de mayor a menor o bien de menor a mayor, a excepción de las variables cronológicas y cuantitativas. Las respuestas “otros” o “no aplica” van al final.

Construyamos un gráfico de barras con la información del escenario de aprendizaje, para ello, usaremos la información de las tablas 1 y 2.

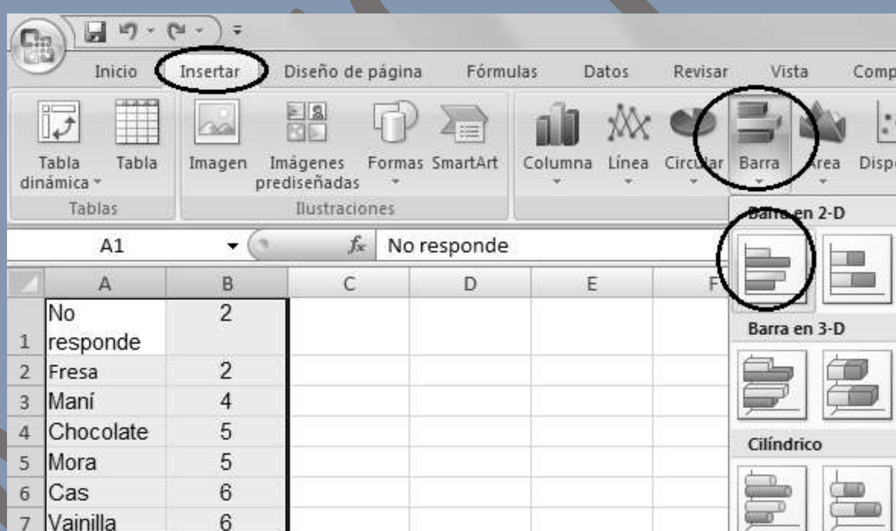
Gráfico 1

Colegio Eudora: Distribución absoluta de los estudiantes de sétimo, noveno y undécimo, según su preferencia por un sabor de helado.



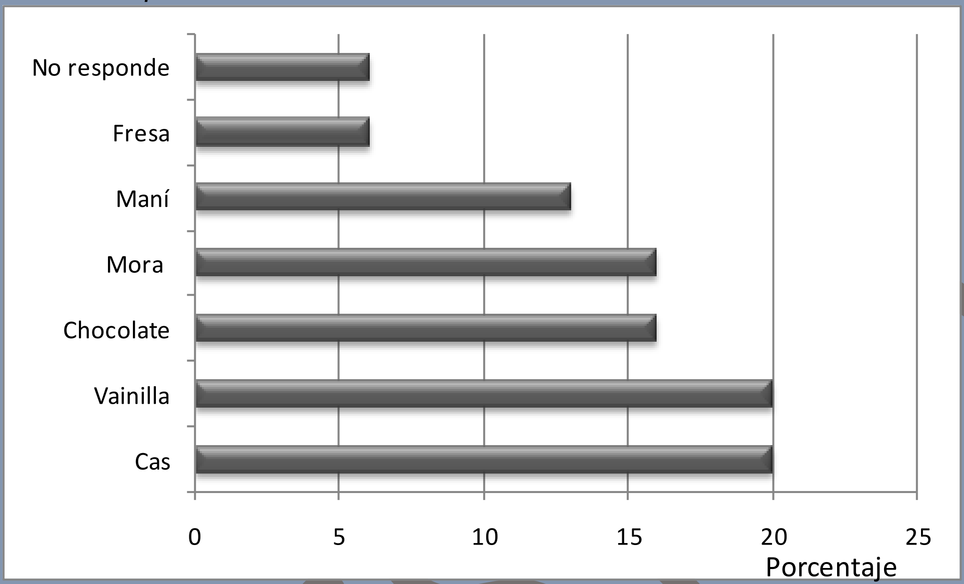
Note que al ser una variable cualitativa, las barras se ubican de modo horizontal y de menor a mayor frecuencia. También puede ordenarse de mayor a menor.

Con Excel se construye así:



Se puede construir el gráfico con los porcentajes:

Gráfico 2
Colegio Eudora: Distribución porcentual de los estudiantes de sétimo, noveno y undécimo, según su preferencia por un sabor de helado.



El siguiente gráfico corresponde a datos de variable cuantitativa, por lo cual su orientación es vertical.

Gráfico 3
Número de veces por semana que almuerzan los estudiantes de sétimo, noveno y undécimo en la soda del Colegio Eudora.

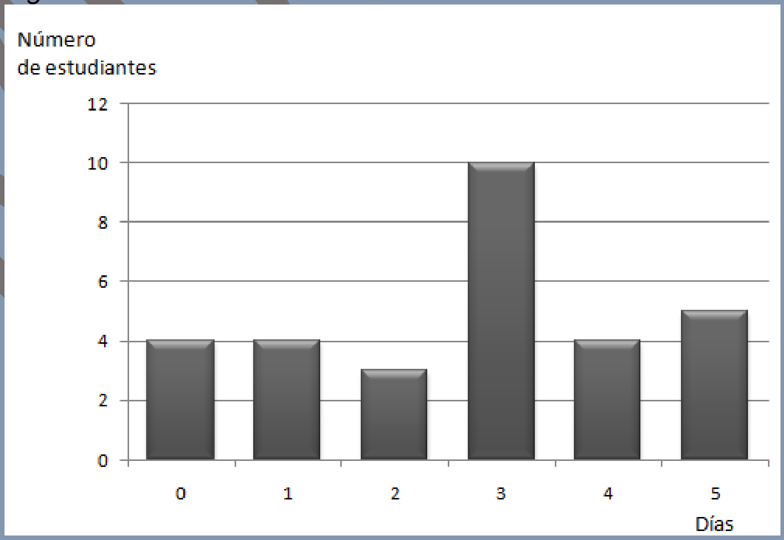
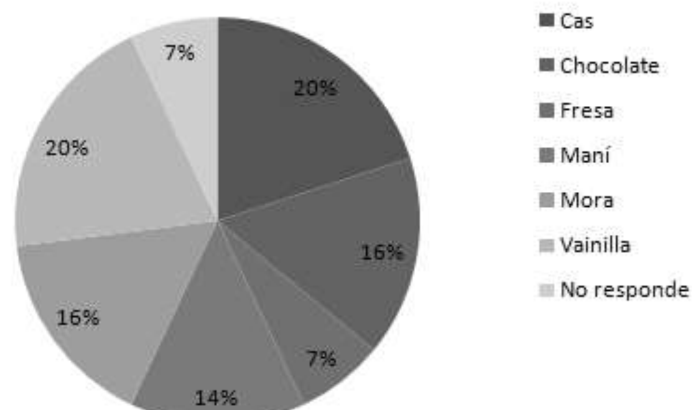


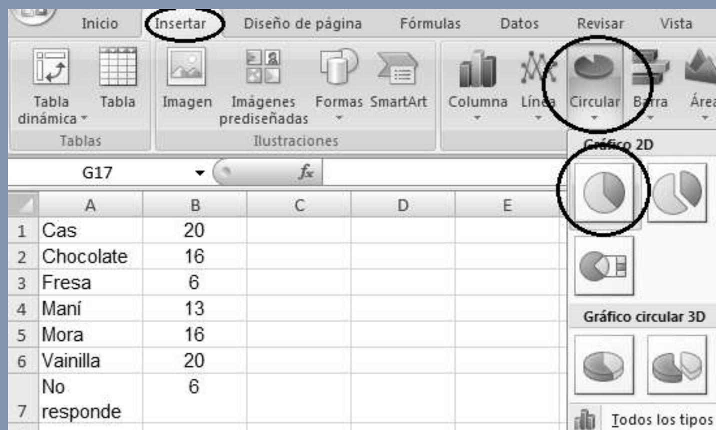
Gráfico circular: son recursos estadísticos que se utilizan para representar porcentajes y proporciones. También se les conoce como gráficos de pastel.
En el gráfico circular, cada sector circular (por ende, cada ángulo central) es proporcional al valor que corresponde a cada dato.
Para saber a qué ángulo corresponde cada porcentaje, se efectúa una regla de tres. Por ejemplo, para construir un gráfico circular sobre la preferencia en los sabores de helados, realizamos los siguientes cálculos:

Sabor de helado	Porcentaje	Cálculo del ángulo	Valor del ángulo
Cas	20	$\frac{360°}{100}=\frac{x}{20}$	72°
Chocolate	16	$\frac{360°}{100}=\frac{x}{16}$	57,6°
Fresa	7	$\frac{360°}{100}=\frac{x}{7}$	25,2°
Maní	14	$\frac{360°}{100}=\frac{x}{14}$	50,4°
Mora	16	$\frac{360°}{100}=\frac{x}{16}$	57,6°
Vainilla	20	$\frac{360°}{100}=\frac{x}{20}$	72°
No responde	7	$\frac{360°}{100}=\frac{x}{7}$	25,2°

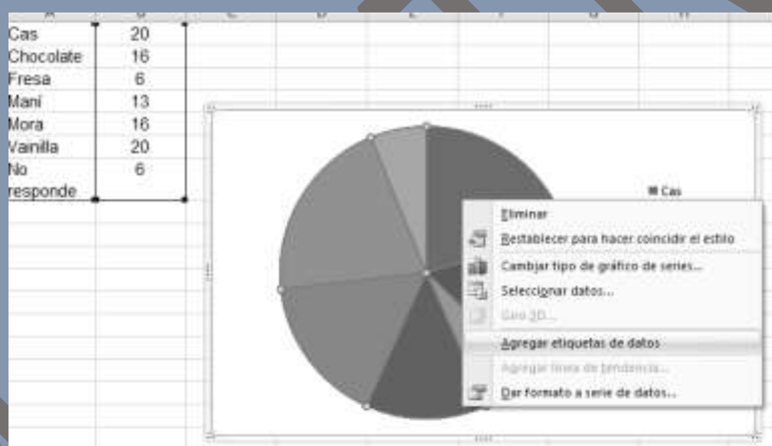
Gráfico 4
Colegio Eudora: Distribución porcentual de los estudiantes de sétimo, noveno y undécimo, según su preferencia por un sabor de helado.



En Excel:

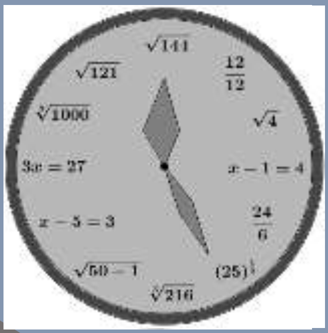


Para colocar los porcentajes en cada sector, se da clic derecho al área del gráfico:



Tiempo para practicar 3.1

Habilidades:
Analizar información estadística que ha sido representada en cuadros, gráficas u otras representaciones vinculadas con diversas áreas. Identificar los conceptos: unidad estadística, características o variables, observaciones o datos, población y muestra, para problemas estadísticos vinculados con diferentes contextos.
Identificar el tipo de dato cuantitativo o cualitativo correspondiente a una característica o variable
Utilizar representaciones tabulares para resumir un conjunto de datos



1. Considere la siguiente información:
   "En el Colegio Utopía se hará una investigación para determinar a cuáles estudiantes se les dará una beca. Para esto se encuestan a 325 estudiantes de diversos niveles, y se les pide información sobre:
   Sexo, número de hermanos, nivel que cursa, edad, salario de sus padres (alto, medio, bajo)"

   Determine:
   (a) Unidad.
   (b) Población.
   (c) Muestra.
   (d) Número de variables.

2. Con los datos del ejercicio 1, clasifique las variables:

Variable	Cualitativa	Cuantitativa Discreta	Cuantitativa Continua	Posible observación
Sexo				
Número de hermanos				
Nivel que cursa				
Edad				
Salario				

3. Considere la siguiente información:
   La empresa Los Quebrados desea conocer la calidad de los recipientes que produce. Para ello prueban el 5 % de sus recipientes y los someten a cierta temperatura para probar su resistencia. Un inspector los clasifica en Resistentes o No resistentes según el resultado de esa prueba.
   Determine:

   (a) Unidad.
   (b) Población.
   (c) Muestra.
   (d) Variable

4. Clasifique cada variable.

Variable	Cualitativa	Cuantitativa Discreta	Cuantitativa Continua	Posible observación
(a) Número de habitaciones.				
(b) Temperatura en el Volcán Tenorio.				
(c) Cantidad de mariposas en INbio.				
(d) Calificación en examen.				
(e) Número de accidentes.				
(f) Perfume que utiliza.				
(g) Calidad del agua.				
(h) Monto a pagar de recibo de agua.				
(i) Religión que profesa.				
(j) Horas promedio que estudia fuera del colegio.				
(k) Cantidad de películas que ve en el cine por mes.				
(l) Mes en que cumple años un estudiante.				
(m) Cantidad de veces que asiste un estudiante al colegio por año.				
(n) Estatura de una jirafa.				
(o) Cantidad de extra clases realizados durante el año.				
(p) Puesto que ocupa un estudiante en la directiva.				
(q) Cantidad de veces que se conecta en el Facebook un adolescente a la semana.				
(r) Distancia que recorre un estudiante para llegar a su colegio.				
(s) Dinero a pagar por el servicio de electricidad.				
(t) Cantidad de carros que pasan por un puente bailey por día.				

5. Analice cada situación y complete la tabla.

Situación	Dato	Población	Muestra	Variable	Clasificación de la variable
(a) Se desea consultar a las familias que viven en San Juan de Tibás sobre la cantidad de agua que consumen en metros cúbicos por mes. Para tal fin, se procede a encuestar a las familias de los tres barrios más densos.					
(b) En una fábrica de juguetes se desea conocer la calidad de sus productos. Para ello revisan 10 juguetes de cada modelo.					
(c) En el laboratorio Glez revisan la calidad de jeringas que producen. Para ello examinan 5 jeringas por cada lote de 100.					
(d) En el Colegio la Sonrisa Ideal, llegan odontólogos a examinar a los estudiantes, para verificar la cantidad de calzas que estos tienen. Como no pueden atender a todos, escogen a los 10 primeros de la lista de cada sección.					
(e) En el Colegio Andrómeda, se desea conocer el estado de las aulas luego de una actividad, para lo cual se revisaron solo las aulas con numeración impar.					
(f) Un distribuidor de golosinas quiere introducir en el mercado puntarenense un nuevo producto y necesita la opinión de los jóvenes de esa provincia. Para esto encuesta a jóvenes que asisten a los colegios y que tienen edades entre 14 y 16 años, con el fin de conocer sobre los dulces que estos prefieren.					

6. Se desea conocer sobre la situación que viven los adultos mayores de San Rafael de Heredia, como hay poco presupuesto, solo se aplica una encuesta a 30 personas mayores de diversos distritos y se les consulta sobre varios aspectos. Uno de los aspectos a preguntar es el distrito donde vive.

(a) Determine dato, población y muestra.

(b) ¿Cuál es una variable? Clasifíquela.

(c) Las observaciones ante esa pregunta se muestran seguidamente:

San Josecito	Santiago	Los Angeles	Concepción	Central	San Josecito
Central	Central	Los Angeles	San Josecito	Los Angeles	Central
Central	Central	San Josecito	Santiago	Central	Santiago
Los Angeles	Los Angeles	Central	Central	Central	Central
Central	San Josecito	Concepción	Los Angeles	San Josecito	Central

Con esta información, realice lo que se le solicita:

i. Construya una tabla de frecuencias donde se resuma la información anterior.
ii. Construya un gráfico con los datos

(d) También se les consultó sobre: edad, número de hijos, medicamentos que toma, horas que duerme, si hace deporte, si la casa es propia, gastos mensuales en comida, escolaridad alcanzada, veces que visita al año al dentista y religión que profesa. Clasifique cada una de las variables anteriores y dé en cada caso un ejemplo de la posible observación.

7. Se consulta a jóvenes de Siquirres sobre cuántas veces van al médico por año. Las respuestas son:

1	2	2	2	1	1	0	4	1	4
1	0	4	4	1	2	1	3	4	1

(a) Construya una tabla de frecuencias con la información anterior

(b) Construya un gráfico con la información anterior.

(c) Basados en la Tabla que se construyó en el punto (a) conteste:

i. ¿Cuántas personas van al médico al menos 2 veces al año?
ii. ¿Cuántos jóvenes visitan el médico a lo sumo 1 vez al año?
iii. ¿Cuántos jóvenes van al médico menos de 3 veces al año?
iv. ¿Cuántas personas visitan el médico más de 3 veces al año?
v. ¿Qué porcentaje de personas van al médico 2 veces al año?
vi. ¿Qué porcentaje de personas visitan el médico 5 veces al año?

8. Algunos jóvenes de una organización ambiental realizan una investigación en el Parque Nacional Braulio Carrillo. En una hora observan diversos ejemplares de mamíferos y los anotan en una bitácora. La información se resume seguidamente:

Jaguar	Tapir	Saíno	coyote	Mono carablanca	puma
saíno	Tapir	Tapir	danta	coyote	puma
puma	danta	Puma	danta	tepezcuintle	danta
saíno	tepezcuintle	danta	danta	danta	saíno
Mono carablanca	Jaguar	Tapir	coyote	Mono carablanca	saíno
Mono carablanca	coyote	Saíno	Jaguar	Tapir	Tapir
saíno	Mono carablanca	Mono carablanca	puma	danta	danta
coyote	coyote	Jaguar	saíno	saíno	saíno

Basados en esta información:

(a) Construya una tabla de frecuencias.
(b) Construya un gráfico de barras.

9. Considere la siguiente distribución de frecuencias

Tabla 3

Colegio Alpha: Horas de estudio independiente de estudiantes por semana. 2016

Número de horas de estudio	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa	Porcentaje
0	3	0,15	15
1	4	0,2	20
2	7	0,35	35
3	2	0,1	10
4	4	0,2	20
Totales	20	1	100

Basados en la Tabla 3 conteste:

(a) ¿Cuántas personas estudian al menos 2 horas por semana?
(b) ¿Cuántos estudiantes estudian a lo sumo 1 hora por semana?
(c) ¿Cuántos alumnos estudian menos de 3 horas?
(d) ¿Cuántas personas estudian más de 3 horas?
(e) ¿Qué porcentaje de personas estudian 2 horas o más?
(f) ¿Qué porcentaje de personas estudian 5 horas?

10. Se entrevista a un grupo de 60 personas sobre su gusto por la música, el 15% le gusta la música salsa, el 20 % clásica, 10% reggaeton, el 50 % rock y 5% no contesta.

(a) Construya una tabla de frecuencias
(b) Construya un gráfico circular.
(c) ¿A cuántas personas les gusta la música clásica?
(d) ¿Cuántas personas no contestaron la entrevista?

11. Indique en cuáles casos, la información se refiere a muestreo

I. El Departamento de Orientación de un colegio investiga la condición socioeconómica de los estudiantes. Para ello encuesta a todos los estudiantes de sétimo nivel.
II. La Cámara Nacional de Radio, para determinar la preferencia de los jóvenes de Costa Rica por ciertas emisoras, contactó a todos los jóvenes de San José y les aplicó un cuestionario.
III. Una compañía de Cable desea conocer la opinión de sus afiliados con respecto a las promociones de fin de año, para esto les aplica una entrevista.

12. A continuación se proporciona una tabla de datos agrupados, que sintetiza la información sobre la cantidad de ausencias de **40 estudiantes** de la Escuela La Puntual, en el 2012.

Complete correctamente cada uno de los **CINCO** espacios que están en blanco, según corresponda.

Tabla 4
Escuela la Puntual: Cantidad de ausencias de los estudiantes en el 2012.

Ausencias	Frecuencia Absoluta	Porcentaje
10		
12	5	12,5
15		20
20	4	
22		15
30	5	12,5

13. El cuadro adjunto muestra la edad de los niños de un albergue Costa Rica. Según la información proporcionada, es verdadero que

( ) 40 niños tienen a lo sumo 4 años

( ) el 10% de los niños tiene 4 años

( ) más de la mitad de los niños tienen una edad menor a 4 años

( ) la edad más común es 12 años

Edad	Frecuencia absoluta
1	16
2	12
3	12
4	10
5	8
6	6
7	5
8	2

14. La tabla adjunta, presenta las horas que hacen deporte un grupo de estudiantes de octavo nivel del Colegio Dinámico, los días sábados. Según esa información, es verdadero que

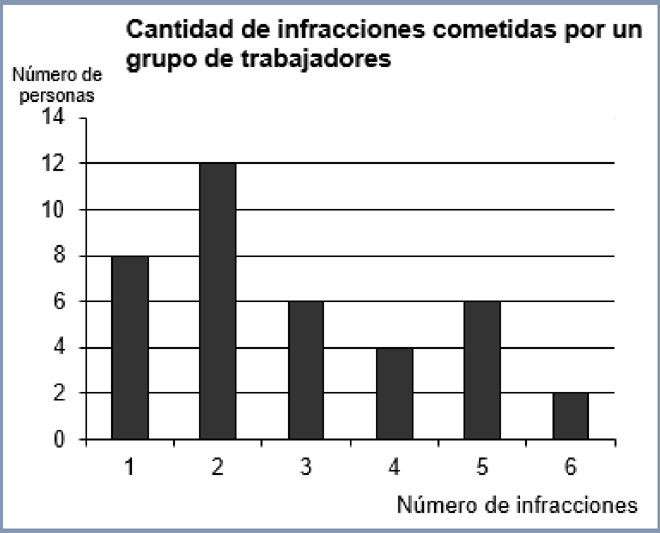
( ) 3 estudiantes realizan una hora de deporte los sábados.
( ) 15 estudiantes hacen deporte los sábados.
( ) 12% de estudiantes hacen una hora de deporte los sábados.
( ) se ha entrevistado a 15 estudiantes.

Horas dedicadas a deporte	Frecuencia Absoluta
0	7
1	12
2	2
3	1

15. Considere el gráfico, que muestra el número de infracciones de tránsito de un grupo de trabajadores de una empresa de San José.

Según la información proporcionada, conteste

(a) ¿Cuántos trabajadores participaron en la investigación?
(b) ¿Cuántos trabajadores tienen 6 infracciones?
(c) ¿Cuántos trabajadores tienen a lo sumo 3 infracciones?
(d) ¿Qué porcentaje de trabajadores tienen 2 infracciones?

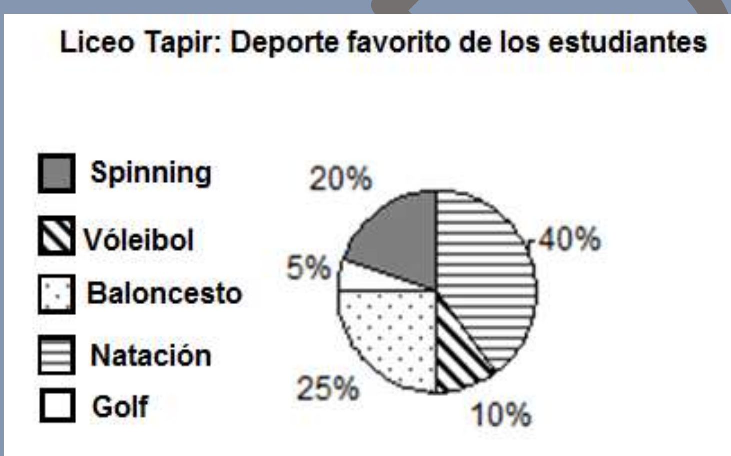


16. En una encuesta, para una empresa de productos alimenticios, se consultó a 60 familias de Garabito en el 2012 para saber cuántos litros de leche consumen por semana. La información obtenida se detalla seguidamente

7	7	4	0	1	2	0	1	5	5
2	3	6	5	7	9	7	9	8	6
2	3	5	6	6	9	8	9	7	7
5	6	6	5	7	8	3	2	5	8
7	7	6	4	4	3	3	3	5	5
5	6	7	7	6	5	7	6	5	7

(a) Construya una tabla de distribución de frecuencias.
(b) Construya un gráfico de barras.

17. Considere el gráfico

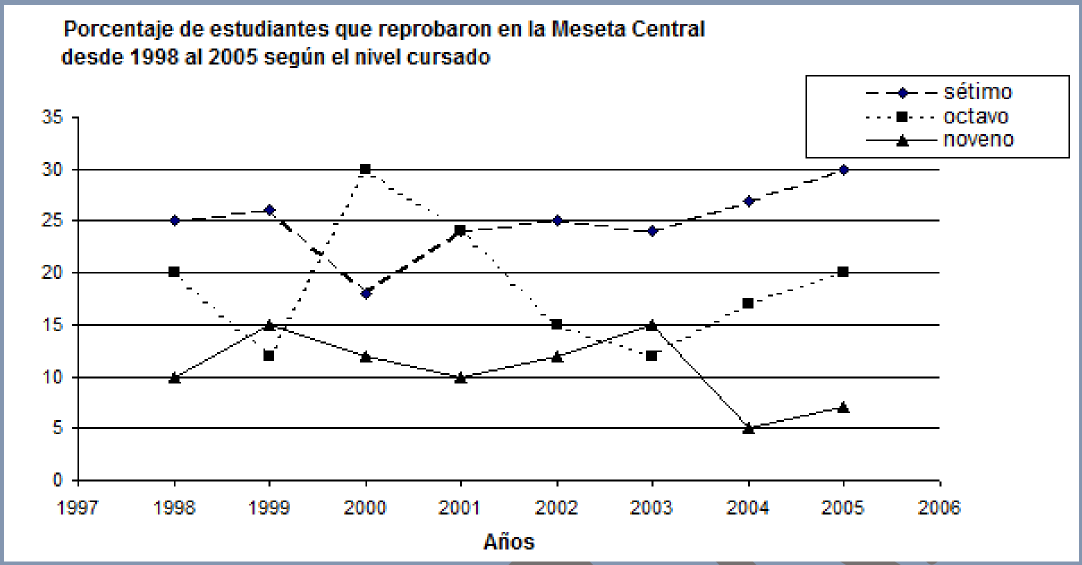


(a) 50 personas opinaron que su deporte favorito era el Spinning, entonces, ¿a cuántas personas se entrevistaron?

(b) ¿Cuántas personas practican vóleibol?

(c) ¿Cuál deporte es menos practicado?

18. Considere el siguiente gráfico.



De acuerdo con los datos del gráfico anterior, es verdadero que

( ) en el año 2000 la mejor promoción fue en octavo nivel.

( ) en los años 1999 y 2003 el porcentaje de reprobación para sétimo nivel fue el mismo.

( ) la diferencia porcentual en el año 1998 de reprobación entre sétimo y noveno nivel fue de 15.

( ) en el 2005, la cantidad de estudiantes de octavo nivel que reprobaron fue de 20

19. Analice el siguiente gráfico

Según la información proporcionada conteste:

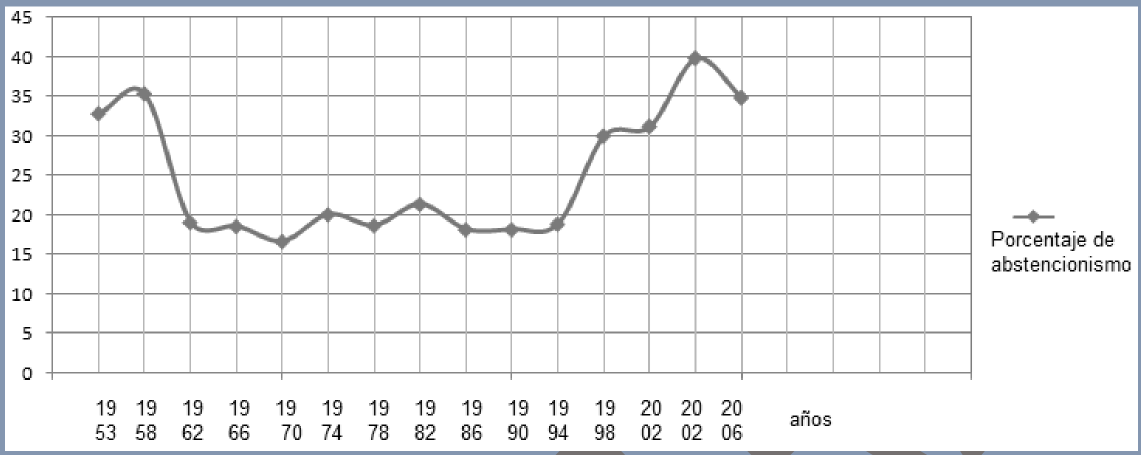
(a) ¿Cuál es la moda entre los países que son destinos de exportación del cacao en polvo sin azúcar?

(b) Si se suma el porcentaje de Honduras, Nicaragua y Alemania, se obtiene el mismo porcentaje del siguiente país ________________

(c) El porcentaje de Estados Unidos es igual a la suma de los porcentajes de los siguientes países __________________________

20. Considere el gráfico.

Costa Rica: Porcentaje de abstencionismo electoral entre los años 1953 y 2006



Fuente: TSE

* El 2002 se repite porque hubo segunda ronda electoral

Conteste:

(a) ¿Por qué es conveniente usar un gráfico lineal para este tipo de información?

(b) ¿Entre cuáles dos años electorales consecutivos hubo el mayor aumento de abstencionismo?

(c) ¿Entre cuáles dos años electorales consecutivos disminuyó más significativamente el abstencionismo?

(d) ¿Entre cuáles años electorales consecutivos hubo un menor cambio en el porcentaje de abstencionismo?

(e) En el 2002 hubo segunda ronda electoral, ¿en cuánto porciento aumentó el abstencionismo en esa segunda ronda, respecto a la primera? Comente en clase cuáles pudieron ser los motivos de ese aumento.

(f) ¿Cuáles fue el año con menor abstencionismo?

(g) El padrón electoral en el 2006 fue de 2 548 577 personas. ¿Cuántas personas aproximadamente votaron en esas elecciones?

21. Considere la tabla y conteste lo que se le solicita.

Costa Rica. Nacimientos según año y sexo
Período 1990 – 2009

Año	Sexo		Total
	Hombre	Mujeres	
1990	42.291	39.648	81.939
1991	41.707	39.403	81.110
1992	41.390	38.774	80.164
1993	41.092	38.622	79.714
1994	41.104	39.287	80.391
1995	41.181	39.125	80.306
1996	40.558	38.645	79.203
1997	39.790	38.228	78.018
1998	39.428	37.554	76.982
1999	40.417	38.109	78.526
2000	39.943	38.235	78.178
2001	39.214	37.187	76.401
2002	36.868	34.276	71.144
2003	37.172	35.766	72.938
2004	36.748	35.499	72.247
2005	36.700	34.848	71.548
2006	36.276	35.015	71.291

Fuente: INEC

(a) En qué año hubo mayor diferencia absoluta entre la cantidad de nacimientos de hombres y de mujeres.

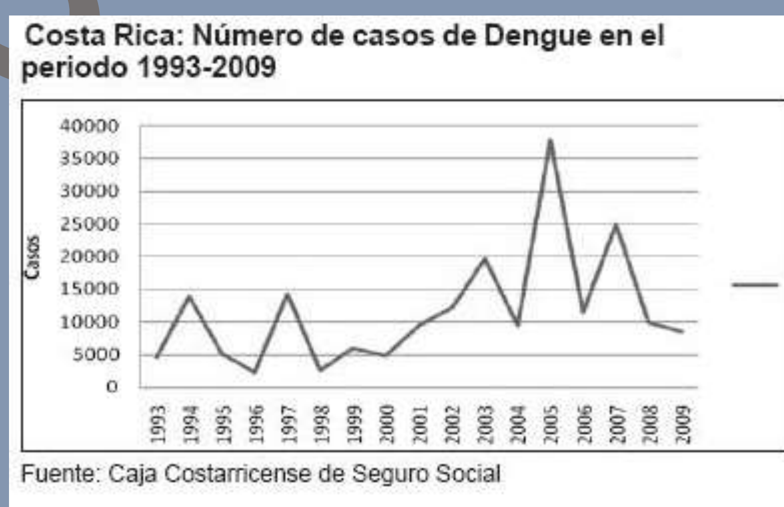
(b) ¿Cuál es la razón entre el número de nacimientos de hombres y mujeres en 1999?

(c) ¿Cuál es el año en que hubo más nacimientos en total?

(d) ¿Cuál es el porcentaje de hombres nacidos en 1997?

(f) Con ayuda del Excel construya un gráfico lineal donde se aprecie el número total de nacimientos entre 1990 y 2009

22. Analice el siguiente gráfico y conteste.



Fuente: Caja Costarricense de Seguro Social

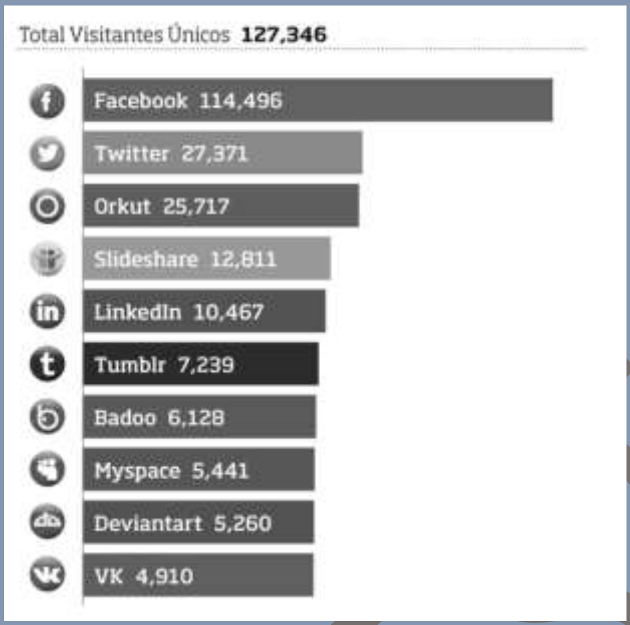
(a) ¿Entre cuáles dos años se dio el mayor crecimiento de casos de dengue?

(b) ¿Cuáles años consecutivos comprenden el más largo periodo en que los casos de dengue crecieron?

(c) ¿En qué años los casos de dengue fueron superiores a 15 000?

(d) ¿Cuántos casos de dengue se reportaron en el 2007?

23. El siguiente gráfico muestra en millones de usuarios, las visitas de personas a una red social durante abril del 2007. Según esta información, conteste:



(a) ¿Por qué si se suma el total de visitas de cada sitio Web, no coincide con el total de visitantes únicos?

(b) Según el número de visitas ¿qué porcentaje le corresponde a Myspace?

(c) Según el número de visitas ¿qué porcentaje le corresponde a Facebook?

(d) Si sumamos todas frecuencias absolutas de las redes sociales exceptuando al Facebook, ¿estas superan a la principal red social?

24. La tabla adjunta, presenta las calificaciones de los estudiantes de un grupo de sétimo nivel en Matemática. Según esa información, es verdadero que

Calificaciones	Frecuencia Absoluta
65	1
70	2
75	3
80	4
85	20
90	12
95	6

(A) 42 estudiantes tienen una calificación mayor 80.
(B) 85 estudiantes obtuvieron un 20 como calificación.
(C) 25% de los estudiantes tienen una nota de 90
(D) 3 estudiantes tienen una nota menor a 70.

25. En la tabla adjunta se muestran las edades de los estudiantes conductores que utilizan el parqueo de la Universidad Nacional por día. De acuerdo con los datos del cuadro, ¿cuál afirmación es verdadera?

Edad "x" de los conductores	Frecuencia absoluta
18	200
19	305
20	406
21	200
22	200
23	46
24	5

(A) 451 conductores que usan el parqueo tienen al menos 21 años
(B) 505 conductores que usan el parqueo tienen a lo sumo 20 años.
(C) la mitad de los conductores que usan el parqueo tienen 20 años
(D) 46 conductores que usan el parqueo tiene más de 23 años.

26. Considere la información proporcionada en la tabla.

Costa Rica: Porcentaje de repitencia en secundaria, según el tipo de educación, de los años 2003 a 2012

Tipo de Educación	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Pública	11,6	11,3	12,6	12,6	13,4	12,8	11,0	12,9	14,3	13,3
Privada	2,9	2,6	3,4	3,4	3,5	3,4	2,3	2,3	2,5	2,0
Subvencionada	3,0	2,7	2,9	3,1	3,7	3,6	3,5	3,3	3,7	2,8

Fuente: Estado de la nación.

(a) Construya con ayuda del Excel un gráfico lineal donde se logre apreciar las tres series a lo largo de los años indicados.
(b) ¿Cuál es el año donde es menor la diferencia entre el porcentaje de repitencia de la educación pública y privada?

Medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central destacan un aspecto importante de la distribución en estudio. Sirven para hacer comparaciones y análisis.

Medidas de tendencia central en datos no agrupados

En datos no agrupados (es decir que no están separados en clases o intervalos) se puede hallar cada parámetro estadístico de la siguiente forma:

☑ **Media aritmética** (promedio): Es la suma de los valores de la variable dividida por el número de datos. Se puede simbolizar mediante $\overline{x}$.

$$\overline{x} = \frac{\text{suma de valores de la variable}}{\text{total de datos}}$$

Ejemplos:

1) Hay colegios donde se saca la media de todas las materias de cada estudiante, para así determinar a los mejores promedios por nivel. Supongamos que estas son las notas de los tres mejores promedios:

Estudiante / Materia	Armando	Josefa	Alejandrina
Español	98	90	95
Matemática	95	92	92
Ciencias	96	90	95
Estudios Sociales	75	95	95
Inglés	100	90	97
Francés	98	92	90
Cívica	100	93	90
Educ Fisica	98	100	90
Música	100	95	90
Artes	100	91	90
Promedio o media	$\frac{98+95+96+75+100+98+100+98+100+100}{10}$ $= 96$	$\frac{90+92+90+95+90+92+93+100+95+91}{10}$ $= 92{,}8$	$\frac{95+92+95+95+97+98+90+90+90+90}{10}$ $= 92{,}4$

Hay que tener muy claro que la media es un parámetro para hacer comparaciones, y en este caso es útil para determinar que Armando tiene el mejor promedio. Note que a pesar de que Armando tuvo mejor promedio, su calificación en Estudios Sociales fue la más baja de todas; Josefa ni Alejandrina tuvieron una nota inferior a 90, pero Armando sí. Ahora bien, su mejor promedio lo obtiene porque el resto de notas son bastante altas.

Si al analizar los datos, hay algunos pocos valores más grandes o más pequeños del común, provocan que el promedio se incline hacia esos valores.

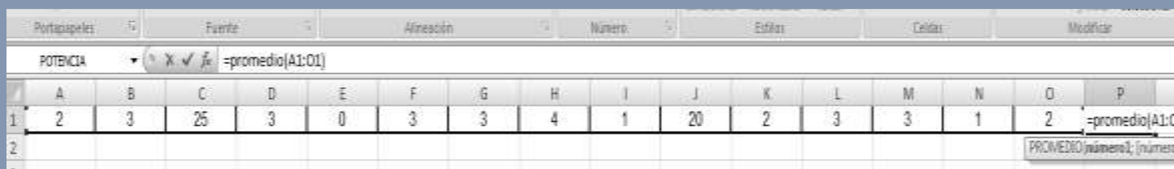
2) Por ejemplo, supongamos que se desea hacer un estudio en el departamento de orientación para verificar cuántas veces en promedio faltaron a clases los estudiantes en el III trimestre. Obtienen los siguientes datos del 8F:

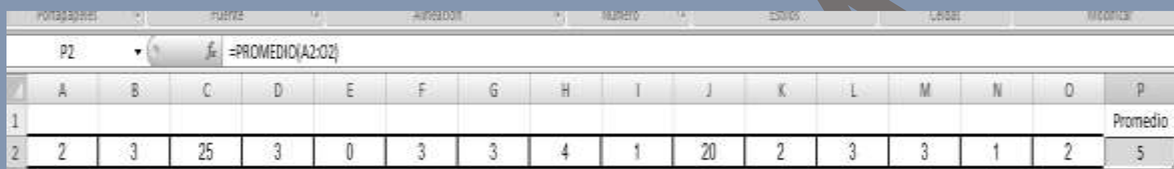
2	3	25	3	0	3	3	4	1	20	2	3	3	1	2

$$\bar{x} = \frac{2+3+25+3+0+3+3+4+1+20+2+3+3+1+2}{15} = 5$$

El promedio de ausencias del grupo es de 5. Sin embargo la mayoría de estudiantes sólo faltaron 2 o 3 veces. Este resultado de la media se debe a que dos estudiantes tuvieron una mala asistencia, con 25 y 20 ausencias, lo cual influyó en el promedio del grupo.

En Excel





☑ **Moda**: Es el valor de la variable con más frecuencia.

Ejemplos:

1) En una encuesta realizada en el colegio, se les consultó a cuál materia básica le dedicaban más estudio por semana. Las respuestas fueron las siguientes:

Estudios Sociales	Ciencias	Español	Matemática	Inglés	Francés	Estudios Sociales	Matemática
Matemática	Inglés	Ciencias	Español	Estudios Sociales	Estudios Sociales	Ciencias	Ciencias

En este caso la moda es Estudios Sociales, ya que es la observación con mayor frecuencia absoluta (4)

2) Considere la siguiente información tomada del INEC (Instituto Nacional de Estadística y Censos) y determine la moda.

Número de aposentos en viviendas construidas en San José, en un área de construcción de menos de 40 m^2

Número de aposentos	Cantidad de viviendas
1	2
2	69
3	1792
4	254
5	24
6 o más	123

Fuente: INEC 2001

La mayor frecuencia es 1792, por tanto la moda es 3 aposentos.

☑ **Máximo y mínimo:** Estos valores se definen a partir de sus propios nombres. El máximo corresponde al dato de mayor valor numérico del conjunto y el mínimo representa el de menor valor numérico.

Con la información de la tabla anterior, el mínimo es uno, pero no se conoce el máximo.

Analicemos algunos ejemplos:

Determine la media, mediana y moda en cada serie de datos.

a) Las edades de 11 participantes en un campamento:

12, 15, 8, 9, 5, 3, 12, 5, 11, 6, 5

Moda = 5, es decir la edad que más se repite es 5

Media = $\dfrac{12+15+8+9+5+3+12+5+11+6+5}{11} \approx 8,27$

La edad promedio es de 8, 27 años

La edad máxima es 15 y la mínima 3

b) Número de veces que 4 jóvenes han viajado a Puntarenas: 4, 15, 22, 10

Moda: No hay

Media = $\dfrac{4+10+15+22}{4} = \dfrac{51}{4} = 12,75$

Máximo: 22

Mínimo 4

☑ **Media o promedio ponderado en datos agrupados (tablas):**

Es la suma de: los productos de los valores de la variable por sus frecuencias absolutas, divida entre el total de valores.

Ejemplos:

1) Con la información de la siguiente tabla determine el promedio ponderado, media, máximo y mínimo

.

Número de caries de estudiantes de sétimo nivel de un colegio urbano

Número de caries	Frecuencia absoluta
0	2
1	19
2	17
3	10
4	10
5	8
Totales	66

Para determinar el promedio ponderado, es recomendable construir una columna más, donde se calcule el producto del número de caries con su frecuencia.

Número de caries	Frecuencia	Producto del número de caries por la frecuencia
0	2	$0 \cdot 2 = 0$
1	19	$1 \cdot 19 = 19$
2	17	$2 \cdot 17 = 34$
3	10	$3 \cdot 10 = 30$
4	10	$4 \cdot 10 = 40$
5	8	$5 \cdot 8 = 40$
Totales	66	163

Media ponderada: $\frac{163}{66} \approx 2{,}46$ caries.

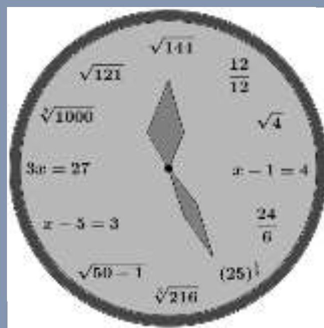
Moda: Como la mayor frecuencia es 19, entonces la media es el valor al que corresponde esa frecuencia, es decir 1. Por tanto tener una calza es la moda de este análisis.

Mínimo: 0 calzas

Máximo: 5 calzas

Tiempo para practicar 3.2

Habilidades: Determinar medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido, para caracterizar un grupo de datos.



1. En cada lista de datos, determine la moda, media, recorrido, valores máximo y mínimo.

(a) 12, 15, 8, 4, 8, 25, 6, 7, 9, 1, 1, 3

(b) 23, 41, 12, 11, 7, 35, 6, 45, 42, 53, 35, 46

(c) 8, 7, 6, 8, 6, 8, 8, 7, 8, 6, 7, 8

(d) 15, 14, 13, 20, 16, 18, 14, 35, 12

2. Los siguientes datos corresponden a las edades de 11 ciudadanos.

15 20 16 19 54 65 10 11 40 15 52

Determine:
(a) La moda
(b) La media
(c) El máximo
(d) El mínimo

3. Los siguientes datos corresponden a la masa corporal en kilogramos de algunos estudiantes.

35 39 45 60 78 55 35 29 48 69

De acuerdo con la información determine:

(a) La moda
(b) La media
(c) El máximo
(d) El mínimo

4. La cantidad de hermanos de un grupo de personas es 1, 3, 1, 3, 4, 3, 5, 2, 1

Según esa información, ¿cuántas modas se aprecian en los datos?

5. Las calificaciones de un estudiante en matemáticas cada trimestre son

72 90 82

Determine la media de esas calificaciones.

6. En el siguiente recuadro se muestra la cantidad de litros de leche que consume 8 familias al mes.

17 25 8 12 17 26
25 17

Determine:
(a) La moda (b) La media
(c) El máximo (d) El mínimo

7. Las calificaciones de los estudiantes en Español son 83, 82, 71, 80, 25, 70, 65

(a) Determine la media de las calificaciones.

(b) De acuerdo con el resultado obtenido anteriormente, analice la siguiente frase:

“La media no tiene que ser un valor propio de la variable y es muy sensible a valores extremos en los datos”.

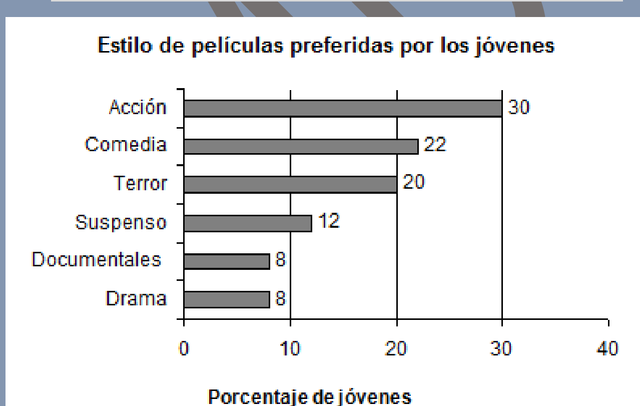
8. En una prueba de gimnasia la puntuación de cada atleta se calcula eliminado la peor y la mejor nota de los jueces. Si las puntuaciones obtenidas han sido: 8,1; 9,0; 9,3; 9,6; 8,2; 8,7 y 9,5. ¿Qué nota corresponde?

9. Las edades en años cumplidos de los integrantes de un grupo comunal aparecen en el cuadro adjunto. Según la información, determine:

(a) La moda
(b) La media
(c) El máximo
(d) El mínimo

Edad en años cumplidos	Número de personas
12	1
15	3
16	2
20	1
25	1
26	1
28	1
32	1

10. De acuerdo con los datos del gráfico adjunto, analice las siguientes proposiciones



I. La distribución presenta dos modas.

II. Doce de cada cien jóvenes prefieren las películas de suspenso.

De estas son verdaderas

(A) ambas.
(B) ninguna.
(C) solo la I.
(D) solo la II

11. En la tabla adjunta se muestran las notas de un estudiante de octavo nivel, conjuntamente con los valores porcentuales de cada rubro, entonces ¿cuál es su promedio ponderado?

Rubro	Porcentaje (%) del rubro	Calificación obtenida
Concepto	5	90
Asistencia	5	100
Trabajo en clase	15	85
Tareas	10	80
Exámenes	65	75

12. Los siguientes datos corresponden a la masa en kilogramos de 7 personas.

45 57 40 38 57 69 48

De acuerdo con la información anterior, es verdadero que

(A) Hay dos modas
(B) la moda es mayor que la media
(C) el máximo supera en 10 a la moda
(D) el valor de la media pertenece al conjunto formado por la masa en kilogramos.

13. La tabla adjunta, presenta las horas que dedican a leer los estudiantes del 8B de un colegio nocturno por mes. Según la información, conteste:

Horas dedicadas a leer	Frecuencia Absoluta
0	3
1	3
2	6
3	9
4	0
5	11

(a) ¿Cuál es la moda de las horas dedicadas a leer?
(b) ¿Cuál es la media de las horas dedicadas a leer?
(c) Construya un gráfico de barras con esta información

14. Una familia desea hacer un tour al avistamiento de ballenas en el Pacífico Sur de Costa Rica en el sétimo fin de semana, para lo cual busca información de tres compañías que han prestado el servicio en los 6 fines de semana anteriores.

Compañía / Ballenas por fin de semana	A	B	C
Primer fin de semana	6	5	5
Segundo fin de semana	7	8	8
Tercer fin de semana	9	7	9
Cuarto fin de semana	5	7	8
Quinto fin de semana	8	10	8
Sexto fin de semana	12	7	7

(a) Si la familia decide contratar la compañía con la mayor media de ballenas vistas por fin de semana, ¿Cuál compañía escoge?

(b) Si la decisión la toman de acuerdo a la mediana, ¿cuál compañía sería mejor?

15. La siguiente ilustración muestra diversas condiciones el tiempo de 4 días en San José, para el mes de agosto del 2015

Determine la moda, media y mediana de:
(a) Velocidad del viento
(b) Mililitros de agua llovida
(c) Temperatura máxima

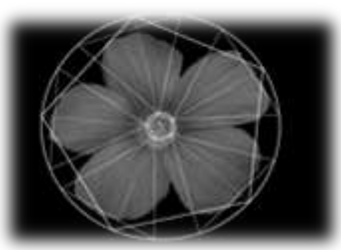
GEOMETRÍA

Geometría

“El libro del Universo está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin cuya mediación es humanamente imposible comprender ni una palabra” (Galileo Galilei).

Cuando apreciamos la naturaleza, y las construcciones realizadas por el ser humano, logramos distinguir cientos de figuras geométricas y relaciones interesantes entre ellas.

No es necesario esforzarse mucho para vislumbrar figuras tan perfectas, como los hexágonos de un panal, las espirales que se forman con los quelites de las plantas de chayote, polígonos y círculos en diversas especies de mariposas, entre otros muchos ejemplos.



Y es que la geometría ha fascinado a la humanidad a través de la su historia, desde las imponentes pirámides egipcias hasta las místicas esferas con las que contamos en Costa Rica, solo por nombrar dos de los ejemplos más conocidos.

La ingeniería, arquitectura, topografía, aviación, astronomía y otras disciplinas no podrían desarrollarse sin los conocimientos geométricos que poseemos actualmente, los cuales están en expansión, y nos sorprenden cada día con nuevos hallazgos e importantes aplicaciones.

La geometría, también nos permite desarrollar competencias como la observación, síntesis, ingenio e innovación, que son imprescindibles en la resolución de diversos problemas.

¡En este capítulo, exploraremos una parte de este fascinante mundo!

Conocimiento: Conceptos geométricos

Escenario de aprendizaje

Cancha geométrica

Motivados por la excelente participación de la Selección Nacional de fútbol en el Mundial Brasil 2014, la profesora de Matemática, en coordinación con el Departamento de Educación Física y Artes Plásticas, solicitó a los estudiantes realizar una maqueta de una cancha de fútbol y que identificaran la mayor cantidad de figuras geométricas

La cancha de fútbol, así como todo nuestro entorno, está cargada de entes geométricos, cuyo estudio ha cautivado al ser humano desde hace milenios.

Sin mayor dificultad, y con un breve repaso de conceptos de educación primaria, se pueden identificar en la cancha, elementos geométricos como:

Punto: Intuitivamente sabemos qué es un punto, aunque quizá no nos hayamos detenido a dar una definición de este. En la cancha de fútbol de la maqueta, el punto podría observarse en la señalización para el tiro de penal.

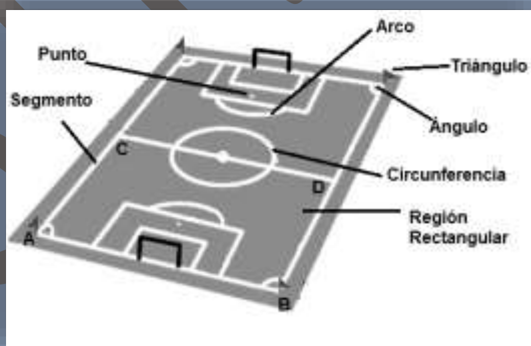
Segmento: Cada porción de línea recta, que demarca la cancha, representa un segmento.

Triángulo: En la maqueta se aprecian regiones triangulares, que representan los banderines de esquina.

Rectángulo: La cancha está delimitada por cuatro segmentos, que forman un rectángulo. Además el área de juego, que queda limitada por ese rectángulo, corresponde a una región rectangular.

Ángulo: La maqueta muestra gran cantidad de ángulos, entre ellos, los ángulos rectos de cada esquina de la cancha.

Circunferencia: Presente en el centro de la cancha.



Al observar estas y otras figuras geométricas presentes en la cancha, surge la necesidad de formalizar algunos conceptos. Pues, por ejemplo, a pesar de que podamos tener la noción de qué es un segmento, quizá no todos lo concibamos de manera similar.

Y es que desde tiempos antiguos, el definir algunos entes geométricos, no fue tarea sencilla. Entre las definiciones que más controversia desataron, fueron las de **punto y recta.**

Para Euclides, el padre de la geometría, (325 aC – 265 aC), un punto era:

"aquello que no tiene partes"

Y la recta (o línea):

"es una longitud sin anchura"

Pero, entre estas definiciones, saltan ciertas inquietudes: ¿qué es no tener partes? y, ¿qué es no tener anchura?.

Y es que precisamente los conceptos de "partes" y "anchura", no habían sido definidos previamente por Euclides, por tanto, quedaban a la interpretación de quien los estudiase; es decir, no aportaba ninguna formalidad o unificación que permitiera describir lo que se entiende por punto y recta.

Tiempo después, y luego de muchos debates entre diversos matemáticos, se llegó a la conclusión de que no existía una definición satisfactoria para estos dos entes geométrico.

Por tanto, se consideraron al punto, recta, plano y espacio como **términos primitivos.** Es decir, son ideas formadas en nuestra mente a través de la observación del entorno, y solamente podemos hacer representaciones concretas de ellas, pero no definirlas.

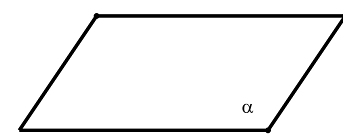
Seguidamente se formalizan algunos conceptos de figuras geométricas.

Espacio

Es un término primitivo. Se considera el conjunto universo de la geometría. En él se encuentran todos los demás elementos.

Plano

Lo más parecido a este elemento del espacio es una hoja de papel, pero a diferencia de esta, el plano es ilimitado y no tiene grosor. El plano es una superficie infinita de dos dimensiones.

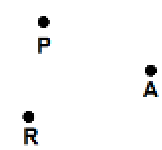


Plano α

Para nombrarlo, se utiliza una letra del alfabeto griego.

Punto

Es otro término que no se puede definir. Su representación más cercana es el orificio que deja un alfiler en una hoja de papel o un granito de arena. En el espacio hay infinitos puntos.



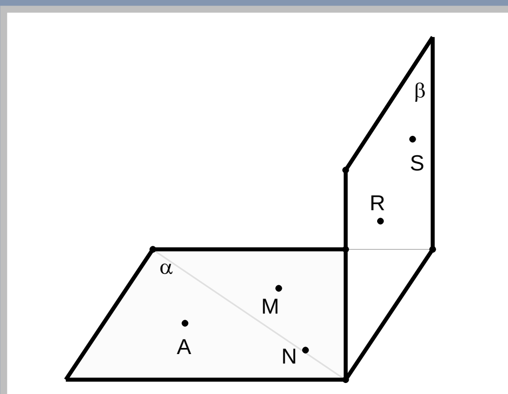
Puntos A, P y R

Para identificarlos se usa una letra mayúscula de nuestro alfabeto.

Puntos coplanares y no coplanares

- Tres o más puntos son coplanares si pertenecen a un mismo plano.

- Tres o más puntos son no coplanares, si no existe un mismo plano que los contiene a todos.



Los puntos A, M y N son coplanares y pertenecen al plano α.

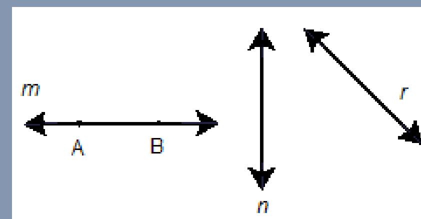
Los puntos S, R y M son no coplanares, ya que S y R pertenecen al plano β, mientras que M pertenece a α.

Recta

Una representación cercana de la recta es un hilo tenso, solo que ésta es infinita, porque sus extremos son ilimitados. En una recta hay infinitos puntos.

Para nombrar las rectas, se les asigna una letra minúscula de nuestro alfabeto, o bien queda expresada por dos puntos que pertenezcan a ellas.

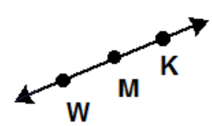
Los siguientes dibujos representan una recta:



La recta *m* se puede expresar también como: $\overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$

Puntos colineales y no colineales

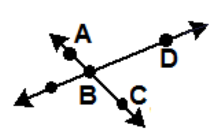


W, M y K son puntos colineales.

Tres o más puntos son colineales si pertenecen a una misma recta, es decir, una misma recta contiene dichos puntos. En el ejemplo de la izquierda, para expresar que los puntos son colineales, se escribe:

W – M – K

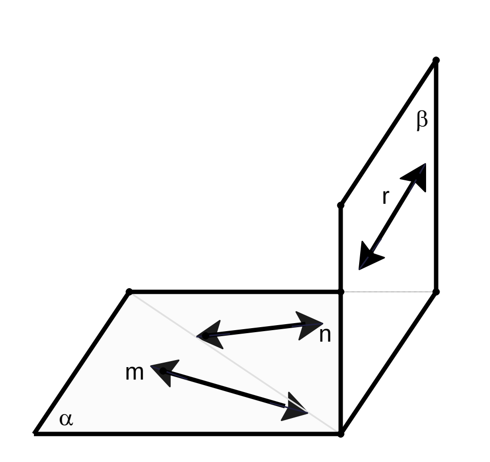
Tres o más puntos son no colineales si no existe una misma recta que los contiene a todos.



A, B y C son colineales.
D, B y C son no colineales.

Rectas coplanares y no coplanares

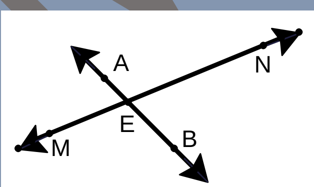
- Dos o más rectas son coplanares si pertenecen a un mismo plano.
- Dos o más rectas son no coplanares si no existe un mismo plano que las contenga.



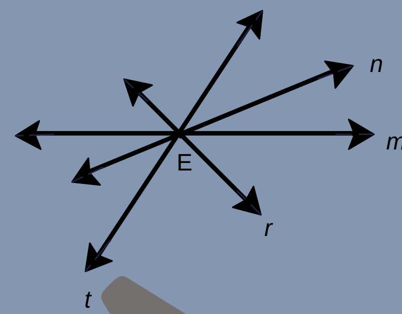
Las rectas m y n son coplanares, y pertenecen al plano α.
Las rectas m y r son no coplanares.

Intersección de rectas

- Cuando dos rectas distintas se intersecan, lo hacen en un punto.
- Dos o más rectas que se intersecan en un mismo punto se llaman **rectas concurrentes.**



$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{MN} = \{E\}$ y se lee: la intersección de las rectas AB y MN es el conjunto formado por el



Las rectas *n, t, m* y *r* concurren en el punto E

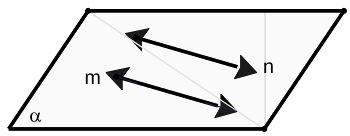
- Cuando dos rectas se intersecan y formar ángulos no todos iguales, se llaman **rectas oblicuas.**

En el ejemplo anterior las $\overleftrightarrow{AB}$ *y* $\overleftrightarrow{MN}$ son oblicuas.

- Si dos rectas coplanares tienen un punto de intersección, y forman cuatro ángulos iguales, las rectas se llaman **perpendiculares** y los ángulos se llaman **rectos.**

- Dos o más rectas **coplanares** que no se intersecan, reciben el nombre de **rectas paralelas.** Se dice que la intersección de estas es vacía.

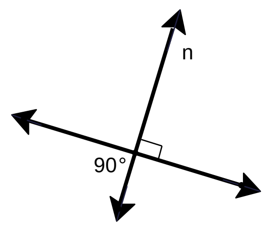
- Dos o más rectas **no coplanares** que no se intersecan, reciben el nombre de **rectas alabeadas.**



Las rectas m y n son paralelas, por consiguiente $m \cap n = \phi$.

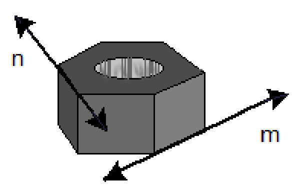
Esto se lee: la intersección de las rectas m y n es el conjunto vacío.

Simbólicamente se expresa $m \parallel n$



Las rectas m y n son perpendiculares y forman cuatro ángulos rectos.

Simbólicamente se expresa $m \perp n$

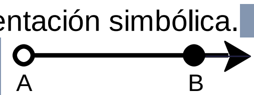


Las rectas m y n son alabeadas.

Semirrecta

⌗ La semirrecta es una parte en que queda dividida la recta por un punto de esta. Dicho punto no pertenece a la recta y se llama **punto frontera.**

⌗ Para expresar gráficamente la semirrecta, se deja el punto de frontera sin rellenar, para indicar que este no está incluido. Lo mismo sucede en la representación simbólica.

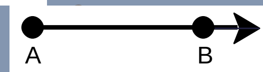


Simbólicamente, $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{AB}$

Rayo

⌗ Es la unión de una semirrecta y su punto frontera

⌗ Para expresar gráficamente el rayo, se deja el punto de frontera relleno, para indicar que este está incluido. Igualmente en la representación simbólica.

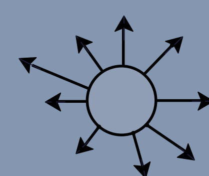


Simbólicamente, $\overset{\bullet\!\!\longrightarrow}{AB}$

⌗ Algunos libros de texto, representan el rayo de origen A y que contiene un punto B como $\overrightarrow{AB}$. Ambas notaciones son correctas.

⌗ Es importante tener claro que $\overset{\bullet\!\!\longrightarrow}{AB}$ no es igual a $\overset{\bullet\!\!\longrightarrow}{BA}$

⌗ Un rayo tiene inicio pero no fin. Una manera de poder imaginarnos un rayo, podría ser asociándolo a los rayos del sol.



Segmento

⌗ Un segmento es la porción de una recta determinada por dos puntos llamados extremos.

⌗ El segmento de extremos N y L se simboliza $\overset{\bullet\!-\!\bullet}{NL}$, o simplemente $\overline{NL}$.

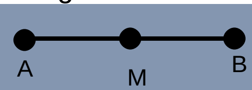
⌗ El segmento es finito, por tanto tiene medida. La medida del segmento $\overline{NL}$ se simboliza NL.

NL = LN

- ***Punto medio de un segmento:***

El punto medio M, del segmento AB, es un punto del segmento que dista lo mismo de A que de B.

Es decir, el punto medio es aquel que divide el segmento en dos partes iguales.



M es punto medio de $\overleftrightarrow{AB}$,

por tanto AM = MB

- La menor distancia entre un punto exterior a una recta y esta, es la medida del segmento perpendicular a ella desde ese punto. ¡Construya el dibujo!

- Dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida.

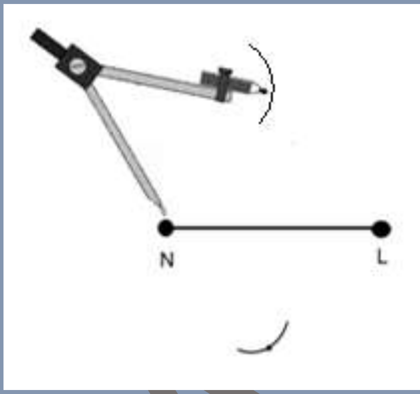
$$\overline{RT} \cong \overline{KJ} \Rightarrow RT = KJ$$

Construcción del punto medio de un segmento

1) Trace con una regla un segmento cualquiera.

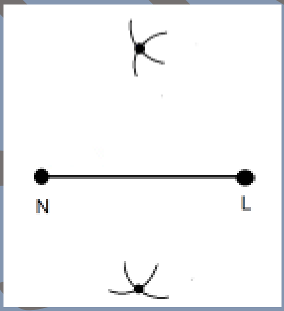
2) Coloque el compás sobre un extremo del segmento (en este caso sobre el punto N) y ábralo hasta que llegue más allá de su mitad.

3) Trace dos arcos hacia arriba y abajo.

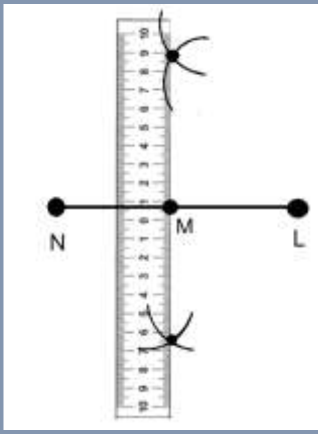


4) Repita los pasos 2 y 3, pero con el punto L.

5) Marque el punto de intersección de los arcos formados en los pasos 3 y 4.



6) Con la regla trace una línea que una esos puntos de intersección. La intersección de esa línea con el segmento NL es precisamente su punto medio. Compruébelo haciendo la medición.



Visualización espacial

Nosotros vivimos en un espacio de tres dimensiones, por lo que es muy común observar cuerpos sólidos compuestos por figuras geométricas: hermosos diamantes, pirámides y esferas antiguas, balones de fútbol, botellas, cajas, sombreros para fiestas, entre muchos otros.

Pirámides de Sudán

Conocer al menos las propiedades de los cuerpos sólidos más comunes, puede ser de mucha utilidad, por ejemplo al sacar el presupuesto para pintar una habitación, conocer la cantidad de agua que puede almacenar un recipiente, el número de bolinchas que se pueden empacar en una caja...

Estas y muchas otras situaciones exigen diversas competencias matemáticas, por lo cual, en este apartado, se dará una introducción a la terminología básica relacionada con estos tópicos.

Escenario de aprendizaje

Gandolfo estaba recortando los dados que aparecen en el apéndice de este libro, para así poder jugar y aprender en la dinámica de número enteros.

Como es un joven que acostumbra analizar las cosas, se da cuenta de que una figura de dos dimensiones se transforma en un cubo, el cual tiene tres dimensiones.

Respecto al primer dado, analice:

a) ¿Cuántos cuadrados tiene esa figura?

b) ¿Cuántos lados tiene el dado?

c) Tomando por nombre el número de cada cuadrado, ¿cuáles cuadrados son paralelos?

d) ¿Cuáles cuadrados son perpendiculares?

A cada uno de los seis cuadrados que forman el cubo, se les asigna el nombre de **caras.**

Una cara es la superficie plana que delimita el cuerpo geométrico.

Un compañero le dijo a Gandolfo que para determinar la cantidad de lados que tiene el dado, basta con determinar el perímetro de un cuadrado y multiplicarlo por las seis caras. Sin embargo, Gandolfo se percató de que hay lados que son compartidos por dos caras, por tanto, ese razonamiento era equívoco.

Para los cuerpos geométricos, lo que comúnmente conocemos como lado, recibe el nombre de **arista.**

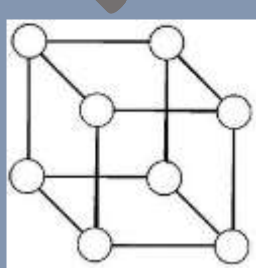
Una arista es el segmento en el que se intersecan dos caras.

Al contabilizar la cantidad de aristas, Gandolfo concluyó que eran 12.

Existen puntos que son la intersección de tres aristas, a los que se les llama **vértices.**

El vértice es el punto en el que se intersecan tres o más aristas del cuerpo sólido.

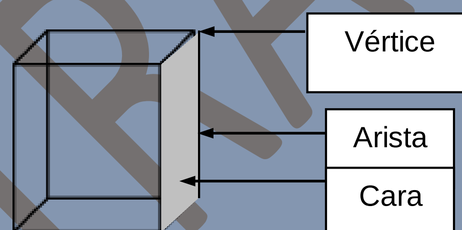
El dado, tiene 8 vértices.

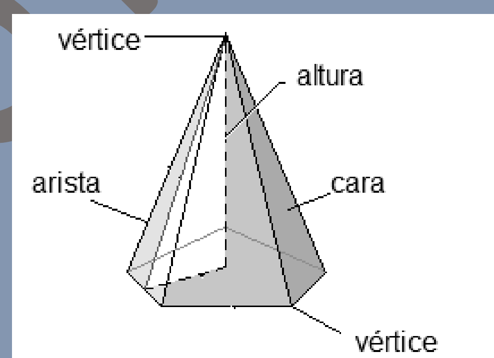


- Las caras paralelas son – 1 con – 7, 5 con 9, – 4 con 2.

- Hay diversas caras perpendiculares entre sí. Por ejemplo las caras -4, 9, 2 y 5 son perpendiculares a la cara –7.

En resumen:





El matemático Euler, estableció una relación entre la cantidad de aristas A, vértices V y caras C de un poliedro (cuerpo sólido, cuyas caras son planas).

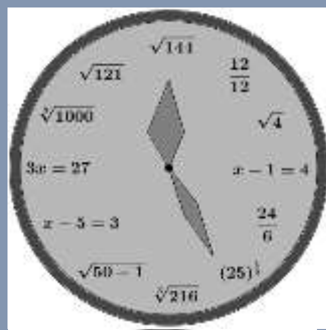
La relación se plantea con la siguiente igualdad:

$$C + V - A = 2$$

¡Compruebe esta relación con el dado!

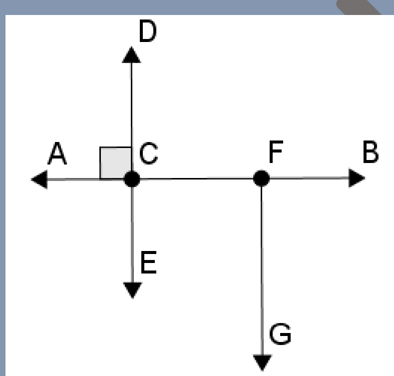
Tiempo para practicar 4.1

Habilidades:
Identificar en dibujos y objetos del entorno puntos, segmentos, rectas, semirrectas, rayos, planos, puntos colineales y no colineales, puntos coplanares y no coplanares.
Identificar y localizar el punto medio de un segmento.
Identificar y trazar rectas paralelas, perpendiculares, concurrentes en diferentes contextos.
Utilizar la notación simbólica de cada concepto estableciendo relación con su representación gráfica.
Enunciar relaciones entre los conceptos geométricos mediante notación simbólica.



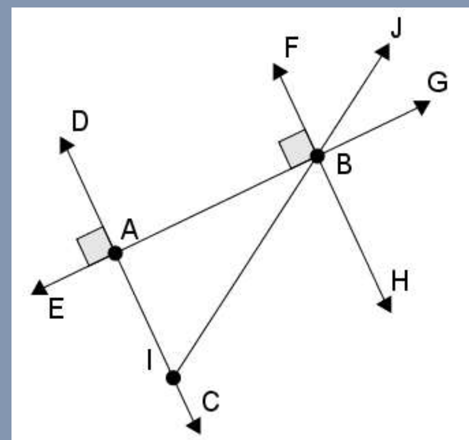
Parte A

I. Considere la figura



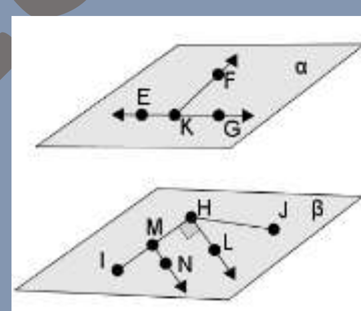
Determine
(a) Dos rectas paralelas
(b) Dos rectas perpendiculares
(c) Un rayo
(d) Dos segmentos
(e) Tres puntos colineales
(f) Tres puntos no colineales.

II. Considere la figura



Determine
(a) Una recta paralela a $\overleftrightarrow{AC}$
(b) Una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BH}$
(c) Un rayo con frontera A
(d) Dos segmentos que contienen a B
(e) Tres puntos colineales
(f) Tres puntos no colineales.

III. Considere la figura



Determine
(a) Dos rayos en el plano β
(b) Dos segmentos del plano α
(c) Un rayo con frontera M
(d) Tres puntos no coplanares
(e) Tres puntos coplanares
(f) Dos segmentos coplanares

Parte B

1. Complete los espacios en blanco con la palabra o símbolo que haga verdadera cada oración.

a) La recta que contiene los puntos A y B, se puede representar simbólicamente de la siguiente manera

____

b) Dos rectas no coplanares cuya intersección es vacía, reciben el siguiente nombre ____________________

c) Dos rectas coplanares que se intersecan en un punto **sin formar** ángulos rectos reciben el siguiente nombre

____

d) El rayo que contiene al punto M y su punto frontera es H, se puede expresar simbólicamente de la siguiente manera

____

e) ¿Cuál es la intersección de dos planos distintos? ____________________

f) La notación simbólica para representar una semirrecta que pasa por el punto A y cuyo punto frontera es B corresponde a

____

g) ¿Cuál es la intersección de una recta con un plano que no la contiene?

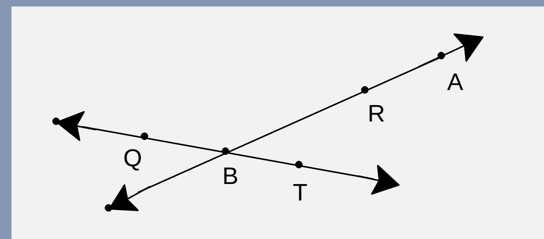
____

h) Dada una recta m y un punto A fuera de ella, ¿cuántas rectas distintas pueden pasar por A y ser paralelas a la recta m?

____

Haga el dibujo.

2. Considere la figura:



Determine:

a) Un segmento que pasa por el punto R pero no por A

b) $\overleftrightarrow{AR} \cap \overleftrightarrow{QT}$

c) Un rayo con frontera R.

d) Tres puntos colineales.

3. Si $l \parallel n$; $n \perp m$; $m \parallel p$ entonces es verdadero que

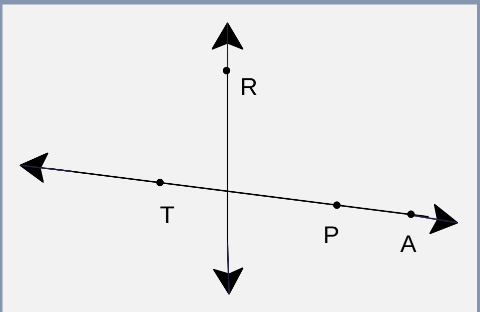
( ) $p \parallel n$

( ) $n \parallel m$

( ) $p \perp m$

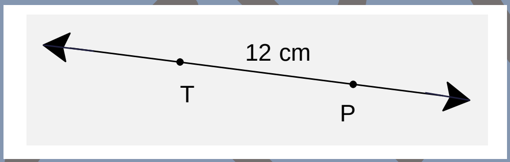
( ) $p \perp n$

4. Considere la figura adjunta y determine lo que se solicita.



a) Tres puntos no colineales.
b) Otra expresión que represente a la recta TP.
c) Un punto que no pertenece a $\overleftrightarrow{PT}$
d) Un rayo con su frontera en P.
e) Tres puntos colineales.
f) Un segmento que pertenezca a $\overleftrightarrow{PA}$, pero que no contenga al punto A.

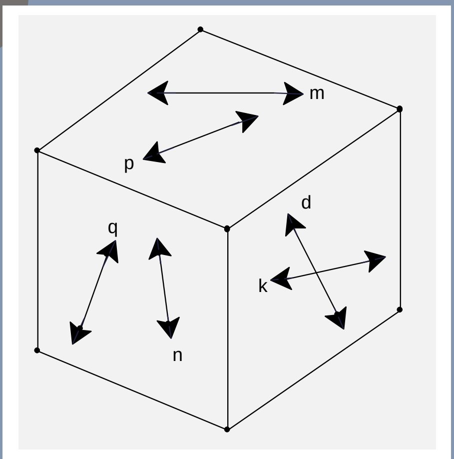
5. De acuerdo con la figura adjunta, ¿Cuál proposición es verdadera?



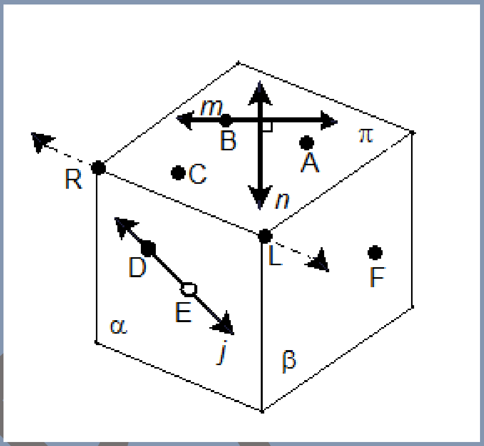
( ) TP = 12 cm
( ) $\overrightarrow{PT}$ es una semirrecta
( ) $\overline{TP}$ = 12 cm
( ) $\overleftrightarrow{TP}$ mide 12 cm

6. De acuerdo con la información proporcionada en la figura, determine lo que se solicita.

a) Dos rectas oblicuas.
b) La recta coplanar a *n.*
c) Una recta no coplanar a *d* y no coplanar a *m.*
d) Dos rectas alabeadas y que no sean coplanares con la recta *k.*



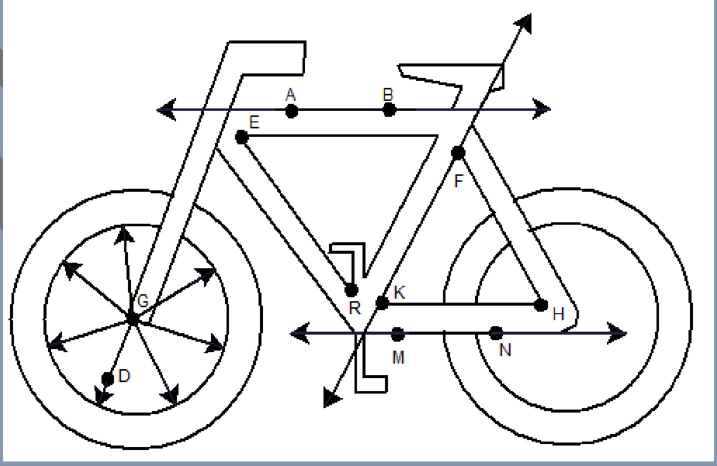
7. De acuerdo con la información proporcionada en la figura, determine lo que se solicita.



a) La intersección de los planos π y α.
b) Dos rectas perpendiculares.
c) Dos rectas alabeadas.
d) Tres puntos coplanares.
e) Tres puntos no coplanares.
f) Una semirrecta.
g) Un punto en el plano α.
h) Dos rectas no coplanares.
i) Un punto de π que no pertenezca a *m*.
j) El plano que contiene al punto F.
k) Dos rectas cuya intersección es vacía.

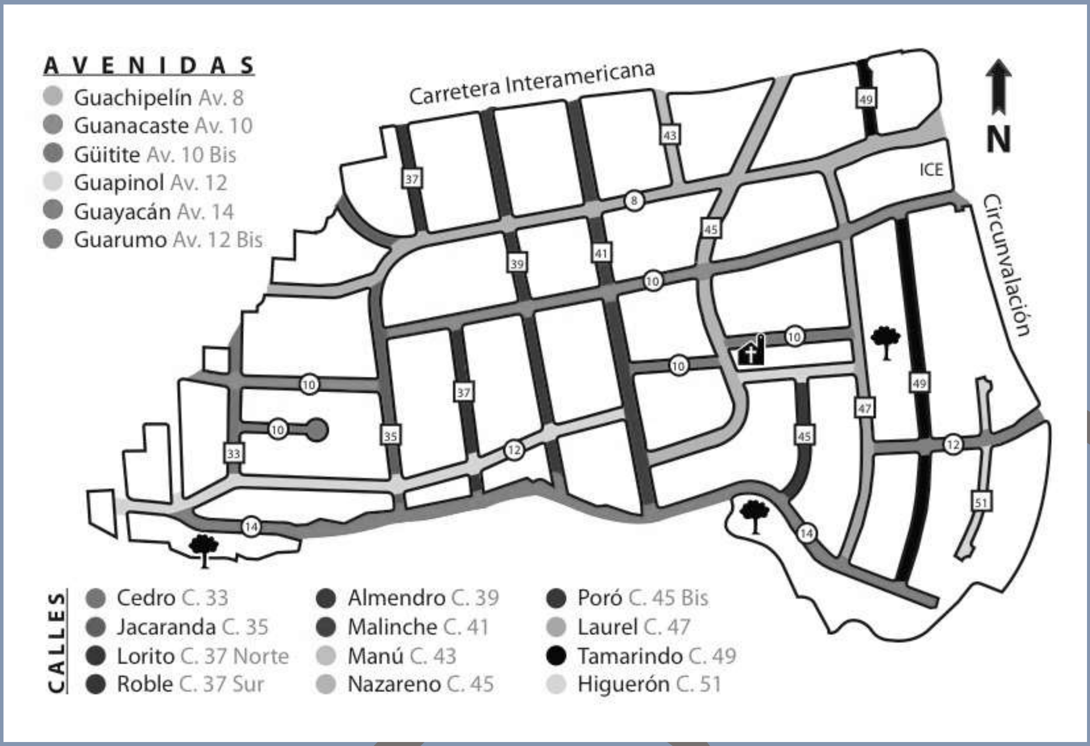
8. Ilustre cada una de las situaciones que se indican
a) Dos planos paralelos.
b) Una recta perpendicular a un plano.
c) Dos rectas paralelas, intersecadas con otra, de modo perpendicular.
d) Un plano y un punto que no pertenece a él.
e) Dos planos perpendiculares.
f) Una recta paralela a un plano.
g) Dos casos diferentes sobre la intersección de una recta y un plano.
h) $l \parallel n;\ l \perp m;\ q \parallel m.$
i) Punto medio de $\overline{AF}$ (use regla y compás).

9. Observe la siguiente bicicleta:



a) Identifique y exprese simbólicamente al menos 10 figuras geométricas presentes en la bicicleta.
b) Identifique y exprese simbólicamente dos rectas paralelas.
c) Identifique y exprese simbólicamente dos rectas oblicuas.

10. Considere la siguiente imagen, tomada de http://vecinoslosyoses.com



a) Determine una calle paralela a Almendro
b) ¿Cuál avenida es perpendicular a Lorito?
c) ¿Es posible llegar de la avenida Guayacán a la avenida Guapinol sin desviarse? Justifique
d) Si tuviera que medir la longitud de una calle, ¿cuál escogería? Justifique.

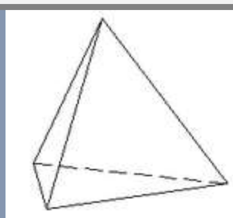
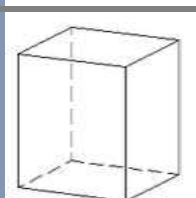
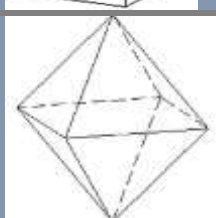
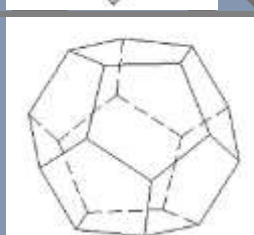
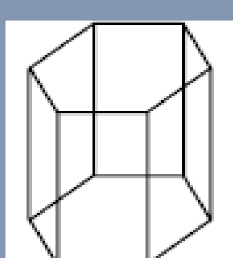
11. Exprese en lenguaje simbólico matemático cada oración.

a) Las rectas h y d se intersecan en el punto U.
b) La recta f y el plano π no se intersecan.
c) La recta que pasa por los puntos T y Q es perpendicular a la recta b.
d) La recta p y el plano α tienen solo el punto T en común

Habilidades:
Reconocer en figuras tridimensionales diversos elementos como caras, aristas, vértices.
Establecer relaciones entre los diversos elementos de figuras tridimensionales: vértices, caras y aristas, rectas y segmentos paralelos y perpendiculares, planos paralelos y perpendiculares.

12. Busque en su entorno figuras geométricas que correspondan a cuerpos sólidos. Menciónelas, dibújelas e identifique las caras, vértices y aristas.

13. Complete la tabla con la información que se le solicita.

Cuerpo Sólido	Número de caras	Nombre de los polígonos que forman las caras del cuerpo sólido	Número de vértices	Número de aristas
				
				
				
				
				

Conocimiento: Ángulos

Escenario de aprendizaje

¡Al subibaja!

Gaudencio y Gelasio están disfrutando del verano y van a un subibaja. Algo similar al que se presenta a continuación:

a) ¿Según la ilustración, cuál ángulo tiene mayor medida?

b) Cuando el ángulo b (perteneciente al lado de Gelasio) es obtuso, ¿cómo será el ángulo “a”?

c) ¿Bajo qué condiciones los ángulos “a” y “b” medirán igual? ¿cuál será la medida de cada uno?

d) ¿Cuánto medirá la suma de la medida de los ángulos “a” y “b”?

e) Si Gaudencio está más cerca del suelo, ¿cuál ángulo será mayor?

f) Si el ángulo “a” mide 72°, ¿cuánto mide el ángulo “b”?

Cuanto más alto esté ubicada la persona, mayor será el ángulo que se forme. Por tanto, cuando el ángulo “a” mida menos de 90° (es decir, es **agudo**), el ángulo “b” medirá más de 90° (**obtuso**)

Solamente cuando Gaudencio y Gelasio están totalmente equilibrados, los ángulos “a” y “b” medirán igual, es decir serán **congruentes.**

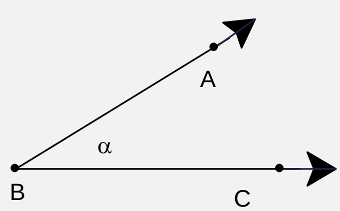
En este caso, la medida de cada ángulo será de 90°, por tanto, se clasificarán como ángulos **rectos.**

Según este análisis, podemos deducir, que la suma de la medida de los ángulos "a" y "b" será de 180°, es decir, lo que mide un ángulo **llano.** Por consiguiente, si la medida del ángulo "a" es de 72°, entonces el ángulo "b" medirá 108°.

Seguidamente se formalizarán algunos conceptos:

Un ángulo es una figura geométrica formada por dos rayos que se intersecan en un punto llamado vértice. El símbolo de ángulo es ∡

Ejemplo:



Este ángulo se puede denotar simbólicamente de diversas formas:

∡α, ∡*B*, ∡ABC, ∡CBA

Nótese que en las dos últimas representaciones simbólicas, el vértice se escribe en el centro. Es la notación más usada. Para representar su medida se usa *m∡B o m∡CBA*

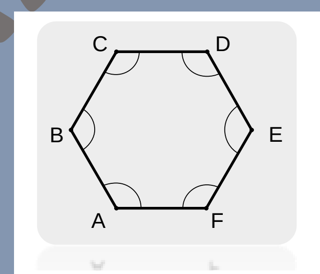
Clasificación

Ángulos Congruentes

Dos o más ángulos son congruentes, si tienen la misma medida. Se simboliza:

∡*H* ≅ ∡*T*

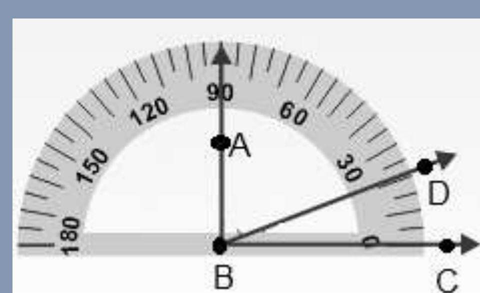
El balón de fútbol tradicional, está compuesto por pentágonos y hexágonos regulares.
Por tanto, los ángulos que forman cada hexágono, son congruentes entre sí.



∡*A* ≅ ∡*B* ≅ ∡*C* ≅ ∡*D* ≅ ∡*E* ≅ ∡*F*

Ángulos Complementarios

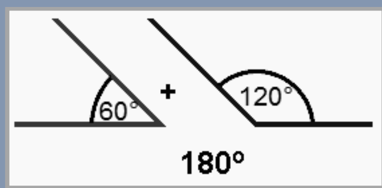
Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es igual a 90°



∡*ABD* es complementario con ∡*DBC*

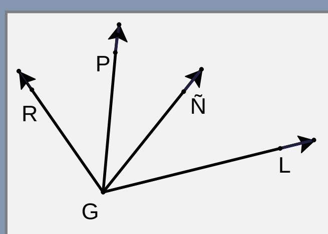
Ángulos Suplementarios

Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es igual a 180°
En el ejemplo del subibaja, los ángulos “a” y “b” son suplementarios.



Ángulos Consecutivos

Los ángulos consecutivos son aquellos que poseen un mismo vértice y tienen un lado común.



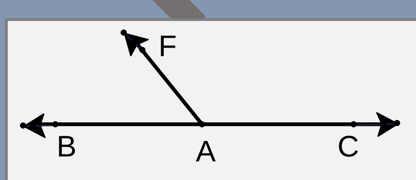
$\measuredangle RGP$ es consecutivo con $\measuredangle PG\tilde{N}$

$\measuredangle RPG$ *no* es consecutivo con $\measuredangle \tilde{N}GL$

Ángulos Adyacentes

Son aquellos ángulos que poseen un mismo vértice, tienen un lado común y además, sus otros dos lados son semirrectas opuestas. También se les conoce como **par lineal**.

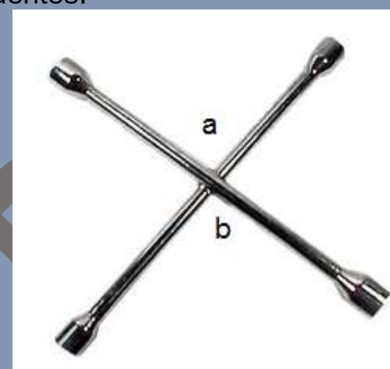
La suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es 180°, por tanto, son suplementarios.



$\measuredangle BAF$ es adyacente con $\measuredangle FAC$

Ángulos Opuestos por el Vértice

Son dos ángulos no consecutivos, formados al intersecar dos rectas.
Cumplen la condición de que son congruentes.



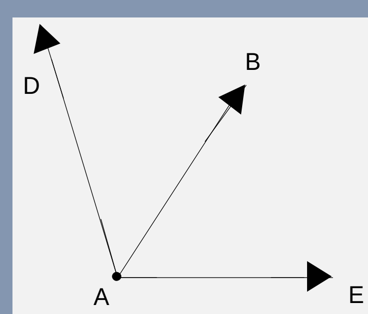
$\measuredangle a$ es opuesto por el vértice con $\measuredangle b$

$$m\measuredangle a = m\measuredangle b$$

Bisectriz de un ángulo.

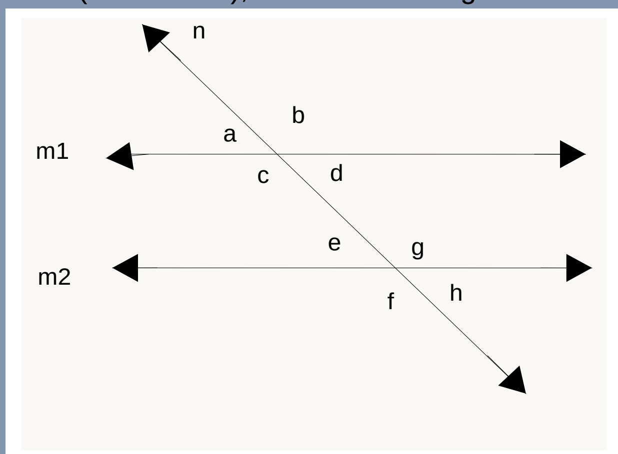
La bisectriz de un ángulo es aquel rayo que lo biseca, es decir, que divide el ángulo en dos de igual medida

En la figura adjunta $\overrightarrow{AB}$ es bisectriz del $\measuredangle$DAE por lo cual $\measuredangle$DAB $\cong$ $\measuredangle$BAE



Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal

Dos rectas paralelas intersecadas por otra recta (transversal), forman ocho ángulos.



De acuerdo con la figura anterior, donde m1 || m2 y n una recta trasversal, se cumple que

- $m\measuredangle a = m\measuredangle d = m\measuredangle e = m\measuredangle h$
- $m\measuredangle b = m\measuredangle c = m\measuredangle g = m\measuredangle f$
- $m\measuredangle a + m\measuredangle b = 180°$
- $m\measuredangle a + m\measuredangle c = 180°$
- $m\measuredangle a + m\measuredangle f = 180°$
- $m\measuredangle d + m\measuredangle g = 180°$

Según la posición que ocupen las parejas de ángulos de la figura anterior, reciben un nombre específico.

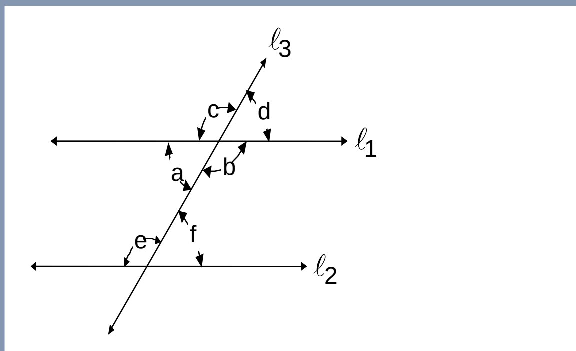
A continuación, se presenta la definición de cada uno de ellos, seguido de los ejemplos, según la figura.

- **Ángulos externos** Son los cuatro ángulos que quedan "fuera" de las dos rectas paralelas. Ejemplos: $\measuredangle$a, $\measuredangle$b, $\measuredangle$f y $\measuredangle$h
- **Ángulos Internos.** Son los cuatro ángulos que quedan "dentro" de las rectas. Ejemplos: $\measuredangle c$, $\measuredangle d$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle g$
- **Ángulos alternos internos.** Son parejas de ángulos internos que están en lados opuestos de la transversal. Son congruentes. Ejemplos: $\measuredangle c$ con $\measuredangle$ g y $\measuredangle$ d con $\measuredangle$ e
- **Ángulos alternos externos.** Son pares de ángulos externos que están en lados opuestos de la transversal. Son congruentes. Ejemplos: $\measuredangle$ a con $\measuredangle$ h y $\measuredangle$ b con $\measuredangle$ f
- **Ángulos conjugados internos.** Son pares de ángulos internos que están al mismo lado de la transversal. Son suplementarios. Ejemplos: $\measuredangle c$ con $\measuredangle$ e y $\measuredangle$d con $\measuredangle$ g
- **Ángulos conjugados externos.** Son pares de ángulos externos que están al mismo lado de la transversal. Son suplementarios. Ejemplos: $\measuredangle$ a con $\measuredangle$ f y $\measuredangle$b con $\measuredangle$h
- **Ángulos correspondientes.** Son los pares de ángulos formados por uno interno y otro externo, del mismo lado de la transversal, pero no consecutivos. Son congruentes.
  Ejemplos: $\measuredangle$a con $\measuredangle$e, $\measuredangle$b con $\measuredangle$ g,

  $\measuredangle c$ con $\measuredangle$f, $\measuredangle d$ con $\measuredangle$h

Ejemplo

En la figura, $\ell_1 \parallel \ell_2$.



Si $m\measuredangle c = 140°$, determine la $m\measuredangle f$

Los ángulos “c” y “b” son opuestos por el vértice, por tanto $m\measuredangle b = 140°$. A su vez los ángulos “b” y “f” son conjugados internos, por lo cual son suplementarios. De este modo $m\measuredangle f = 180° - 140° = 40°$

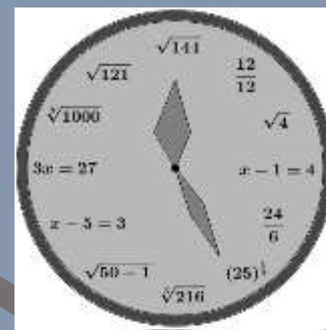
Si el ángulo “e” mide el triple del ángulo “d” ¿Cuánto mide el ángulo “b”?

Los ángulos “e” y “d” son suplementarios. Por tanto $3m\measuredangle d + m\measuredangle d = 180°$ Esto se cumple cuando $m\measuredangle d = 45°$. Se concluye que la $m\measuredangle b = 180° - 45° = 135°$

Reto de lógica:

¿Cuál será la medida de un ángulo de 10° si se observa a través de una lupa de 5 aumentos?

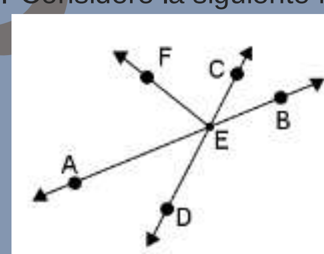
Tiempo para practicar 4.2



Habilidades:
Reconocer en diferentes contextos ángulos llanos, adyacentes, los que forman par lineal y los opuestos por el vértice.
Identificar ángulos congruentes, complementarios, suplementarios en diferentes contextos.
Determinar medidas de ángulos sabiendo que son congruentes, complementarios o suplementarios con otros ángulos dados.
Aplicar la relación entre las medidas de ángulos determinados por tres rectas coplanares dadas.
Obtener y aplicar medidas de ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal a ellas,

Parte A

I. Considere la siguiente figura



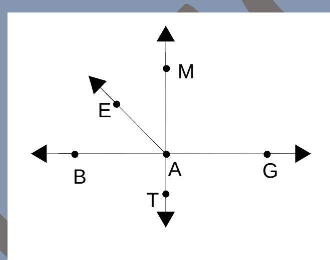
Determine
(a) Un par de ángulos consecutivos
(b) Un par de ángulos opuestos por el vértice
(c) Un par lineal
(d) Un ángulo llano
(e) Un ángulo obtuso
(f) Un ángulo agudo
(g) Un par de ángulos suplementarios

II. Dado el valor de ángulo, determine la medida de su ángulo complementario y suplementario

Ángulo	Complemento	Suplemento
27°		
80°		
45°		
35°		
10°		

Parte B

1. De acuerdo con los datos proporcionados en la figura adjunta, donde $\overleftrightarrow{MA} \perp \overleftrightarrow{BG}$, determine lo que se solicita.



(a) Un ángulo obtuso

(b) Un ángulo complementario al $\measuredangle MAE$

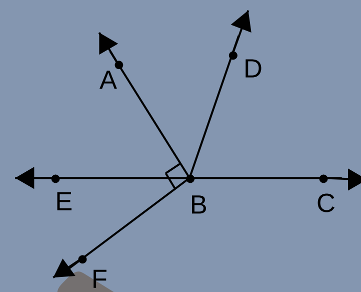
(c) Un ángulo congruente con $\measuredangle MAB$

(d) Un ángulo adyacente al $\measuredangle BAE$

(e) Un ángulo opuesto por el vértice con $\measuredangle BAT$

(f) Si $m\measuredangle EAB = 42°$, entonces ¿cuál es la $m\measuredangle EAM$ y $m\measuredangle EAG$?

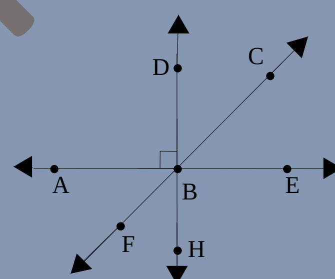
2. Considere la figura:



De acuerdo con los datos proporcionados, E – B - C, determine lo que se solicita

(a) Un ángulo llano
(b) Un ángulo adyacente al $\measuredangle ABC$
(c) Un ángulo complementario al $\measuredangle EBF$
(d) Un ángulo suplementario al $\measuredangle DBC$

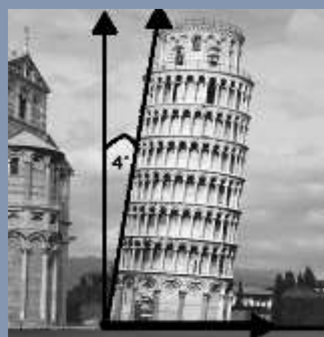
3. Considere la figura



De acuerdo con los datos de la figura, donde F, B y C son puntos colineales. Determine:

(a) Un ángulo congruente al $\measuredangle ABF$
(b) Un ángulo suplementario con el $\measuredangle FBE$
(c) Un ángulo llano que contenga al punto C
(d) Un par lineal con el $\measuredangle HBF$
(e) Dos ángulos opuestos por el vértice
(f) La medida del $\measuredangle FBE$ sabiendo que la medida del $\measuredangle DBC = 30°$

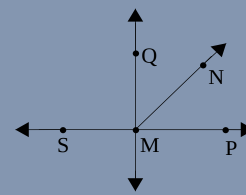
4. La Torre de Pisa, es el campanario de la Catedral de Pisa. Fue construida para que permaneciera en posición vertical, pero comenzó a inclinarse desde los inicios de su construcción, en 1173. Se calcula que tiene una inclinación de 4°. ¿Cuál es la medida del complemento de ese ángulo de inclinación?



5. Para la fiesta de la alegría, los sétimos años decidieron jugar a “Proteger la bandera”. Para ello, construyeron su propia bandera. El primer objetivo era colocarla perpendicular al suelo. El poste donde se sostenía la bandera era muy pesado, por tanto dos miembros del equipo lo dejaron a una inclinación de $\frac{2}{3}$ del objetivo. ¿Cuántos grados más se necesita para que quede perpendicular al suelo? ¿Qué nombre reciben esos dos ángulos?

6. Si un ángulo mide $\frac{3}{5}$ de un ángulo recto, entonces ¿Cuál es la medida de ese ángulo y la de su suplementario?

7. Sabiendo que $\measuredangle$ QMN y $\measuredangle$ NMP son complementarios y congruentes entre sí. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle$ SMN ?



8. Si $\measuredangle M$, $\measuredangle N$ y $\measuredangle P$ no son nulos, $\measuredangle M$, y $\measuredangle N$ son suplementarios, $\measuredangle M$ y $\measuredangle P$ son complementarios, entonces con certeza se cumple que

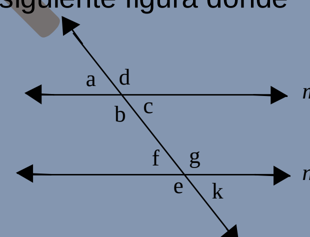
( ) $m\measuredangle M > 90°$

( ) $m\measuredangle P = 180° - m\measuredangle M$

( ) $m\measuredangle N > 90°$

( ) $m\measuredangle N = 90° - m\measuredangle M$

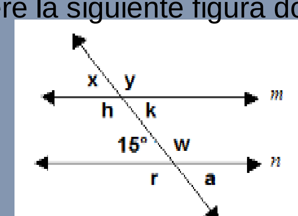
9. Considere la siguiente figura donde m || n



Determine:

(a) El ángulo alterno interno con el $\measuredangle$ g
(b) El ángulo conjugado externo con el $\measuredangle$ a
(c) El ángulo correspondiente con el $\measuredangle$ d
(d) Un ángulo opuesto por el vértice al $\measuredangle$ e
(e) Un ángulo adyacente con el $\measuredangle$ f
(f) Si e = 125°, entonces halle la medida de b , c y a

10. Considere la siguiente figura donde m || n



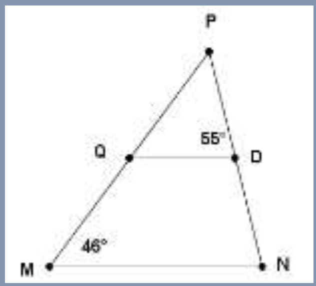
Determine el valor de: x, y, h, k, w, r, a

11. Considere la figura donde $\overleftrightarrow{QD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

Determine la medida de

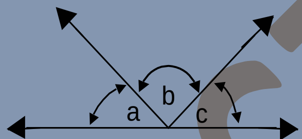
(a) ∡PQD

(b) ∡PNM



12. La medida de un ángulo es de 75°.
(a)Determine la medida de su suplemento.
(b) Determine la medida de su complemento.

13. En la figura adjunta, ∡a y ∡c son complementarios. Determine:



(a) $m\measuredangle b$

(b) $m\measuredangle b + m\measuredangle c$, si $m\measuredangle a = 39°$

14. Dos ángulos son opuestos por el vértice y complementarios a la vez. ¿Cuánto mide cada ángulo?

15. Si dos ángulos son suplementarios, ¿estos son adyacentes? Justifique

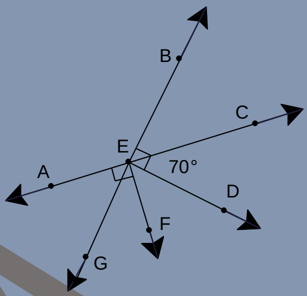
16. Si dos ángulos son complementarios, ¿estos miden 45° cada uno? Justifique

17. Si dos ángulos son opuestos por el vértice ¿estos pueden ser llanos?

18. ¿Cuál es el suplemento de un ángulo recto?

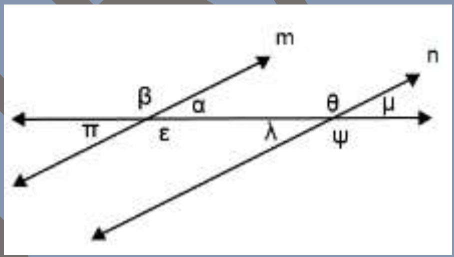
19. Analice la figura adjunta , donde A – E – C y B – E- G. Conteste lo que se le solicita

(a) $m\measuredangle BEC$
(b) $m\measuredangle DEF$
(c) $m\measuredangle AEG$
(d) $m\measuredangle GEF$
(e) $m\measuredangle AEB$
(f) $m\measuredangle BEF$



Parte C

I. Considere la siguiente figura donde m || *n*



Determine:

(a) Dos parejas de ángulos conjugados internos: ____ con ____ y _____ con ____

(b) Dos parejas de ángulos correspondientes ____ con ____ y _____ con ____

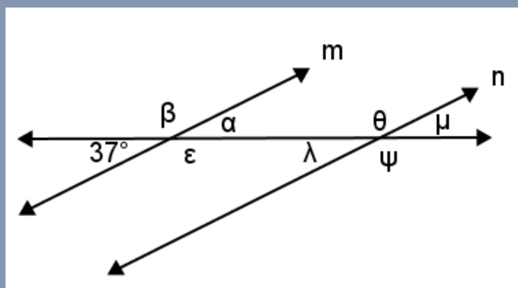
(c) Dos parejas de ángulos alternos internos ____ con ____ y _____ con ____

(d) Dos parejas de ángulos conjugados externos ____ con ____ y _____ con ____

(e) Dos parejas de ángulos opuestos por el vértice ____ con ____ y _____ con ____

(f) Dos parejas de ángulos adyacentes ____ con ____ y _____ con ____

II. Considere la siguiente figura donde m || *n*



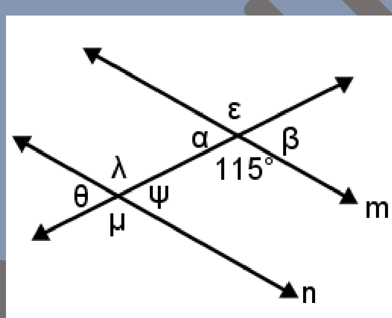
Determine el valor de

α ______ β _______ λ ______

μ ______ ε ________

θ ______ ψ _______

III. Considere la siguiente figura donde m || *n*



Determine el valor de

α ______ β _______ λ ______

μ ______ ε ________

θ ______ ψ _______

Conocimiento: Triángulos

Escenario de aprendizaje

¡A sembrar!

Avito desea sembrar en su casa unas palmeras, y hacer unas jardineras triangulares con madera. Para la primera jardinera cuenta con varias reglas de madera, de medidas: 0,5m; 2m; 1m; 1,5m y 2,5m.

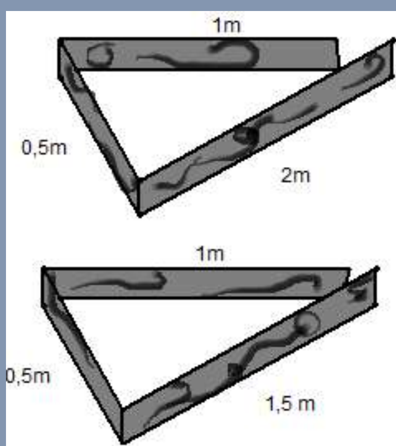
(a) Si Avito toma tres reglas cualesquiera, ¿podrá formar siempre un triángulo?

(b) ¿Cuántas jardineras triangulares diferentes podría formar?

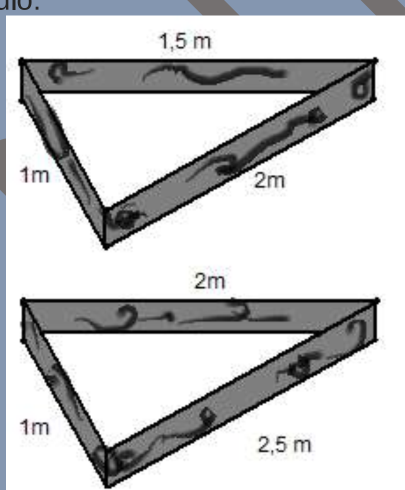
Para resolver este escenario, podemos construir tiras de papel que semejen las reglas, y usar decímetros en lugar de metros.

Para ello recorte tiras de papel de las medidas que indica el escenario (en dm): 0,5dm; 2dm; 1dm; 1,5dm y 2,5dm. Con tres de esas tiras, intente formar triángulos.

Es posible comprobar que no siempre se puede formar el triángulo que necesitaba Avito. Veamos algunos casos:



En otros casos, sí se puede formar el triángulo:



Se puede notar ,que en las ocasiones en las que Avito no pudo formar el triángulo, es porque la suma de las medidas de las reglas más pequeñas, no es mayor a la medida de la regla restante.

Así:

$$1 + 0{,}5 < 2$$

$$1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

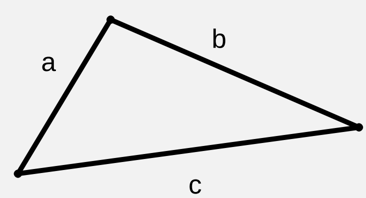
Por el contrario, cuando se formó el triángulo, fue porque la suma de las medidas de las reglas más pequeñas, era mayor a la medida de la regla restante.

$$1 + 1{,}5 > 2$$

$$1 + 2 > 2{,}5$$

A esta propiedad, se le conoce como **desigualdad triangular** y versa así:

En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante.

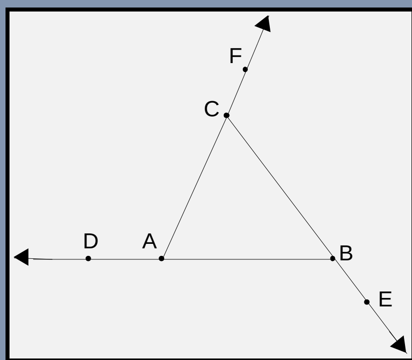


$a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$

Seguidamente, se formalizan algunos conceptos relacionados con los triángulos, y se brinda un repaso de tópicos de primaria.

Seguidamente, se formalizan algunos conceptos relacionados con los triángulos, y se brinda un repaso de tópicos de primaria.

Definición de triángulo.

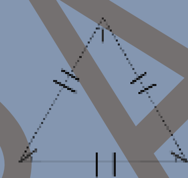


- Sean A, B, C tres puntos que no pertenecen a una misma recta (no colineales), entonces a la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, se le llama **triángulo**, y simbólicamente se indica como $\triangle ABC$
- Cada segmento $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, se denomina **lado** del triángulo.
- Los ángulos $\measuredangle ABC$, $\measuredangle CAB$, $\measuredangle ACB$, se llaman **ángulos internos** del triángulo.
- Los ángulos $\measuredangle DAC$, $\measuredangle FCB$, $\measuredangle EBA$ son **ángulos externos** del triángulo.
- Nótese que los $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle EBA$ son suplementarios.
- En todo triángulo, se cumple que el ángulo mayor se opone al lado de mayor longitud, de igual manera, el ángulo menor se opone al lado cuya medida es menor. Además, lados de igual medida se oponen a ángulos congruentes.

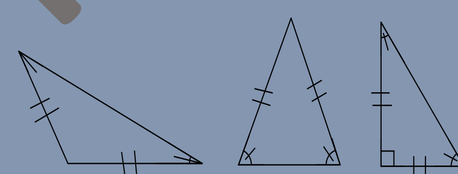
Clasificación de los triángulos.

Según los lados:

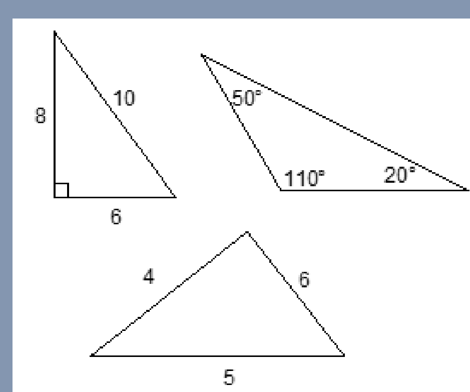
- **Equilátero:** Tiene los tres lados con igual longitud, y sus tres ángulos son congruentes. La medida de cada ángulo es de 60°



- **Isósceles:** Tiene dos lados con igual longitud, y dos ángulos congruentes.



- **Escaleno:** Ningún lado y ni ángulo son congruentes entre sí

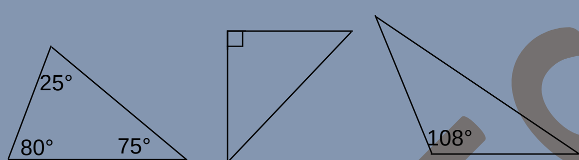


Según la medida de los ángulos:

- **Acutángulo:** Tiene los tres ángulos agudos. (Puede ser equilátero, isósceles o escaleno)

- **Rectángulo:** Tiene un ángulo recto. (Puede ser isósceles o escaleno)

- **Obtusángulo:** Tiene un ángulo obtuso. (Puede ser isósceles o escaleno)



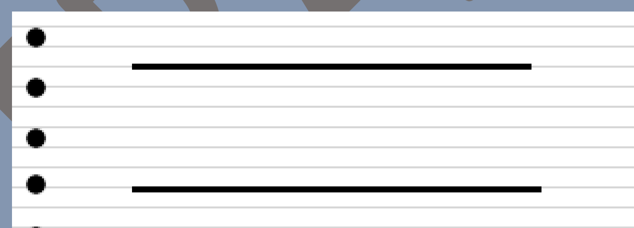
acutángulo rectángulo obtusángulo

Suma de ángulos internos de un triángulo.

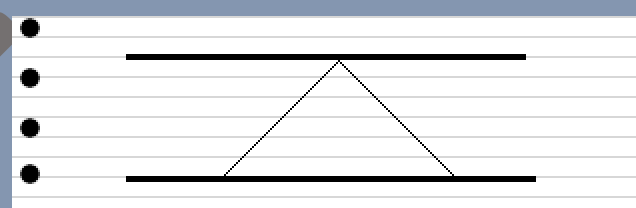
Vamos a estudiar una de las propiedades más útiles de los triángulos: la suma de las medidas de los ángulos internos.

Para ello, haremos la siguiente demostración:

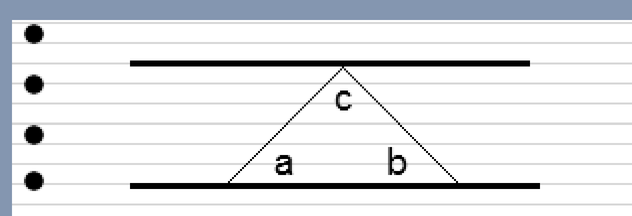
- Dibuje dos segmentos paralelos (puede usar los renglones como guía)



- Construya un triángulo cuya base esté contenida en uno de los segmentos paralelos, y el vértice opuesto en el otro segmento.

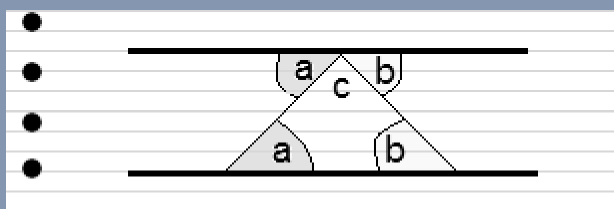


- Ahora dé un nombre a la medida de cada ángulo interno del triángulo.

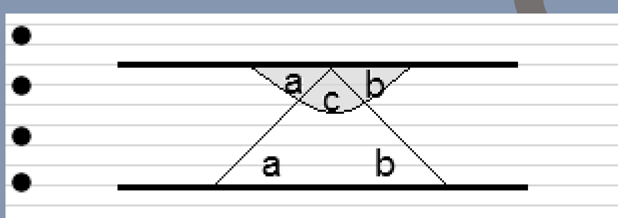


El objetivo es determinar el valor de
a + b + c

- Note que se forman ángulos determinados entre dos segmentos paralelos y dos transversales. Por tanto, considerando los ángulos alternos internos, se tiene que:



- Observe que los ángulos con medidas a, b y c forman un ángulo llano



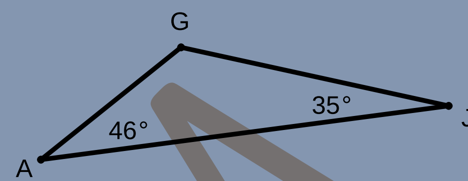
Por tanto, se concluye que

a + b + c = 180°, lo cual representa la suma de la medida de los ángulos internos del triángulo.

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°

Ejemplos

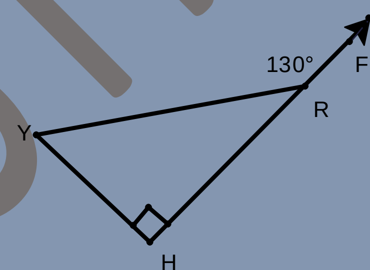
(a) Determine la medida del ángulo G



Como la suma de la medida de los ángulos internos es 180°, se resuelve:

$$m\measuredangle G = 180° - 46° - 35° = 99°$$

(b) Determine la medida del $\measuredangle HYR$

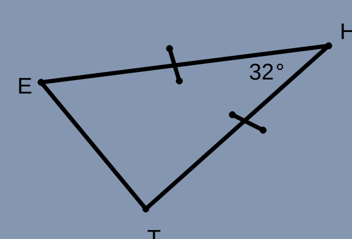


Se sabe que el $\measuredangle YRH$ es par lineal con el $\measuredangle YRF$, por tanto

$m\measuredangle YRH = 180° - 130° = 50°$ Por lo cual

$m\measuredangle HYR = 180° - 90° - 50° = 40°$

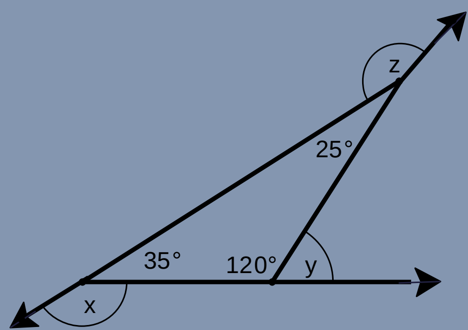
(c) Determine la $m\measuredangle HET$



La suma de las medidas de los ángulos E y T debe ser 180° - 32° = 148°. Ahora bien,

como HE = TH, entonces
$m\measuredangle HET = m\measuredangle HTE$. Por tanto,
$m\measuredangle HET = 148° \div 2 = 74°$

(d) Determine el valor de x + y + z



Cada ángulo externo es adyacente a su respectivo ángulo interno. Por tanto, se tiene que:

x = 180° - 35° = 145°
y = 180° - 120° = 60°
z= 180° - 25° = 155°

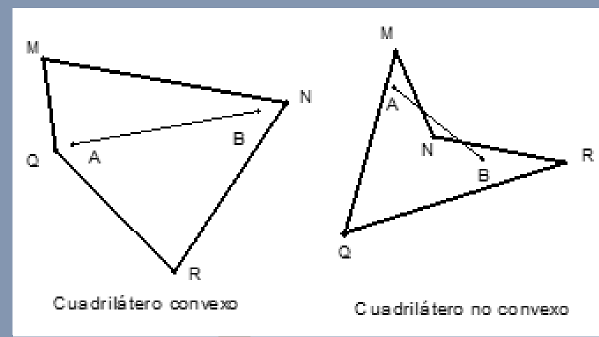
Se concluye que x + y+ z = 360°

La suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo es 360°

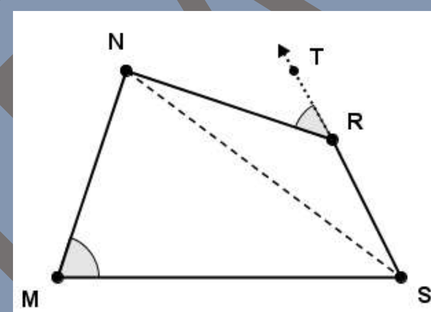
Cuadriláteros

Un *cuadrilátero* es un polígono de cuatro lados y cuatro vértices. En esta oportunidad solo trabajaremos con cuadriláteros **convexos**, es decir, aquellos en los cuales si se toman dos puntos interiores A y B cualesquiera, todos los puntos del segmento AB están dentro del cuadrilátero.

El cuadrilátero MNRQ, se simboliza □MNRQ



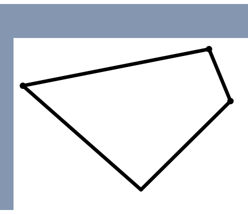
Partes de un cuadrilátero



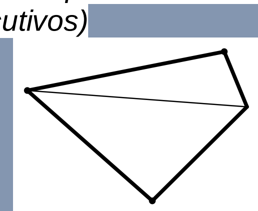
⌗ N, R, S y M son vértices del cuadrilátero
⌗ $\measuredangle NMS$ ángulo interno
⌗ $\measuredangle TRN$ ángulo externo
⌗ $\overline{NS}$ es una diagonal

Suma de ángulos internos de un cuadrilátero

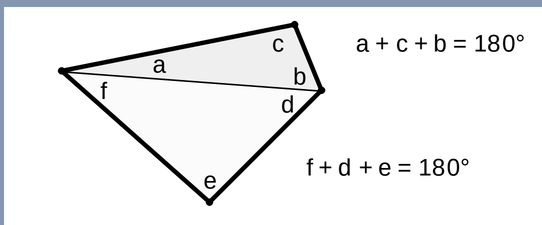
- *Construya un cuadrilátero convexo cualquiera.*



- *Trace una diagonal del cuadrilátero (segmento que une dos vértices no consecutivos)*



- *Nótese que se formaron dos triángulos. En cada uno de ellos, la suma de los ángulos internos es de 180°*



- *Observe que $a + b + c + d + e + f = 360°$.*
- *Se concluye que la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es de 360°*

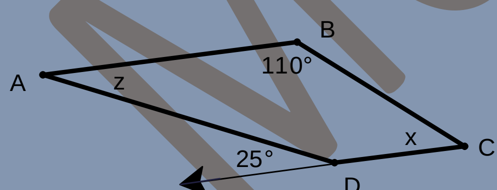
La suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo es 360°

De modo similar se puede deducir que:

La suma de las medidas de los ángulos externos de un cuadrilátero convexo es 360°

Ejemplo

De acuerdo con los datos de la figura, donde $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, determine los valores de x, z.



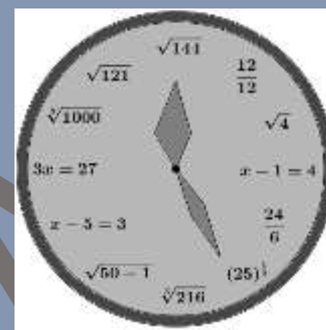
La $m\measuredangle ADC$ se calcula: 180° - 25° = 155°

Ahora bien, como $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, entonces por ángulos conjugados internos, $\measuredangle B$ es suplementario con el $\measuredangle C$. Se deduce entonces que x = 180° - 110° = 70°

Como la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°, entonces z = 360° - 155° - 70° - 110° = 25°

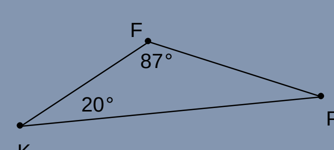
Tiempo para practicar 4.3

Habilidades:
Aplicar la desigualdad triangular.
Aplicar la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo.
Determinar medidas de ángulos internos un triángulo, conociendo medidas de los otros ángulos.
Determinar medidas externos de un triángulo, conociendo medidas de los otros ángulos.
Aplicar la propiedad de la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo.
Aplicar la propiedad de la suma de los ángulos externos de un cuadrilátero convexo.

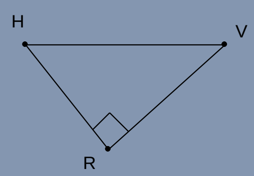


1. En cada caso, se presenta tres medidas. Indique si es posible construir un triángulo con ellas. Justifique.
   (a) 9m, 6m, 7m
   (b) 2cm, 4cm, 2cm
   (c) 10dm, 12dm, 11dm
   (d) 6m, 10m, 8m
   (e) 1,3cm , 2,1cm, 1,5cm

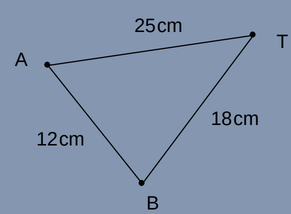
2. De acuerdo con la figura adjunta, ¿Cuál es el **lado menor** del triángulo?



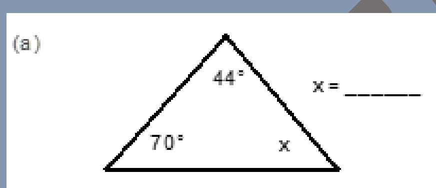
3. De acuerdo con la figura adjunta, ¿Cuál es el **lado mayor** del triángulo?

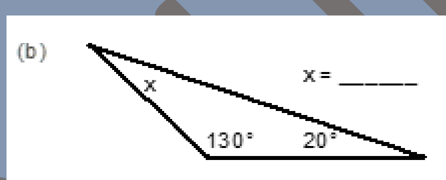


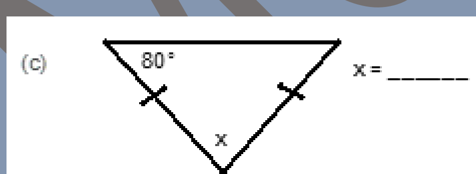
4. ¿Cuál es el **ángulo interno** de menor medida del triángulo adjunto?

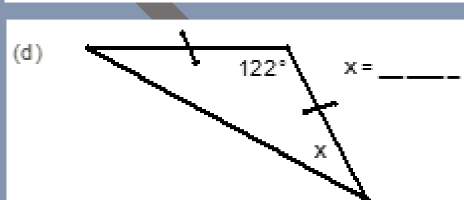


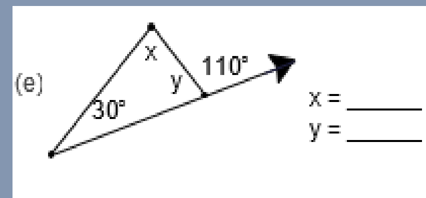
5. En cada caso determine la medida del o de los ángulos faltantes.

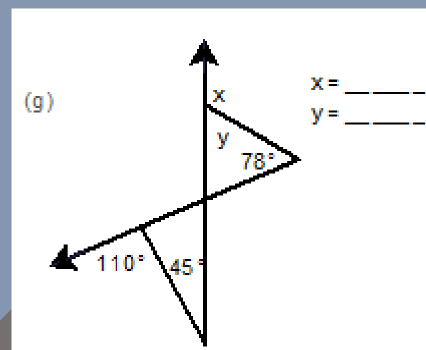


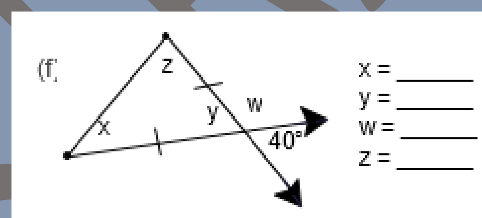


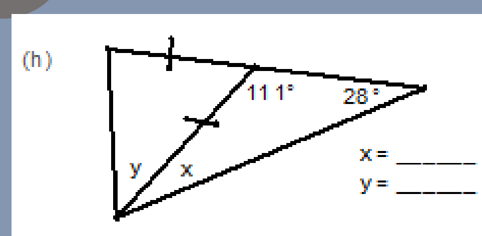


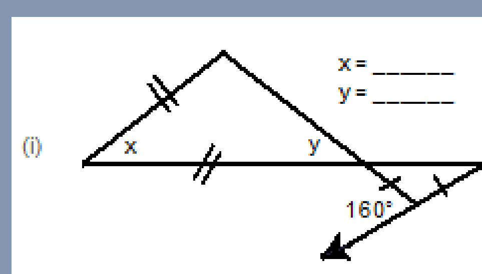






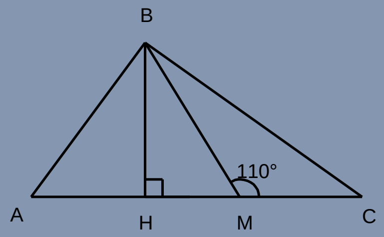




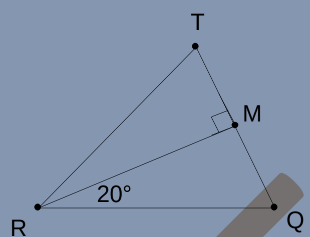


6. Dos ángulos externos de un triángulo miden 120° y 136°, ¿cuánto mide el ángulo interno correspondiente al ángulo externo faltante?

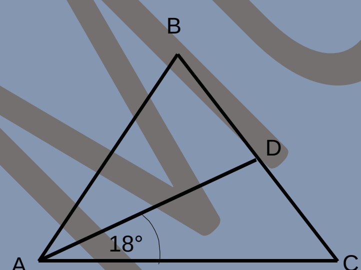
7. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, si AB = BM, entonces, ¿cuál es la $m\measuredangle ABM$?



8. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, si RT = TQ, entonces ¿cuál es la $m\measuredangle TRM$ y del $\measuredangle RTQ$?

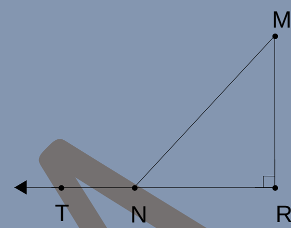


9. De acuerdo con los datos de la figura, donde AB = BC, $m\measuredangle BAD = 2 \bullet m\measuredangle DAC$. Determine la $m\measuredangle ABC$



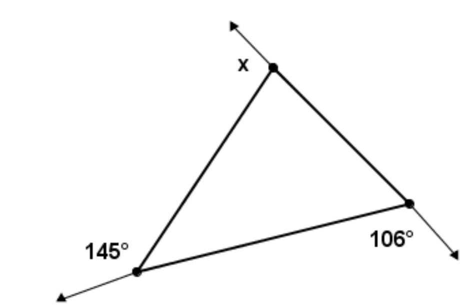
10. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, si Δ MNR es isósceles, entonces, ¿cuál es la medida del $\measuredangle$ TNM?

11.

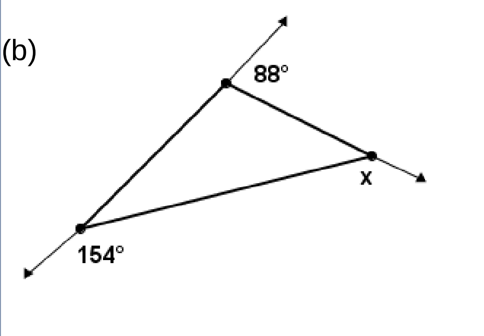


Determine la medida del ángulo externo nombrada con "x"

(a)

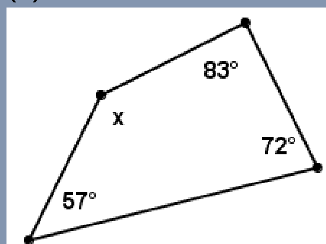


(b)

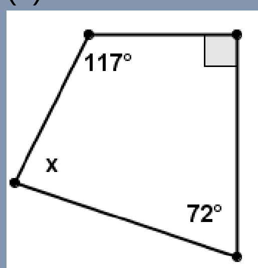


12. De acuerdo con los datos de las figuras, determine la medida o medidas de los ángulos solicitadas.

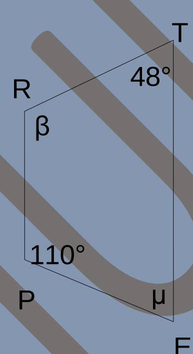
(a)



(b)

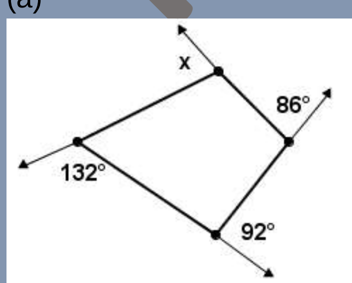


13. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, donde $\overleftrightarrow{RP} \parallel \overleftrightarrow{TE}$. Determine el valor de $\beta - \mu$.

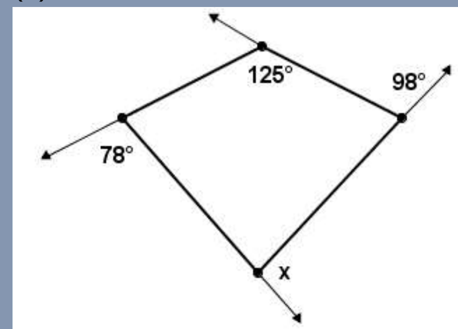


14. Determine el valor "x" correspondiente a la medida del ángulo externo del cuadrilátero.

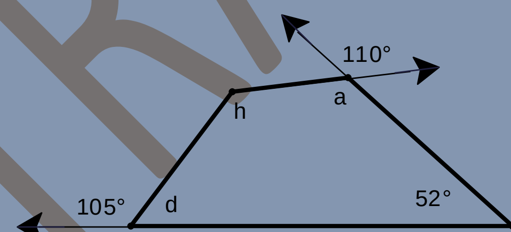
(a)

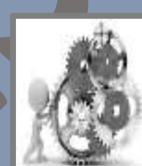


(b)



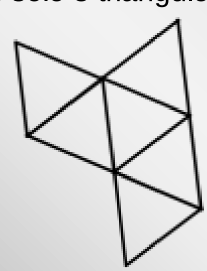
15. De acuerdo con los datos de la figura, determine los valores de a, h y d





Reto de lógica:

La siguiente figura está formada por 13 palillos. Retire 3 de esos palillos de forma que queden formados solo 3 triángulos.



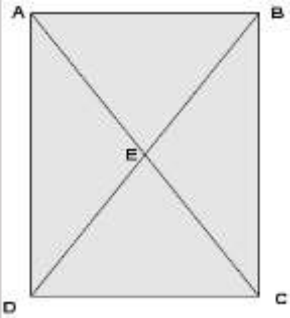
Conocimiento: Cuadriláteros

Necesita regla y transportador

Escenario de aprendizaje

Rectángulo

- Tome un hoja rectangular y coloque en sus vértices el nombre de cada punto A, B, C y D
- Trace sus dos diagonales y nombre al punto de intersección con la letra E



- Mida las diagonales $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$. Analice el resultado.
- Mida los ángulos $\measuredangle ABE$ y $\measuredangle EBC$ que resultan de cortar el ángulo recto $\measuredangle ABC$ mediante la diagonal $\overline{DB}$ ¿Son estos ángulos congruentes?
- ¿Cuál es un ángulo congruente con $\measuredangle BAE$?
- Mida los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EC}$. Analice el resultado.
- Los ángulos $\measuredangle DEA$ y $\measuredangle AEB$ ¿son comgruentes?

Cuadrado

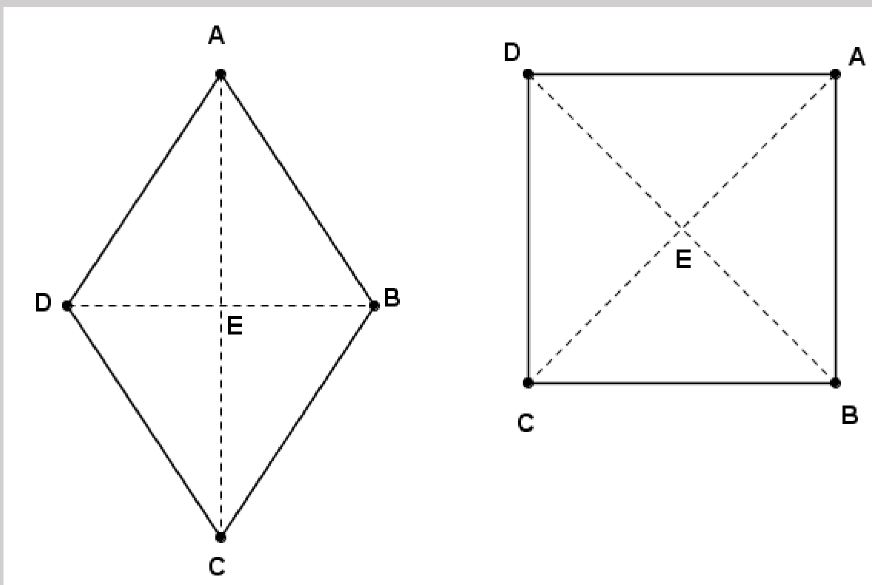
- Con una hoja retangular obtenga un cuadrado, haciéndo el siguiente doblez y cortando la parte señalada

- Con el cuadrado resultante, repita los pasos que se analizaron con el rectángulo.

Rombo

- Según a definición, un rombo es aquel cuadrilátero cuyos lados son congruentes entre sí. Entones, ¿el cuadrado es un rombo? Reflexione la respuesta.

- De acuerdo al análisis realizado con el cuadrado, qué diferencias se pueden extraer de las figuras siguientes. Puede usa regla.



Paralelogramo.

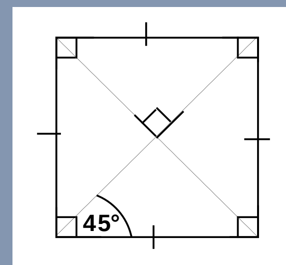
Un paralelogramo es aquel cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.
Las propiedades que caracterizan a de los paralelogramos son:

- Los pares de lados opuestos son iguales.
- Los pares de ángulos opuestos son iguales.
- Cada dos ángulos contiguos son suplementarios.
- Sus dos diagonales se cortan en sus puntos medios. (se bisecan)

Los cuadrados, rectángulos, rombos y romboides son paralelogramos, por lo cual cumplen las características citadas anteriormente.

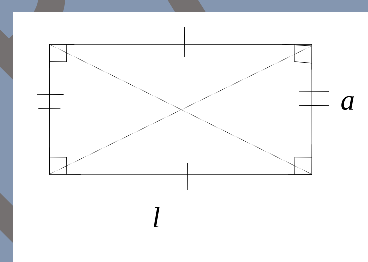
Se presentan, a continuación, aquellas características particulares de cada uno de esos paralelogramos.

Cuadrado



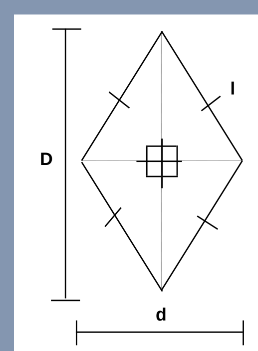
1. Sus cuatro lados son congruentes.
2. Sus cuatro ángulos son rectos.
3. Las diagonales se bisecan perpendicularmente
4. Cada diagonal biseca los ángulos internos
5. Área = ℓ^2 (donde *l* es el lado)
6. Perímetro = 4ℓ

Rectángulo



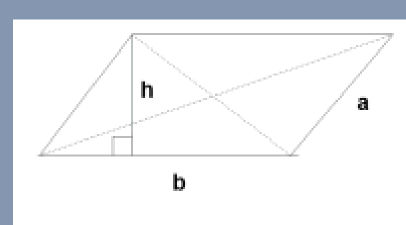
1. Sus cuatro ángulos son rectos.
2. Las diagonales, en general, no se intersecan de forma perpendicular, solo si es un cuadrado.
3. Área = $\ell \bullet a$
4. Perímetro = $2\ell + 2a$

Rombo



1. Sus cuatro lados tienen la misma medida.
2. Las diagonales se bisecan perpendicularmente
3. Las diagonales bisecan los ángulos internos
4. Área = $\frac{D \bullet d}{2}$
5. Perímetro = 4ℓ

Romboide



1. Las diagonales no se intersecan de forma perpendicular
2. Área = b •h
3. Perímetro = 2b + 2a

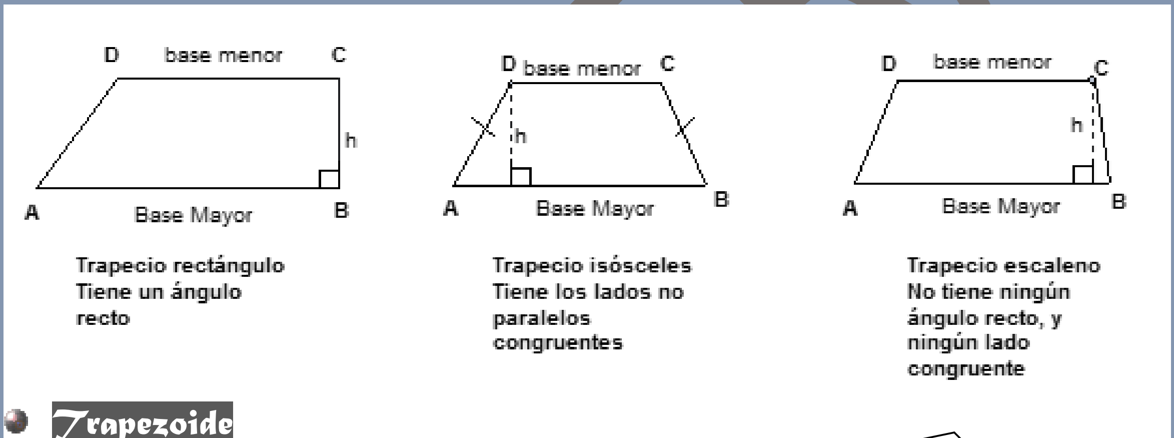
No paralelogramos

Para efectos de secundaria, tenemos dos cuadriláteros no paralelogramos

Trapecio

Algunas características:

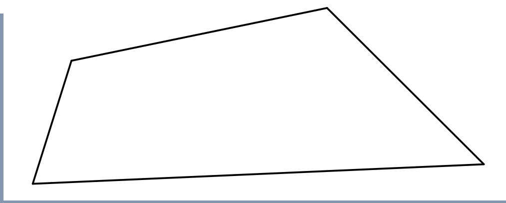
1. Tiene un par de lados paralelos, el otro par no es paralelo.
2. Área = $\dfrac{(B+b)\cdot h}{2}$
3. Perímetro = suma de la longitud de los lados
4.



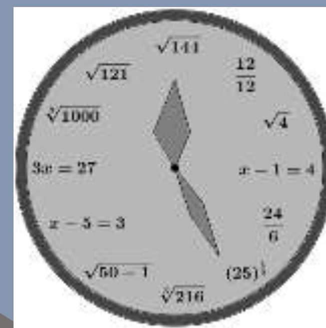
Trapezoide

Cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo

Perímetro = suma de la medida de los lados.

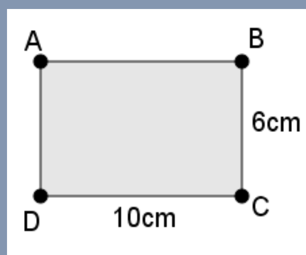


Tiempo para practicar 4.4 A



Habilidades:
Resolver problemas que involucren cuadriláteros y sus propiedades

1. Considere el rectángulo adjunto donde



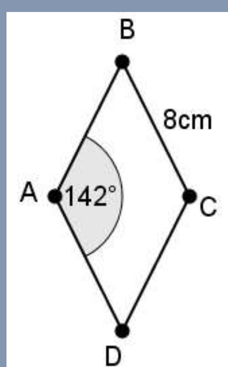
Determine

(a) La medida de $\overline{AD}$

(b) La medida del $\measuredangle ABC$

(c) Un segmento congruente a $\overline{AC}$

2. Considere el rombo adjunto



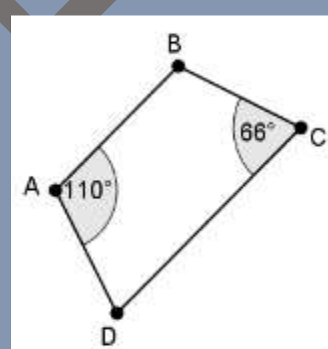
Determine

(a) La medida de $\overline{AB}$

(b) La medida del $\measuredangle ABC$

(c) La medida del $\measuredangle BCD$

3. Considere el trapecio adjunto

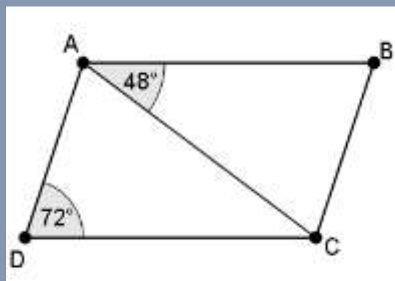


Determine

(a) La medida del $\measuredangle ABC$

(b) La medida del $\measuredangle ADC$

4. Considere el romboide adjunto



Determine

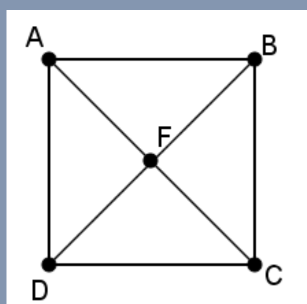
(a) La medida del $\measuredangle ABC$

(b) La medida del $\measuredangle BCA$

(c) La medida del $\measuredangle DAC$

(d) La medida del $\measuredangle ACD$

5. Considere el cuadrado adjunto donde DB = 10cm



Determine

(a) La medida del $\measuredangle ADF$

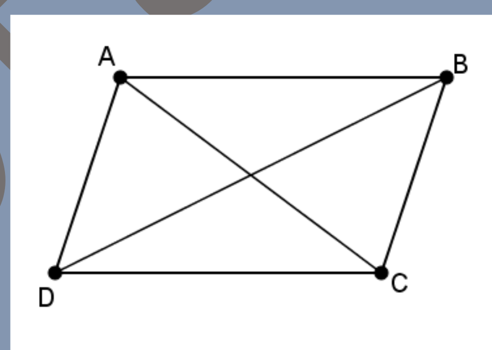
(b) La medida del $\measuredangle AFB$

(c) La medida de $\overline{FB}$

(d) La medida $\overline{AC}$

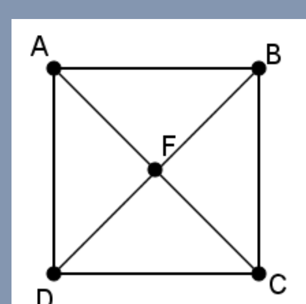
6. En la figura adjunta, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, entonces con certeza, ¿cuáles afirmaciones son verdaderas?

- [ ] $\overline{DA} \perp \overline{AB}$
- [ ] $\overline{AC} \perp \overline{DB}$
- [ ] $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
- [ ] $m\measuredangle DAB = m\measuredangle ABD$
- [ ] $m\measuredangle ABD = m\measuredangle BDC$
- [ ] $m\measuredangle ADC + m\measuredangle DCB = 180°$

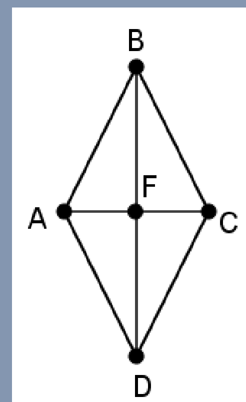


7. Para un cuadrado ABCD, con certeza, ¿cuáles afirmaciones son verdaderas?

- [ ] $\overline{AC} \perp \overline{DB}$
- [ ] $m\measuredangle BCA = 45°$
- [ ] $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$
- [ ] $\overline{AB} \perp \overline{BD}$
- [ ] $m\measuredangle ADC + m\measuredangle DCA = 135°$

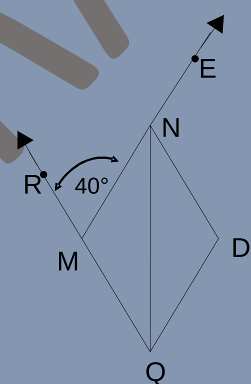


8. Para un rombo ABCD, con certeza, ¿cuáles afirmaciones son verdaderas?

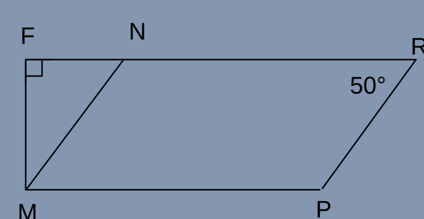


- ☐ $\overline{AC} \perp \overline{DB}$
- ☐ $m\measuredangle BCA = m\measuredangle CAD$
- ☐ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
- ☐ $\overline{AF} \cong \overline{BF}$
- ☐ $m\measuredangle ADC + m\measuredangle DCB = 180°$
- ☐ FB = FD

9. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, si MNDQ es un rombo, ¿cuál es la medida del $\measuredangle$ ENQ?



10. De acuerdo con los datos de la figura, si □ MNRP es un paralelogramo, determine la medida del $\measuredangle$ NMF.



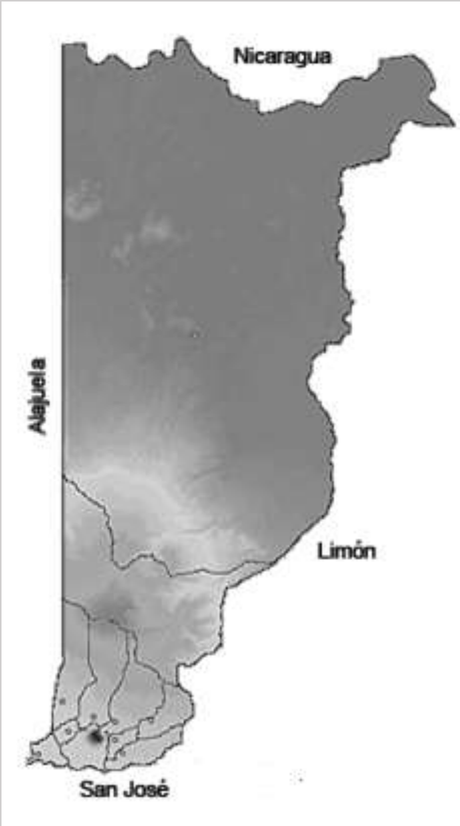
11. Sea □ MNRP un rombo. Si la m$\measuredangle$PMN = 96°, determine la m$\measuredangle$RNM.

Conocimiento: Áreas

Escenario de aprendizaje

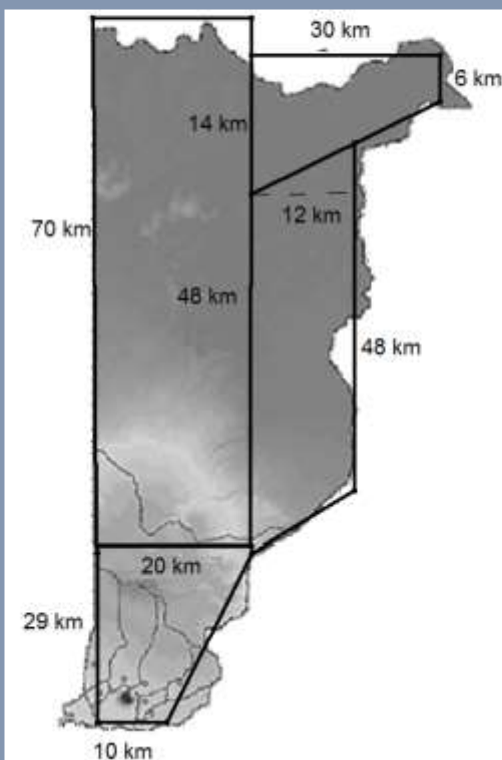
El área de la provincia de Heredia

Adelaida va a hacer una investigación sobre el recurso hídrico que posee la provincia de Heredia. Para ello desea determinar el área aproximada de "la provincia de las flores". Sin embargo, solo cuenta con un mapa que le prestó su profesora.



¿Cómo podrá determinar el área de esta provincia?

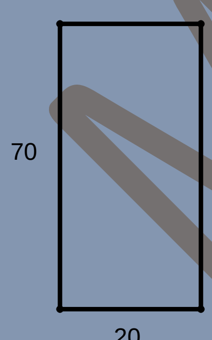
Para hallar el área de una figura que tiene forma irregular, es conviente descomponerla en figuras geométricas más conocidas, y cuyos cálculos sean más sencillos.Hay diversas maneras de resolver el caso de Adelaida, y como la intención es solo obtener un aproximado , se podría abordar así:



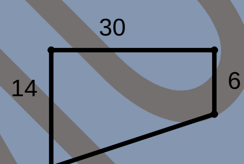
A pesar de que en ciertas zonas se toma más área de la real, hay otras donde se toma menos, lo cual compensa en cierta forma los cálculos.

Además, existen los llamados errores de medición, por lo cual, el área que obtendremos será solo una aproximación de la real.

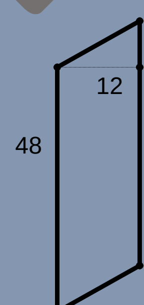
La figura muestra, que Adelaida descompuso el mapa de la provincia de Heredia en un rectángulo, dos trapecios y un romboide.
Seguidamente, se calcula el área de cada una.



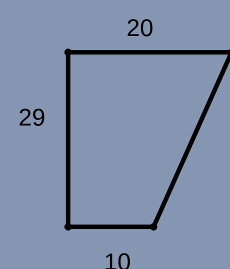
$$A = 70 \cdot 20$$
$$A = 1400 km^2$$



$$A = \frac{(14+6) \cdot 30}{2}$$
$$A = 300\,km^2$$



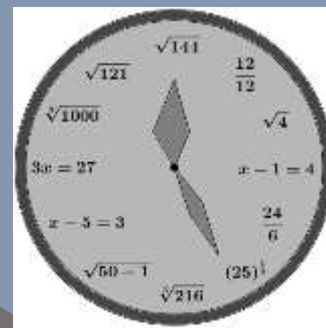
$$A = 48 \cdot 12$$
$$A = 576\,km^2$$



$$A = \frac{(10+20) \cdot 29}{2}$$
$$A = 435\,km^2$$

Por tanto, el área de la provincia de Heredia, según los cálculos de Adelaida, es de 140 km^2 + 300 km^2 + 576 km^2 + 435 km^2 = 2711km^2. La aproximación de Adelaida fue muy buena, pues el área real del territorio de la provincia de Heredia es de 2 657,9 km^2

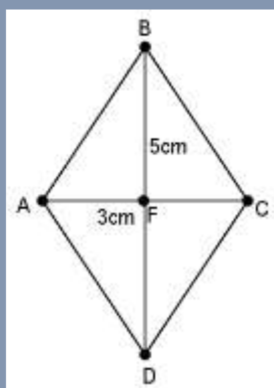
Tiempo para practicar 4.4 B



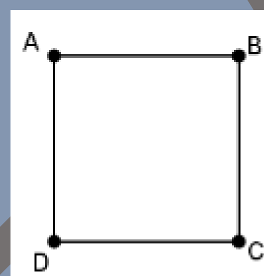
Habilidades:
Resolver problemas que involucren ángulos, triángulos, cuadriláteros, sus propiedades y cálculo de áreas.

1. En cada caso, determine el área del cuadrilátero dado.

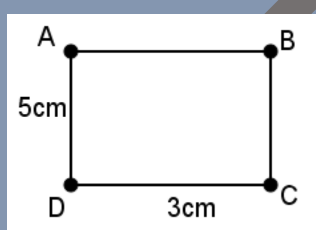
(a) ABCD es un rombo



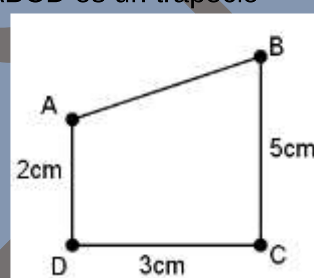
(b) ABCD es un cuadrado de perímetro 20 cm



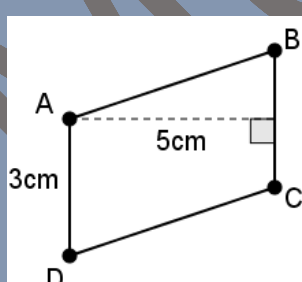
(c) ABCD es un rectángulo



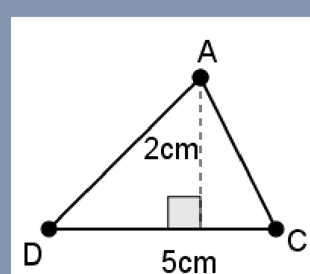
(d) ABCD es un trapecio



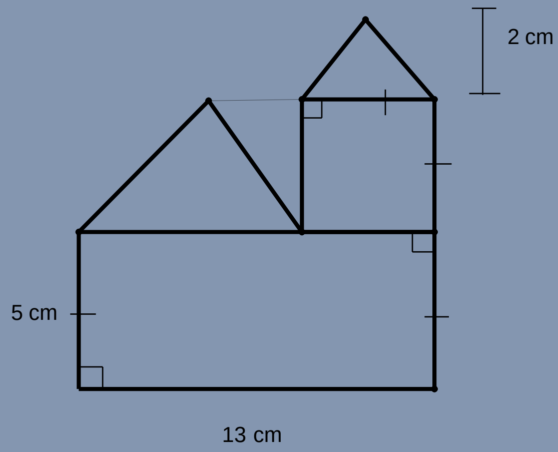
(e) ABCD es un romboide



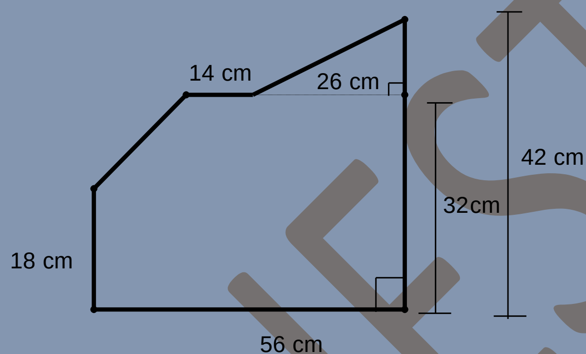
(f) ACD es un triángulo



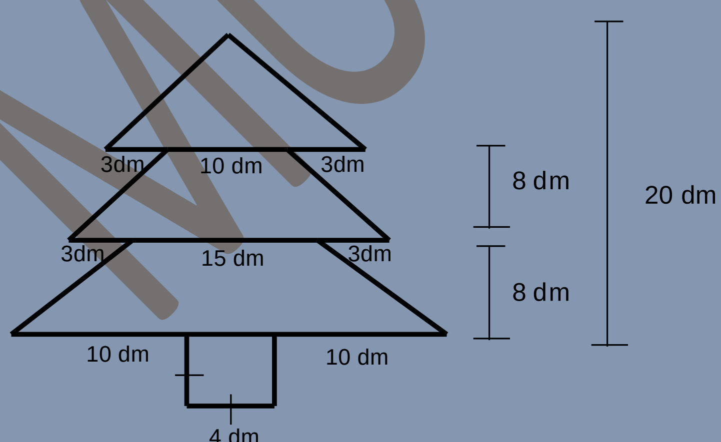
2. Determine el área de la fachada de la siguiente casa.



3. Calcule el área total de la figura dada.

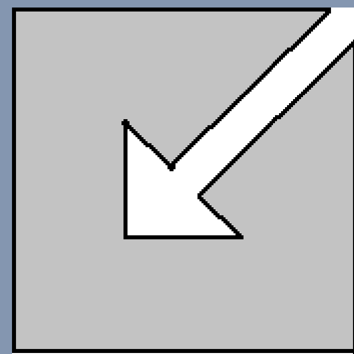


4. Para una fiesta navideña, Teobaldo desea construir con cartón varios arbolitos. Para ello, necesita saber cuánto material ocupa. El molde que ha construido es:

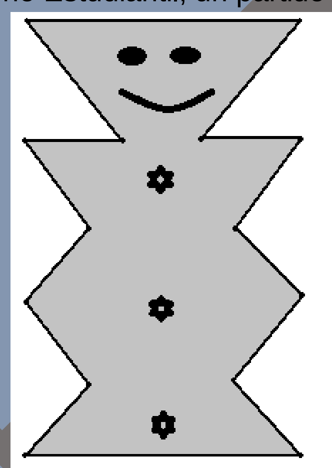


Si desea construir 6 arbolitos, ¿cuántos decímetros cuadrados de cartón necesita?

5. Con ayuda de la regla, determine el área sombreada, en cm^2, de la siguiente figura.



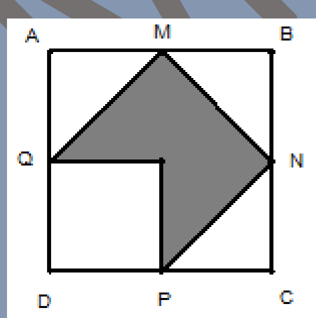
6. Para las elecciones del Gobierno Estudiantil, un partido decide hacer el siguiente logo.



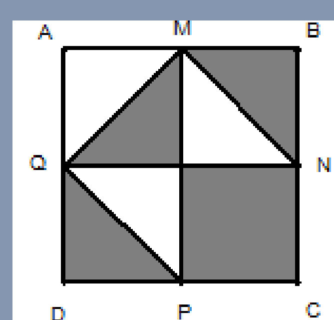
Con ayuda de la regla, determine el área del logo.

7. En los siguientes casos, el área del cuadrado ABCD es de $16cm^2$ y M, N, P Q, son los puntos medios de los lados respectivos. Determine el área sombreada.

(a)

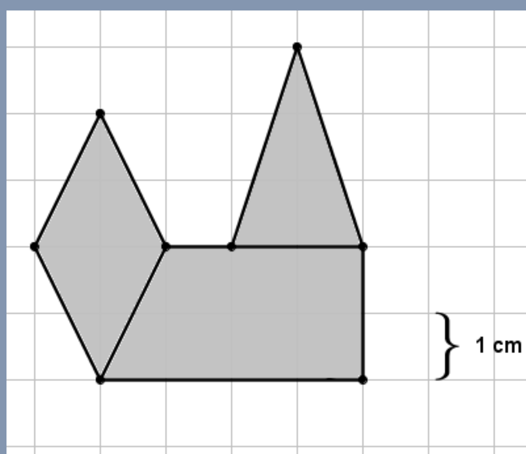


(b)

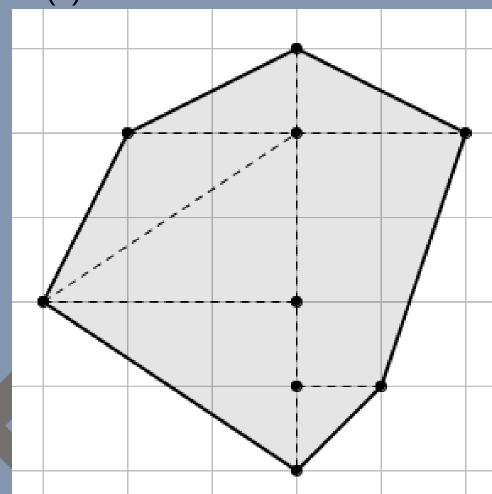


8. Determine el área de cada figura. Considere que el lado de cada cuadrícula tiene 1cm de longitud.

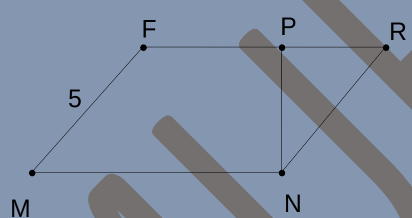
(a)



(b)



9. De acuerdo con los datos de la figura, si en el paralelogramo MNRF, el área es 42, PN = 6, y $\overline{PN} \perp \overline{FR}$, entonces ¿cuál es el perímetro del paralelogramo?



10. Si el área de un cuadrado es 121, entonces ¿cuál es el perímetro de ese cuadrado?

11. Un papalote tiene forma de rombo, una de las diagonales es el triple de la otra. La diagonal menor mide 5cm. ¿Cuál es el área del papalote?

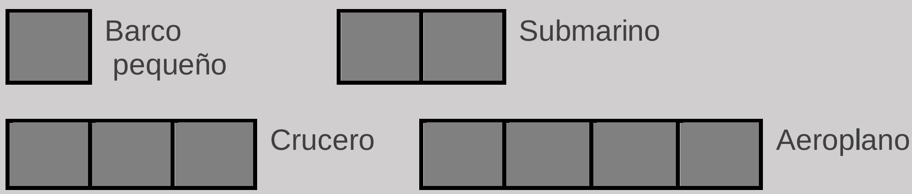
Conocimiento: Geometría Analítica

Escenario de aprendizaje

Batalla Naval

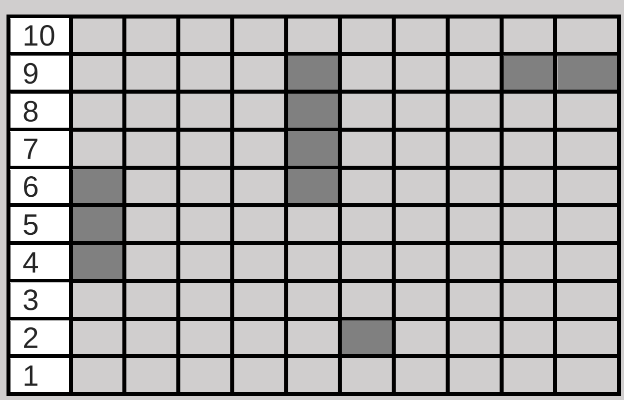
Amando y Gabino han construido un juego de mesa con una hoja de papel, llamado Batalla Naval.

Consiste en dos recuadros de 10 por 10, numerado en filas y columnas. En ellos ponen una “flota” de cuatro embarcaciones: el barco pequeño es de solo un espacio, el submarino de dos, el crucero de tres y el aeroplano de 4. Estos se pueden ubicar de modo horizontal o vertical.



Cada participante tiene un cuadro donde coloca su flota, pero no debe permitir que su contrincante lo vea. El objetivo es derribar la flota contraria, por ejemplo, Amando sin ver dónde ubicó su flota Gabino, debe dar posiciones numéricas con el fin de eliminar la flota “enemiga”. Gabino, a su vez, debe hacer lo mismo. El compañero de juego debe indicar si ha sido bombardeado en el intento, y cuando la embarcación ha sido totalmente destruida también debe notificarlo.

Seguidamente se presenta, a modo de ejemplo, solo la flota de Amando, la cual debe ser destruida por Gabino.



(a) Si Gabino indica la posición $\boxed{2}\ \boxed{6}$, ¿logrará alcanzar alguna embarcación?

(b) ¿Son equivalentes las posiciones $\boxed{1}\ \boxed{4}$ y $\boxed{4}\ \boxed{1}$?

(c) Para derribar el barco más pequeño ¿qué posición debe dar Gabino?

(d) Suponga que a Horonato sólo le falta derribar el aeroplano y lo ha impactado en la posición $\boxed{5}\ \boxed{8}$. Como Gabino no conoce dónde está exactamente la embarcación, ¿cuáles serían las posibilidades más efectivas que debería dar él para derribar esa embarcación?

En este juego, Gabino y Amando han utilizado un conocimiento matemático sumamente importante: la ubicación de puntos en un plano cartesiano.

En los mapas, así como en los sistemas de GPS (Global Position System) son imprescindibles estos sistemas de coordenadas, para dar ubicaciones precisas.

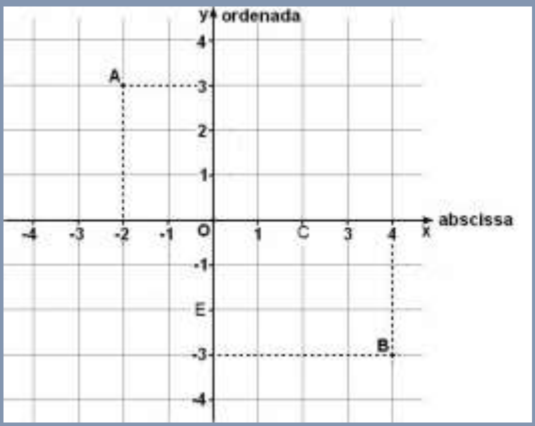
Por ejemplo, en el juego se evidencia que las posiciones $\boxed{4}\ \boxed{1}$ y $\boxed{5}\ \boxed{8}$ no son iguales; por tanto, es necesario realizar una diferenciación entre esas ubicaciones. Para tal fin, se adopta un sistema llamado **plano cartesiano**, que está conformado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical, que se cortan en un punto.

La recta horizontal se llama **eje de las abscisas o eje "x"**, y la vertical, **eje de las ordenadas o eje "y"**. El punto donde se cortan recibe el nombre **de origen.**

El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados. Las coordenadas se forman asociando un valor del eje x a uno del eje y: $P\ (x,\ y)$

Por ejemplo, la posición $\boxed{2}\ \boxed{6}$ del juego, se expresa (2,6)

Ejemplo



A (-2, 3)

B(4, -3)

C (2, 0)

E(0, - 2)

origen (0, 0)

¿En qué coordenada está el tesoro?

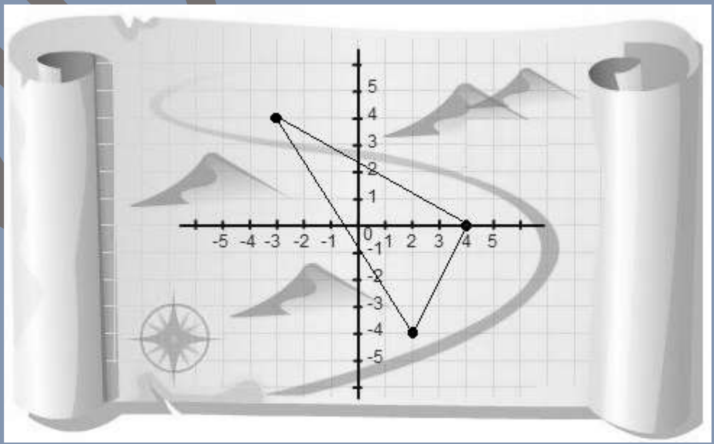
Nereo construye un mapa para que su amiga Otilia logre encontrar un tesoro. Como ya lleva varios intentos y no ha logrado encontrarlo, le da una pista:

El tesoro se encuentra limitado por el triángulo de vértices (-3, 4), (4, 0), (2, - 4).

(a) *¿Será prudente buscar el tesoro en el punto (3,3)?*

(b) *Si Otilia busca en el punto (-2, 3), ¿estará buscando dentro del área asignada por Nereo?*

Para resolver este ejercicio es importante ubicar los vértices y trazar los segmentos para formar el triángulo. Así:



Por tanto (3,3) no pertenece a la zona de búsqueda, mientras que (-2, 3) sí.

(c) *Otilia no ha podido encontrar el tesoro, Nereo lo escondió muy bien, y lo hizo precisamente en un punto del triángulo (no en su interior). Por lo que le da otra pista: El tesoro está en el punto medio del segmento determinado por (4, 0), (2, - 4).*

Las coordenadas del punto medio de un segmento, cuyos extremos son (x, y), (a, b), están dadas por: $\left(\dfrac{x+a}{2},\dfrac{y+b}{2}\right)$

Por tanto, en este caso, el punto medio de (4, 0), (2, - 4) corresponde a:

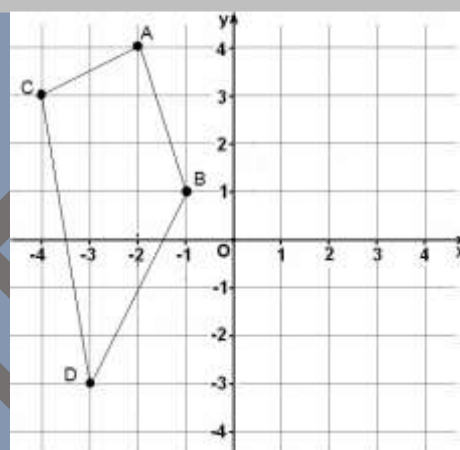
$$\left(\frac{4+2}{2},\frac{0+-4}{2}\right)=(3,\ -2)$$

¡Ahora sí encontró el tesoro! Ubíquelo en el mapa

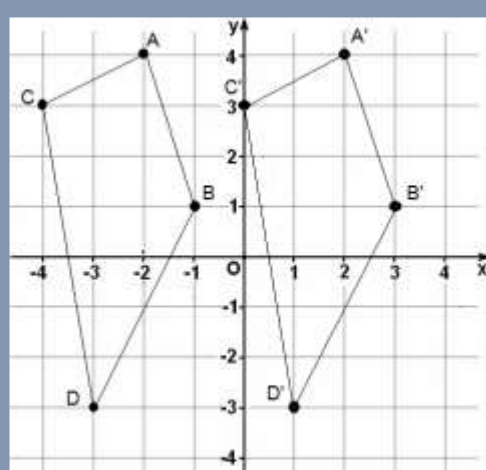
Traslaciones

Realicemos la siguiente construcción:

1) Ubique los puntos A(-2, 4); B(-1, 1); D(-3, -3) ; C(-4, 3) y trace el cuadrilátero que se forma.



2) Ahora, en el mismo plano, realice la misma indicación, pero con los puntos C' (0, -3); A' (2, 4); B' (3, 1); D' (1, -3)



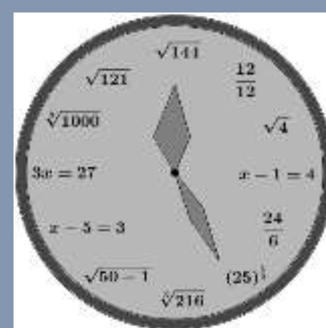
Observe como el cuadrilátero ABDC fue **trasladado** 4 unidades a la derecha, para formar el □ A’B’D’C’.
Como el traslado fue en unidades del eje “x”, las coordenadas de “y” quedaron iguales:

A(-2, 4) → A’ (-2 + 4, 4) = A’ (2, 4);	B(-1, 1) → B’ (-1 + 4, 1) = B’ (3, 1)
D(-3, -3) → D’ (-3 + 4, -3) = D’ (1, -3)	C(-4, 3) → C’ (-4 + 4, -3) = C’ (0, -3)

- La coordenada de la traslación de un punto (a,b) hacia la derecha “n” unidades, está dada por: (a+n, b)
- La coordenada de la traslación de un punto (a,b) hacia la izquierda “n” unidades, está dada por: (a – n, b)
- La coordenada de la traslación de un punto (a,b) hacia arriba “n” unidades, está dada por: (a , b + n)
- La coordenada de la traslación de un punto (a,b) hacia abajo “n” unidades, está dada por: (a , b – n)

Tiempo para practicar 4.5

Habilidades Representar puntos y figuras geométricas en un plano con un sistema de ejes cartesianos.
Determinar algebraicamente el punto medio de un segmento.
Ubicar puntos en el interior y en el exterior de figuras cerradas en un plano con un sistema de ejes cartesianos.
Reconocer figuras que se obtienen mediante traslación de otras.
Determinar las coordenadas de la traslación de puntos dados.



1. (a) Ubique en un plano cartesiano los siguientes puntos y luego trace segmentos para ir construyendo la figura en el orden que se brinda.

A(-5, 2) → B(-2, 3) → C(-3, 6) → D(0,4) → E(3, 6) → F(2, 3) → G(5,2) → H(2,1) → I (3,-2) → J(0,0) → K(-3,-2) → L(-2,1) → A(-5,2)

(b) Indique si los siguientes puntos quedan en el interior o exterior de la figura anterior.

i. (1,5)
ii. (-2, 0)
iii. (-4, 4)
iv. (-2, 6)
v. El punto medio de $\overline{HD}$

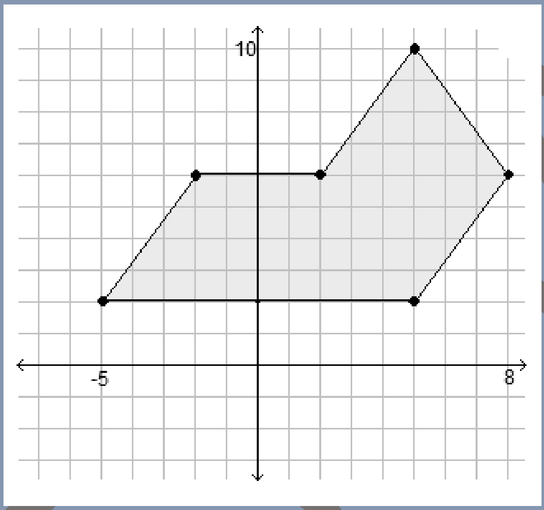
(c) Determine la coordenada del punto medio de $\overline{KA}$

(d) Determine la coordenada del punto medio de $\overline{EJ}$

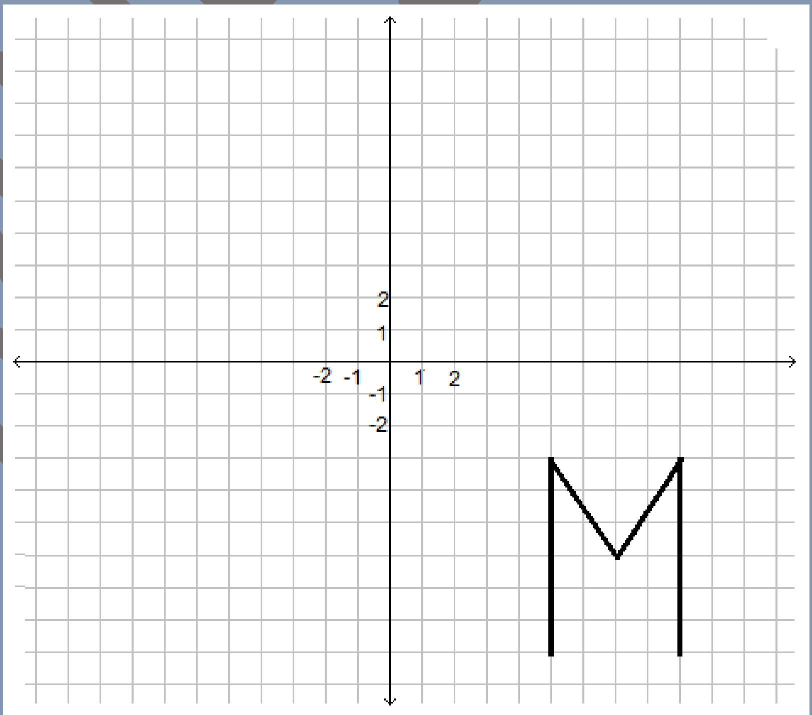
2. Determine el área y perímetro del rectángulo de vértices (-3, 2), (-3, 6), (4, 6), (4, 2)

3. Determine las coordenadas de D para que el cuadrilátero de vértices:
   A(-1, -2), B(4, -1), C(5, 2), D sea un paralelogramo.

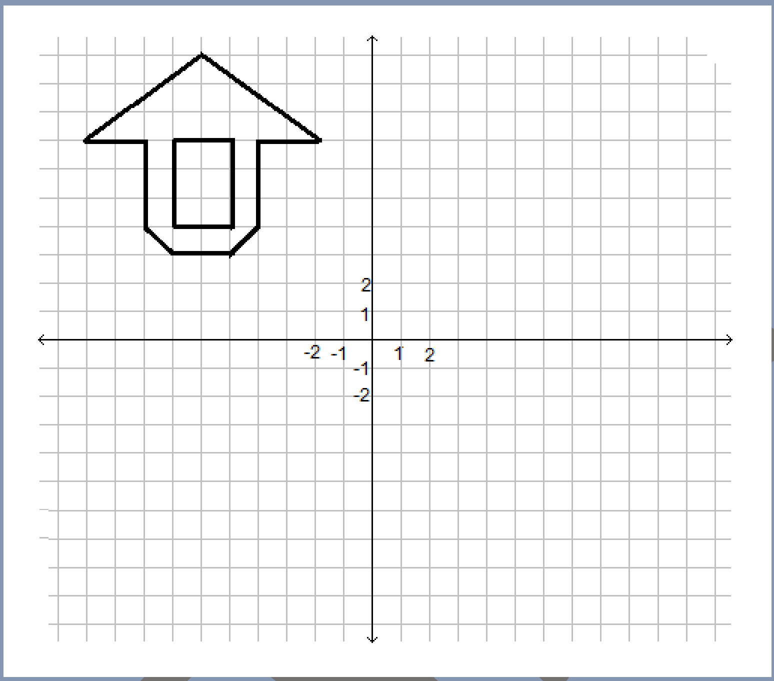
4. Determine el área de la figura destacada en gris.



5. En el mismo plano, traslade la letra M siete unidades a la izquierda. Haga también una traslación de esa M original cinco unidades hacia arriba.

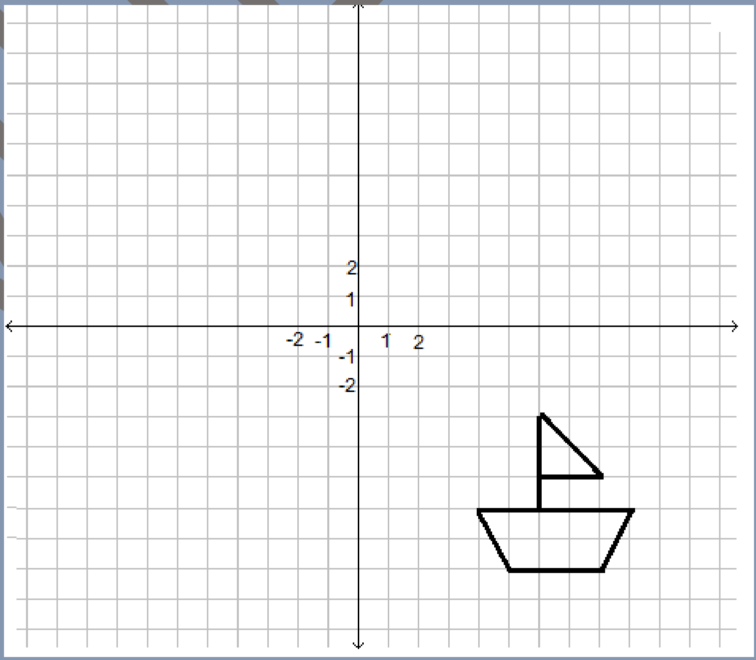


6. En el mismo plano, traslade la figura cinco unidades a la derecha. Haga también una traslación de esa figura original seis unidades hacia abajo



Determine además el área de esa figura

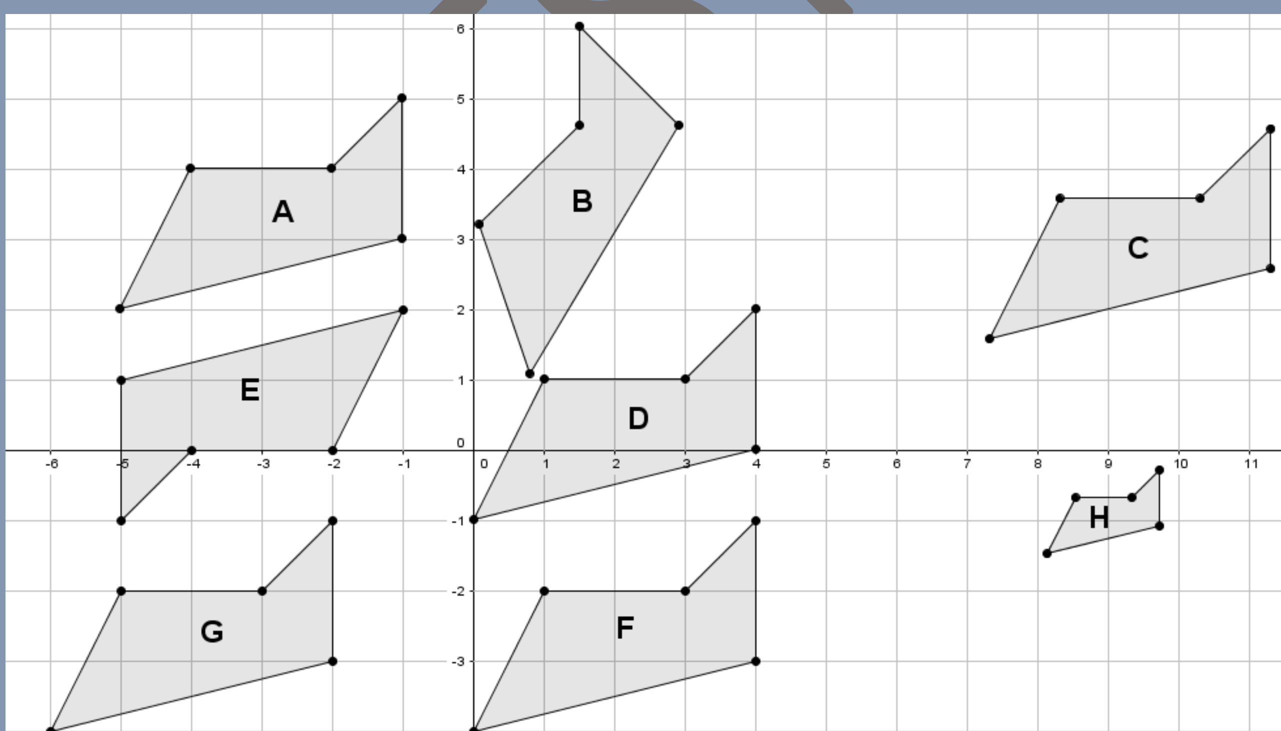
7. En el mismo plano, traslade el barco nueve unidades a la izquierda. Haga también una traslación de esa figura original seis unidades hacia arriba.
Además, determine el área de un barco.



8. Determine la coordenada del punto B que resulta de la traslación del punto A, según las condiciones dadas.

Punto A	Datos para la traslación	Coordenada del punto B
$(-2,5)$	5 unidades a la derecha	
$(-8,-4)$	8 unidades hacia arriba	
$(7,0)$	11 unidades a la izquierda	
$(12,-9)$	1 unidad hacia abajo	
$(3,-1)$	6 unidades a la izquierda y luego 3 unidades hacia arriba	
$(4,8)$	9 unidades hacia abajo y luego 7 unidades a la izquierda.	

9. Considere las siguientes figuras del plano cartesiano.



De acuerdo con la información anterior, conteste:

(a) ¿Cuál figura es el resultado de una traslación hacia abajo y luego a la izquierda de D?

(b) ¿Es H una traslación hacia abajo de C? Justifique

(c) ¿Es A una traslación de E hacia arriba? Justifique

(d) ¿Qué tipo de traslación se aplica a la figura G para obtener la figura A?

(e) ¿Qué tipo de traslación se aplica a la figura F para obtener la figura D?

(f) ¿Es B una traslación a la derecha de A? Justifique

Respuestas Números

1.1 Potencias

1)	2)	3)	4) 7^5
(a) 512	(a) 18^3	(a) 9	5) 400 azulejos
(b) 169	(b) 5^5	(b) 239	6) $8^3 = 512\ dm^3$
(c) 100 000	(c) $11^4 \cdot 7^3$	(c) 137	7) 100 personas
(d) 2 187	(d) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	(d) 180	8) 3^4 no es la mitad de 3^8
(e) 1		(e) 184	La primera milpa es 81 veces mayor
(f) 243		(f) 37	

1.2 Operaciones con números naturales

Escenario de aprendizaje: cuatro cuatros 44 – 44 = 0 4 ÷ 4 + 4 – 4 = 1 4 ÷ 4 + 4 ÷ 4 = 2 (4 + 4 + 4) ÷ 4 = 3 (4 - 4) ÷ 4 + 4 = 4 (4 . 4 + 4) ÷ 4 = 5 (4 + 4) ÷ 4 + 4 = 6 4 + 4 – 4 ÷ 4 = 7 4 + 4 + 4 – 4 = 8 4 + 4 + 4 ÷ 4 = 9 (44 – 4) ÷ 4 = 10	1) (a) 264 (b) 22 (c) 40 (d) 66 (e) 6 (f) 32 (g) 25 (h) 325 3) $300 \cdot (32-3) - 32 \cdot 250 = 700$ 4) $(52800 - 43200) \div 400 = 24$ 5) $16 + (16+8) + 7 + 2 \cdot 16 + (16+8) \div 2 = 91$ 6) ₡2950 7) 432km

1.3 Algoritmo de la división

1) (a) q = 6, r = 2 (b) q = 17, r = 2 (c) q = 12, r = 0 (d) q = 15, r = 3
2) (a) 19 aulas (b) 18 aulas con 48 pupitres y una con 47
3) 40 envases, 4 litros sin envasar. 4) ₡184 000, sobra ₡25 5) 8 viajes.
6) (a) 120 (b) 180 (c) 600 (d) 12 (e) 5 (f) 50 7) 2
8)

Divisibilidad / Número	2	3	4	5	6	7	9	10
1 323		√				√	√	
450	√	√		√	√		√	√
210	√	√		√	√	√		√
216	√	√	√		√		√	
121								
1 715				√		√		
2 835		√		√		√	√	

9) Puede ser 2, 5 u 8
10) 19 11) el uno
12)
(a) 4 305 es divisible por 7 y 5, por tanto es divisible por 35
(b) 3 240 es divisible por 4, 3 y 5, por tanto es divisible por 60
(c) 945 es divisible por 9 y 5, por tanto es divisible por 45
13) (a) par (b) impar (c) impar (d) impar excepto cuando la base es cero.
14) V V F V V V F 15) Puede ser 2004, 2016 y 2028
16) 105 y 210 17) No
18) Sí, ejemplo el 12 19) 98, 105, 112, 119 20) Sí
21) A la diferencia de los números extremos multiplicada por once.
22) Es la mitad del número pensado 23) 89 naranjas 24) 36 cromos
25) A 225 sí, a 403 no. 26) 3954

1.4 Números primos

1) 107, 109, 113 y 127 2) 3 3) 2 : el 11 y 13
4) (a) $2^2 \bullet 3^3 \bullet 5$ (b) $2 \bullet 5^2 \bullet 11$ (c) $13^2 \bullet 2^2$ (d) $5^2 \bullet 19 \bullet 2$ (e) $2^3 \bullet 23$ (f) $37 \bullet 23$ (g) 3^7 (h) $3^2 \bullet 7^3$
5) (a) 2, 3 y 11 (b) 3, 5 y 17 (c) 2, 5 y 7 (d) 2, 3 y 7 (e) 2, 5, 7 y 19
6) 72 tiene 12 divisores, pero al ser la multiplicación conmutativa, solo hay 6 posibilidades
7) 9 posibilidades, que son los divisores de 36
8)
(a) 12
(b) En una bolsa, 90 pines. 45 pines en 2 bolsas. 30 pines en 3 bolsas. 18 pines en 5 bolsas. 15 pines en 6 bolsas. 10 pines en 9 bolsas. 9 pines en 10 bolsas. 6 pines en 15 bolsas. 5 pines en 18 bolsas. 3 pines en 30 bolsas. 2 pines en 45 bolsas. 1 pin en cada bolsa.
9) (a) 2 (b) no, por ejemplo el 9 (c) no, ejemplo 7 + 5 =12 (d) 4
10) 457, 461, 463, 467, 487, 491, 499
11) 2 x 120, 4 x 60, 8 x 30, 16 x 15, 3 x 80, 6 x 40, 12 x 20, 24 x 10, 48 x 5
12) (a) 24 (b) 12 (c)9 (d) 12 (e) 8 (f)4 (g) 8 (h) 12
13)
(a) 1, 2, 4, 8, 7, 14, 28, 56
(b) 1, 3, 9, 27, 5, 15, 45, 135, 25, 75, 225, 675
(c) 1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40, 25, 50, 100, 200, 3, 6, 12, 24, 15, 30, 60, 120, 75, 150, 300, 600
(d) 1, 211

1.5 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

1) (a) 90 / 15 (b) 24 / 8 (c) 105 / 1 (d) 39 / 1 (e) 169 / 13 (f) 588 / 7 (g) 270 / 9 (h) 12 / 6
2) (a) 3 (b) 5 (c) 1 (d) 4 3) (a) 98 (b) 30 (c) 125 (d) 363
4) 375 estudiantes 5) 1 día 6) cada recipiente debe ser de 60 litros y se necesitarán 19 7) 20 cm 8) 20 cm 9) $a \bullet b$
10) 12 min / 5 veces 11) 60 u 80 12) 24 nísperos 13) 60 es el menor número que cumple la condición. 14) (a) a (b) b 15) No, por ejemplo, MCD (9,24) =3
16) 20/ la pequeña da 2 vueltas y la grande sólo 1
17) 40 bolitas cada collar/ 3 azules, 4 rojas y 5 blancas 18) 6 dm 19) 135 ligas
20) A las 9 am del día siguiente 21) 18 plantas 22) Dentro de 12 días
23) 288 segundos 24) 60 000 km 25) 45 bombillas

1.6 Números enteros

1	7	5			1	2		2	1
1		0		2	1		1	8	
1	1			1			2	2	5
				6	5				5
4	3	9	9		5				
4	0	0			5	3		9	7
		0		1	0	3		1	5
4	0			3		7			
5		1	2	3		5	2	5	0
		5		1	8		4		

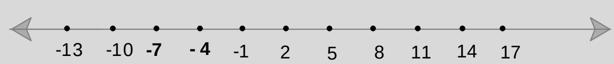
1) (b) -89, 2 (c) 3 819 (d) -1324 (e) -1000 (f) -50 (g) 1821 (h) 15 (i) 250 000 000 (j) -384 (k) -10 000 000
2) -41 3) -432 4) 51°C 5) -200 6) -21 500 7) 15 m
8) (a) 475m / -475 (b) 875m (c) 1475m / -1475
9) Telémaco
10)

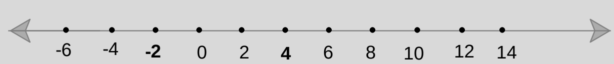
Número entero que la representa	Situación opuesta	Número entero que representa la situación opuesta.
15	Una ave descendió 15 metros	−15
-3	Majencio caminó 3 km al Norte de su lugar de trabajo	3
-500	Una construcción arquitectónica data el año 500 d. C	500
2000 000	Nemesio tuvo una pérdida de ₡2 000 000 en un negocio	-2000 000
0	La temperatura en Canadá fue de 0° C	0

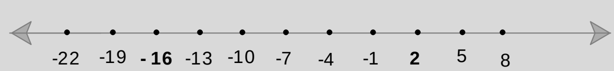
11)

Operación	Resultado
$\|-5\|$	5
$\|-11+-20\|$	31 m
$-(-10)$	10°C
$-\|-8\|$	- 8
$\|-172+1\|$	171
$\|-9+15\|$	24
$-(-17)-25$	- 8

12)

(a)


(b)


(c)


13) (a) 21 (b) - 4 (c) - 18 (d) 6 (e) - 21 (f) - 6 (g) 2 (h) - 1 (i) - 11 (j) - 19

14) (a) < (b) < (c) = (d) < (e) < (f) < (g) = (h) = (i) = (j) <

15) (a) -16 (b) 4 (c) 47 (d) -5 (e) -8 (f) 9 (g) -78 (h) 2 (i) 101 (j) 78 (k) -30 (l) -67 (m) -120 (n) 0 (ñ) -76 (o) 857 946 (p) -21 (q) -16

1.7 Multiplicación y división de números enteros

1) (a) 105 (b) -36 (c) -48 (d) 360 (e) 0 (f) -72 (g) – 504 (h) 210 (i) -45
(j) 7 (k) 0 (l) -93 (m) 100 (n) -3 (ñ) 90 (o) -52 (p) 126 (q) 0

2) (a) – (b) – (c) + (d) + (e) – (f) –

3) -10m 4) 3 300m 5) ₡3 400 6) 20 días 7) -15m
8) $-8000 \bullet 2 \bullet 12 = -192000$ 9) ₡14 500 10) ₡68 400

1.8 Potencias con números enteros

1) (a) -216 (b) 81 (c) 1 (d) - 10 000 (e) 121 (f) - 128 (g) – 1 (h) 1 (i) 81 (j) – 343

2) (a) = (b) > (c) = (d) = (e) = (f) = (g) = (h) =

3) (a) 6^9 (b) -15^{17} (c) 7^{15} (d) $-5^{20} \bullet 4^{11}$ (e) $8^4 \bullet 3^{12} \bullet 5^7$ (f) 23^{20} (g) 17^{11}
(h) 9^4 (i) -5^1 (j) -11^3 (k) 13^0 (l) 14^{20} (m) -9^{45} (n) 11^{24} (ñ) -3^{37} (o) -7^5 (p) -4^{84} (q) -29^{11}

4) (a) 9^3 (b) $(-7)^4$ (c) $-(11)^2$ (d) $(-6)^3$ (e) $8^3 \bullet (-8)^2$

5) (a) 16 (b) -1 (c) 1 (d) 4 096

1.9 Radicación con números enteros

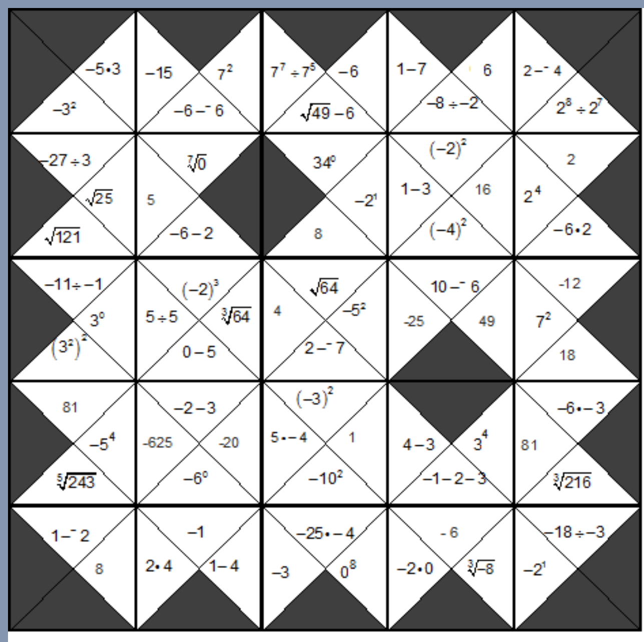
1) (a) $\sqrt[3]{125} = 5$ (b) $\sqrt[2]{36} = 6$ (c) $\sqrt{49} = 7$ (d) $\sqrt[7]{1} = 1$ (e) $\sqrt[5]{-1024} = -4$ (f) $\sqrt[4]{0} = 0$

2) (a) $2^5 = 32$ (b) $9^3 = 729$ (c) $15^2 = 225$ (d) $-5^7 = -78125$ (e) $1^4 = 1$ (f) $0^2 = 0$

3) (a) 6 (b) 11 (c) 21 (d) 36 (e) No definida (f) - 4 (g) 0 (h) No definida
(i) 8 (j) 14 (k) -3 (l) 10 (m) 15 (n) 3 (ñ) -4 (o) 13

1.10 Operaciones combinadas con números enteros

1) (a) -35 (b) -26 (c) 11 (d) 2 (e) -16 (f) 4 (g) -36 (h) 28
(i) -5 (j) 18 (k) - 24 (l) 1 (m) 4 (n) 12 (ñ) 75 (o) 12



Respuestas Sucesiones y álgebra

2.1 Sucesiones

1) (a) 2, 4, 10, 28, 82, 244 (b) 0, 0, 2, 6, 12, 20 (c) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}$
(d) 1, -1, 1, -1, 1, -1

2) (a) $a_n = 3n+1, \quad n \geq 0$ (b) $a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \geq 0$ (c) $a_n = (-2)^n, \quad n \geq 0$ (d) $a_n = n+3$
(e) $a_n = 4n$ (f) $a_n = n^3$ (g) $a_n = 3^n$ (h) $a_n = 5n$

3) (a) 121 (b) $\frac{1}{625}$ (c) $\frac{52}{9}$ (d) 728 (e) 29 (f) 1944 (g) -36 (h) 18 4) (a) 13, 17, 21
(b) Posición $\cdot$ $4-3$ (c) 177

5) (a) Cintas = Posición $\cdot$ $2+1$ (b) 45

6) (a)

Día	1	2	3	4	5	6
Gastos	37000	52000	67000	82000	97000	112000

(b) $g_d = 22000 + 15000 \cdot d \qquad d > 0$ (c) 172 000 colones

2.1 Sucesiones

7) (a) 81 (b) Sexto enlace

8) (a)

Día	1	2	3	4	5	6
Cantidad de virus	20	40	80	160	320	640

(b) $V_d = 20 \cdot 2^{d-1}$ $d \geq 1$ (c) 1280

9) (a)

Día	1	2	3	4	5	6	7
Litros	10	20	40	80	160	320	640

(b) $L_d = 10 \cdot 2^{d-1}$ $d \geq 1$ (c) 1270 litros.

10) 3906 11) $P_x = 800 + 300x$ 12) 12 meses

13)

(a)

Día	Valor
1	320 000
2	160 000
3	80 000
4	40 000
5	20 000

(b) ₡ 5000

14) 2 046

15) (a) $p_a = 7000 + 200 \cdot a$ (b) la paga es dependiente, la cantidad de artículos vendidos es la independiente. (c) ₡11 200 (d) no.

16) (a) costo (b) unidades de pulseras (c) 513 (d) 459 (e) 1

17) (a) ₡740 (b) ₡ 750 (c) Ganancias / cuadernos producidos (d) -12

18) (a) radio (b) longitud de la circunferencia (c) 8π

19) (a) T (b) 625 (c) 1775 20) (a) x (b) 400 000 (c) 100 000

21) (a) 6 (b) 9 (c) - 4 22) (a) -2 (b) 253 (c) -1 (d) 1 (e) - 9 (f) 19 (g) - 2 (h) 27 (i) -10 (j) 11 (k) 3 (l) -2 (m) 36

2.2 Proporcionalidad

1) $(a)\ L_m = 50 \bullet m$ $(b)\ 2750kg$ 2) $(a) S_e = 130 \bullet e$ $(b)\ 221m$

3) (a) $C = 300 \bullet a$ (b) ₡ 12 000 (c) 55 4) (a) $A = 17 \bullet t$ (b) 680 árboles

5) (a) $L = 21000 \bullet t$ (b) 5 toneladas 6) 90

7) (a) $\text{Litros desperdiciados} = 5 \bullet h$ (b) 60 litros

8) (a) $P = \dfrac{36\,000}{x}$ $x: número\ \ de\ \ personas$ (b) ₡ 6000

9) (a) $t = \dfrac{36}{x}$ $x: número\ \ de\ \ fotocopiadoras$ (b) 9 horas (c) 2 horas

10) (a) $t = \dfrac{24}{x}$ $x: número\ \ de\ \ obreros$ (b) 8 obreros 11) 12 12) 1800 dólares

13) (a) $d = \dfrac{12}{t}$ (b) 2 14) (a) directa 15) (a)DP (b) IP (c) IP (d) DP (e) DP

Respuestas Estadística

Ejercicios 3.1

1)
(a) Estudiante del Colegio Utopía
(b) Estudiantes del Colegio Utopía
(c) 325 estudiantes del Colegio Utopía de diversos niveles
(d) 5

2)

Variable	Cualitativa	Cuantitativa Discreta	Cuantitativa Continua	Posible observación
Sexo	√			Femenino
Número de hermanos		√		2
Nivel que cursa	√			Octavo
Edad			√	13,8 años
Salario	√			Medio

3)
(a) Recipiente de la empresa “Los Quebrados”
(b) Recipientes de la empresa “Los Quebrados”
(c) 5% de los recipientes de la empresa “Los Quebrados”
(d) Resistencia de los platos
(e) cualitativa

4)

Variable	Cualitativa	Cuantitativa discreta	Cuantitativa continua
(a)		√	
(b)			√
(c)		√	
(d)			√
(e)		√	
(f)	√		
(g)	√		
(h)			√
(i)	√		
(j)			√
(k)		√	
(l)	√		
(m)		√	
(n)			√
(o)		√	
(p)	√		
(q)		√	
(r)			√
(s)			√
(t)		√	

Ejercicios 3.1

5)

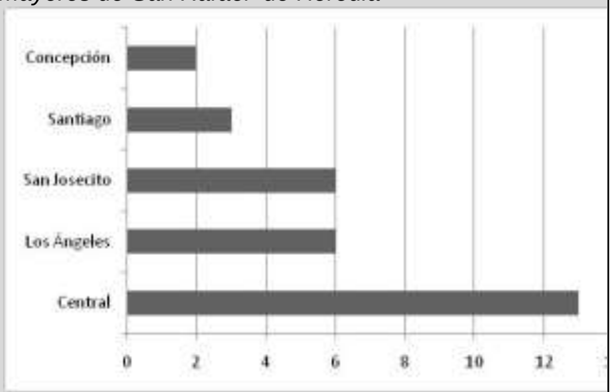
	Dato	Pobla-ción	Muestra	Variable	Clasifica-ción
(a)	Familia de San Juan de Tibás	Familias de San Juan de Tibás	Familias de los tres barrios más densos San Juan de Tibás	Consumo de agua de las familias por mes	Cuantitativa continua
(b)	Juguete que se fabrica	Juguetes que se fabrican	10 juguetes de cada modelo	Calidad del juguete	cualitativa
(c)	Jeringa del laboratorio Glez	Jeringas del laboratorio Glez	5 jeringas por cada lote de 100	Calidad del las jeringas del laboratorio Glez	cualitativa
(d)	Estudiante del Colegio La Sonrisa Ideal	Estudiantes del Colegio La Sonrisa Ideal	10 primeros estudiantes de la lista de cada sección del Colegio La Sonrisa Ideal	Cantidad de calzas	Cuantitativa discreta
(e)	Aula del Colegio Andrómeda	Aulas del Colegio Andrómeda	Aulas con numeración impar de Colegio Andrómeda	Estado de las aulas	cualitativas
(f)	Joven de Puntarenas	Jóvenes de Puntarenas	Jóvenes de Puntarenas que asisten al colegio, de edades entre 14 y 16 años	Dulces preferidos por los estudiantes	Cualitativa

6)
(a) Adulto mayor de San Rafael, Heredia
(b) Distrito: cualitativa
(c)

Tabla 1
Distrito al que pertenecen adultos mayores de San Rafael de Heredia

Distrito	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Porcentaje
Central	13	0,43	43,33
Concepción	2	0,07	6,67
Los Ángeles	6	0,20	20,00
San Josecito	6	0,20	20,00
Santiago	3	0,10	10,00
Total	30	1	100

6)
Gráfico 1
Distribución absoluta: distrito al que pertenecen adultos mayores de San Rafael de Heredia



(d)

Variable	Cualitativa	Cuantitativa discreta	Cuantitativa continua
Edad			√
Número de hijos		√	
Medicamentos que toma	√		
Horas que duerme			√
Hace deporte	√		
Casa	√		
Gastos mensuales en comida			√
Escolaridad	√		
Visita a dentista		√	
Religión	√		

7) (c) (i) 10 (ii) 10 (iii) 14 (iv) 5 (v) 20% (vi) 0%
8) (a)
Tabla 2
Mamíferos observados en una hora en el Parque Nacional Braulio Carrillo.

Distrito	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Porcentaje
Coyote	6	0,125	12,5
Danta	9	0,188	18,75
Jaguar	4	0,083	8,33
Mono Carablanca	6	0,125	12,5
Puma	5	0,104	10,42
Saíno	10	0,208	20,83
Tapir	6	0,125	12,5
Tepezcuintle	2	0,042	4,17
Total		1	100

9) (a) 13 (b) 7 (c) 14 (d) 4 (e) 65 (f) 0

10) (c) 12 (d) 3 (11) I y II
12)

Ausencias	Frecuencia Absoluta	Porcentaje
10	12	30
12	5	12,5
15	8	20
20	4	10
22	6	15
30	5	12,5

13) opción C 14) opción B
15) (a) 38 (b) 2 (c) 26 (d) 31,5%
16)
Tabla 3
Familias de Garabito: consumo de leche, en litros, por semana. 2012

Litros de leche	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Porcentaje
0	2	0,03	3,33
1	2	0,03	3,33
2	4	0,07	6,67
3	6	0,10	10,00
4	3	0,05	5,00
5	12	0,20	20,00
6	10	0,17	16,67
7	13	0,22	21,67
8	4	0,07	6,67
9	4	0,07	6,67
Total	60	1	100

17) (a) 250 (b) 25 (c) Golf 18) opción C
19) (a) Guatemala (b) Chile (c) Holanda y Honduras
20) (a) por ser cronológica (b) 1994 y 1998 (c) 1958 y 1962 (d) 1986 a 1994 (e) 10% (f) 1970 (g) 1 656 575

21) (a) 1992 (b) 1,0605 (c) 1990 (d) 51%
22) (a) 2004 y 2005 (b) De 1998 a 2003 (c) 2003, 2005 y 2007 (d)25 000
23) (a) Una misma persona ingresó a más de una red social (b) 2,47% (c) 52, 08% (d) no
24) Opción B (25) Opción A (26) (b) 2011

Ejercicios 3.1

2) (a) 15 (b) 28,81 (c) 54 (d) 10
3) (a) 35 (b) 49,3 (c) 78 (d) 29 (4) 2 (5) 81,33
6) (a) 17 (b) 18,37 (c) 26 (d) 8 (7) 68 (8) 8,8
9) (a) 15 (b) 20 (c) 32 (d) 12 10) Opción D 11) 79
(12) Opción B 13) (a) 5 (b) 3,03 14) *5ta o 6ta* *3era*
15)
(a) 7 7,2 7 (b) no hay 8,42 11 (c) 22 21,4 22

Respuestas geometría

Ejercicios 4.1

1) (a) $\overleftrightarrow{AB}$
(b) alabeadas
(c) oblicuas
(d) $\overrightarrow{HM}$
(e) una recta
(f) $\overrightarrow{BA}$
(g) un punto
(h) una

2) (a) $\overline{BR}$
(b) { B }
(c) $\overrightarrow{RA}$, $\overrightarrow{RB}$
(d) Q – B – T , B – R – A

3) opción (d)
4) (a) T, R, P
(b) $\overleftrightarrow{PA}$
(c) R
(d) $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PT}$
(e) T – P – A
(f) $\overline{PT}$

5) opción (a)

6) (a) k y d
(b) q
(c) q ó n
(d) m, q

7) (a) $\overleftrightarrow{RL}$
(b) m y n
(c) j y m
(d) C, B, A
(e) D, F, A
(f) $\overrightarrow{ED}$
(g) D
(h) j y n
(i) C (j) β (k) m y j

Ejercicios 4.1

7)
10)
(a) Malinche
(b) Guanacaste
(c) Sí, ya que se intersecan.
(d) Higuerón, ya que es finita.

Ejercicios 4.2

1)
(a) $\measuredangle EAC$
(b) $\measuredangle EAB$
(c) $\measuredangle MAC$
(d) $\measuredangle MAC$
(e) $\measuredangle MAG$
(f) 48°, 138°

2)
(a) $\measuredangle EBC$ (b) $\measuredangle EBA$
(c) $\measuredangle EBA$ (d) $\measuredangle DBE$

3) (a) $\measuredangle CBE$ (f) 120°
4) 86°
5) 30°, complementarios
6) 54° y 126°
7) 35°
8) opción C
9)
(a) $\measuredangle b$
(b) $\measuredangle e$
(c) $\measuredangle g$
(d) $\measuredangle g$
(e) $\measuredangle g$
(f) b = 125°, c = 55°, a = 55°
10) x = 15°, y = 165°
h = 165°, k = 15°,
w = 165°, r = 165°
a = 15°
11) (a) 45° (b) 55°
12) (a)15° (b) 105°

Ejercicios 4.2

13)
(a) 90°
(b) 51°
14) 45°
15) no siempre
16) no necesariamente
17) no
18) otro ángulo recto
19)
(a) 20°
(b) 20°
(c) 20°
(d) 70°
(e) 160°
(f) 110°

Ejercicios 4.3

1) (a) (c) (d) (e) sí corresponden a triángulos

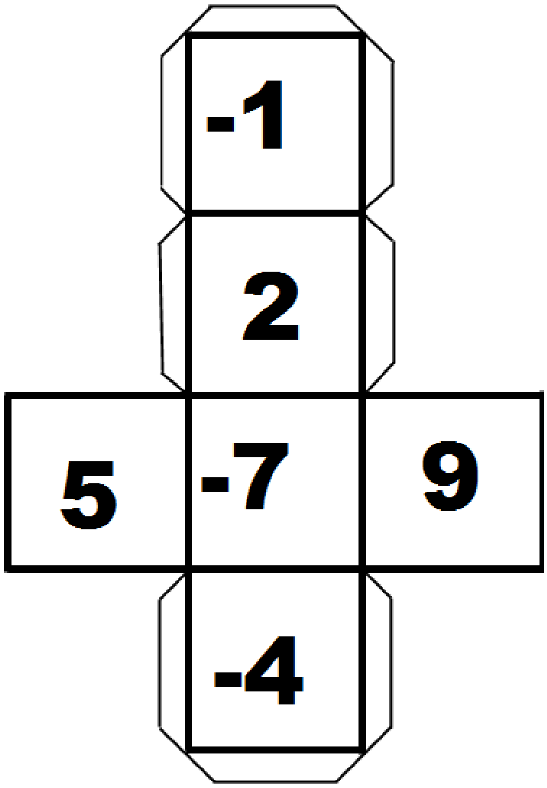
2) $\overline{FP}$ 3) $\overline{HV}$ 4) $\measuredangle T$

5)
(a) 66 (b) 30° (c) 20°
(d) 29° (e) x = 80°, y = 70°
(f) x = 70°, y = 40°,
w = 140°, z = 70°
(g) x = 143°, y = 37°
(h) x = 41°, y = 55,5
(i) x = 20°, y = 80°

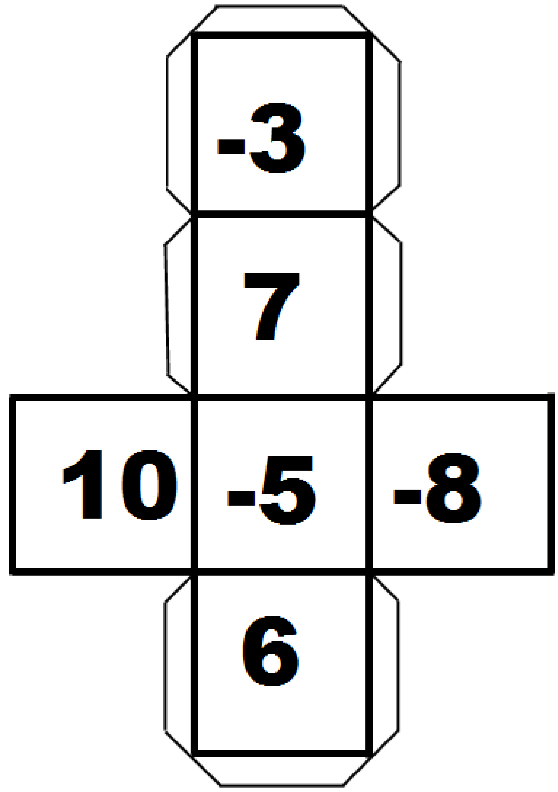
6) 76° 7) 40° 8) 50° y 40°
9) 108° 10) 135°
11) (a) 109° (b) 118°
12) (a) 148° (b) 81°
13) 62° 14) (a) 50° (b) 129°
15) a = 110°, h = 123°,
d = 75°

Ejercicios 4.4 A	Ejercicios 4.5
1) (a) 6cm (b) 90° (c) DB 2) (a) 8cm (b) 38° (c) 142cm 3) (a) 114° (b) 70° 4) (a) 72° (b) 60° (c) 60° (d) 48° 5) (a) 45° (b) 90° (c) 5cm (d) 10cm 9) 160° 10) 40° 11) 84° **Ejercicios 4.4 B** 2) 115 cm^2 3) 1810cm^2 4) 328dm^2 7) (a) 6cm^2 (b) 10cm^2 8) (a) 14 cm^2 (b) 15 cm^2 9) 24 10)44 11) $\frac{75}{2}$	3) Área 28, perímetro 22 3) (0,1) 4) 52 8) (3,5) (-8, 4) (- 4, 0) (12, - 10) (-3, 2) (-3, -1) 9) (a) G (b) No (c) No (d) 6 unidades arriba y 1 a la derecha (e) 3 unidades arriba (f) No

1. **Moldes de dados.**



Dado 1



Dado 2

Rompecabezas operacional.